

中学数学凯旋门



丛书顾问 张奠宙
丛书主编 何维安
邹一心

全国著名教育专家大力推荐
强调数学思想方法科学实用

平面几何

常用解题方法

奚根荣 文 竹 编著

中国出版集团
东方出版中心

中学数学凯旋门

丛书顾问 张奠宙

平面几何常用解题方法

何维安 邹一心 主编
奚根荣 文 竹 编著

中国出版集团

东方出版中心

图书在版编目