平面弹性复变方法（第二版）

路见可　著

复变函数是研究平面弹性和断裂力学的一种极为有效的工具。本书将各种问题用复变方法化为积分方程求解，并证明其惟一可解。书中大部分内容为著者研究成果。

武汉大学学术丛书
WUHAN UNIVERSITY ACADEMIC LIBRARY 武汉大学出版社

武汉大学学术丛书

平面弹性复变方法

（第二版）

路见可 著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面弹性复变方法/路见可著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2002.6

(武汉大学学术丛书)

ISBN 7-307-03477-8

Ⅰ.平…　Ⅱ.路…　Ⅲ.弹性力学—高等学校—教材　Ⅳ.O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第008852号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：程小宜　　版式设计：支　笛

出版：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)

发行：新华书店湖北发行所

印刷：武汉市科普教育印刷厂

开本：850×1168　1/32　印张：9.25　字数：233千字　插页：3

版次：1986年5月第1版　　2002年6月第2版

2002年6月第2版第1次印刷

ISBN 7-307-03477-8/O·256　　定价：25.00元

内容提要

本书简明扼要地说明了平面弹性理论中的复变函数方法，并提出各种重要基本问题，特别是断裂力学中的一些问题（包括复合材料问题）的求解方法。书中有不少内容是作者多年来的科研成果。本书可作为应用数学专业和力学专业高年级大学生和研究生的教材，也可供从事应用数学和弹性力学教学和科研的同志参考。

第一版序

用复变函数论工具求解平面弹性问题是非常有效的方法。国际上，特别是前苏联学派，在这方面有大量的工作。N. I. Muskhelishvili 的专著[34]就是这方面的代表著作，其中阐述了它的基本理论并概括了20世纪50年代及以前的许多研究工作。该书是经典的标准著作，但篇幅过大，初学者常常望而生畏。日本学者森口繁一的专著[11]则为一本总结性著作，又失之过简，许多问题的讨论并未展开，不易为初学者所掌握。此外，还有一些英文专著，如[13]，各有特点，在国内不多见，就不一一列举了。

本书将用较少篇幅，介绍怎样把平面弹性问题化为解析函数边值问题，并说明如何进一步转化为积分方程以及从理论上说明后者解的存在和惟一。所用方法是构造性的，因而容易具体求解（虽然本书并未列入数字例子）。书中有不少内容是作者在20世纪60年代以来的研究成果，但有关周期弹性问题方面的内容则全未提及，因为已在作者和蔡海涛同志合著的[10]一书中专门讨论。本书中有关断裂力学的内容（尤其是复合材料的问题）特别值得注意，因为这是在实际应用中最为重要的课题。

阅读本书基本部分只需具备复变函数论的知识和弹性力学中的一些最基本的概念，还要用到 Fredholm 积分方程的备择定理。在某些章节中需涉及其他方面的知识时，当随时指出，以方便读者。

作者希望本书引起函数论工作者对应用的兴趣，也希望应用数学和力学工作者能更深入了解复变函数工具的作用，以促进这

两方面的同志之间的互相了解，使这两方面的工作互相渗透，都得到提高和发展。

由于作者才力、学识所限，书中难免有错误和不妥之处，谨希广大读者不吝指正。

路见可

1985 年 4 月

第二版序

本书第二版作了较大修订。除改正了一些第一版中排印错误外，增加了作者近十多年来的科研成果，如3.6、3.7、7.1、7.2各节等；特别对循环对称问题增加了不少具有裂纹的情况，因此单独另辟一章。此外，还增加了一个附录二，以方便读者阅读本书。本版仍难免存在不妥与谬误之处，尚祈广大读者指正。

路见可

2002年5月

武汉大学

学术丛书

路见可 江苏宜兴人,1922年11月出生,1943年毕业于武汉大学,为我国第一批博士生导师之一、曾任武汉大学数学系主任和数学研究所所长、中国数学会常务理事、湖北省数学学会和武汉数学学会理事长、《数学杂志》主编等职。长期从事分析数学教学和复分析的研究工作。在解析函数边值问题、奇异积分方程及其应用这一领域内,为我国最早开展研究的工作者之一,获得不少重要成果。发表有学术论文100余篇,出版了《解析函数边值问题》等专著数部。1980年和1990年曾分别两次赴美国工作访问各一年,均按期回国,为培养我国年青一代数学人才竭尽精力,作出贡献。

目 录

第 1 章　一 般 理 论

1.1　基本概念与公式

我们假定读者已对弹性理论有一定的基础知识，因此这里只概括地阐述一下以后要讨论的平面弹性理论中的一些基本概念与公式.

设在空间已取定一右手直角坐标系 $Oxyz$，用 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 分别表示弹性体中各点在 x,y,z 轴方向的正应力，$\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}$等为相应的剪应力. 这样，在某点处与 x 轴垂直的微面积上应力向量在 x,y,z 轴方向的分量分别为 $\sigma_x,\tau_{xy}(=\tau_{yx}),\tau_{xz}(=\tau_{zx})$，它们都是该点的位标$(x,y,z)$的函数. 我们用 u,v,w 分别表示弹性体中各点在 x,y,z 轴方向的位移分量，当然它们也都是(x,y,z)的函数. 称

$$\left.\begin{aligned}
e_{xx}(=\varepsilon_x) &= \frac{\partial u}{\partial x},\\
e_{yy}(=\varepsilon_y) &= \frac{\partial v}{\partial y},\\
e_{zz}(=\varepsilon_z) &= \frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

为(单向)拉伸形变，而

$$\left.\begin{aligned} e_{yz}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{yz}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ e_{zx}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{zx}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ e_{xy}\left(=\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}\right)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.2)$$

称为(纯)剪切形变.

在线弹性理论中，起重要作用的广义胡克定律是：应力是诸形变的齐次线性函数，反之，形变也是诸应力的齐次线性函数.

对于弹性体，我们假定是各向同性的，用 E (>0)表示其弹性(杨氏)模数，用 ν $\left(0<\nu<\frac{1}{2}\right)$ 表示其泊松比.

所谓平面弹性问题可分为以下两种情况.

1° 平面形变状态 设想有一两端无限长的弹性柱体，其母线平行于 z 轴. 由于某种原因，弹性体内各点产生水平的位移 u,v，且其值仅是 x,y 的函数，与坐标 z 无关：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

而 $w\equiv0$；换句话说，位移只发生在与 z 轴垂直的平面内，且与 z 轴垂直的各个截面上，位移的分布状况是相同的. 这种情况称为**平面形变状态**，因为这时只存在形变 e_{xx},e_{yy},e_{xy}，而下标与 z 有关的形变 $e_{zx}=e_{zy}=e_{zz}=0$.

在实际问题中，当然不会有无限长的弹性柱体，但若物体长度尺寸远远大于横断面尺寸而位移又符合上述要求，就可近似地看做这类问题. 例如相当长的水坝坝体往往就可看做这种问题.

在这种情况下，广义胡克定律为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y},\\ \sigma_y&=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y},\\ \tau_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.3)$$

其中 λ,μ 称为拉梅常数，由下二式确定：

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad (1.1.4)$$

μ 称为弹性体的剪切模数.

注意，在这种情况下，应力也必然是 x,y 的函数而与 z 无关. 要当心的是，这时虽然 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$，但 σ_z 一般不为零而由下式给出：

$$\sigma_z=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).\qquad (1.1.5)$$

设弹性体内有体积力 $F=(X,Y,0)$，即分布于弹性体的各点处外力的强度(单位面积上所受的力)，它在 x,y 轴方向的分量已分别记为 X,Y，它们都是 x,y 的函数，而在 z 轴方向的分量 $Z=0$ (这才可能是平面形变问题). 以后我们只限于讨论弹性静力学问题. 根据静力学平衡原理，可得**平衡方程**：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0.\end{aligned}\right\}\qquad (1.1.6)$$

由(1.1.3)易得

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=2(\lambda+\mu)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),\qquad (1.1.7)$$

其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$为 Laplace 算子. ①

又以(1.1.3)代入(1.1.6)，可得

$$-X=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+\mu\Delta u,$$

$$-Y=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)+\mu\Delta v.$$

因此，

① 对于以后所出现的函数，恒假定在弹性体上有足够的光滑性.

$$-\frac{\partial X}{\partial x}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}\right)+\mu\Delta\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial Y}{\partial y}=(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)+\mu\Delta\frac{\partial v}{\partial y},$$

两式相加，得

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)=(\lambda+2\mu)\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

与(1.1.7)式比较，则有

$$\Delta(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right), \qquad (1.1.8)$$

(1.1.8)称为弹性体所应满足的**协调方程**.

2° 平面应力状态 设想在 Oxy 平面中的一块薄板，其内各点只有水平的应力，即 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$都是 x,y 的函数，而下标带有 z 的应力 $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$. 这种情况称为**平面应力状态**. 这时位移 u,v,w 也都只是 x,y 的函数(注意 w 一般并不为零). 从弹性一般理论可知，1°中所得的所有等式在这种情况下仍都成立，只要在这些公式中所有出现的 λ 改为

$$\lambda^*=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)}. \qquad (1.1.9)$$

所谓平面弹性问题指的就是以上两种情况. 且由于上述原因，我们以后就不再分别讨论平面形变与平面应力状态，而总认为(1.1.3),(1.1.6),(1.1.8)均成立，不过根据不同情况将其中出现的 λ 分别理解为(1.1.4)或(1.1.9).

我们现在有三个未知函数 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$的偏微分方程组(1.1.6),(1.1.8)，其中 X,Y 为已知函数. 在一定的边界条件下来求解.

从理论上讲，总可以把问题化归为无体积力的情形：$X=Y=0$. 事实上，只要找出方程组(1.1.6),(1.1.8)的一组特解 σ_x^*, σ_y^*, τ_{xy}^*，在 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$上分别减去这些函数后作为新的未知函数，就能达到目的. 在很多实际情况下，X,Y 并不复杂，这种特解是容易求得的. 例如，如果体积力是重力，假定 y 轴铅直朝上，则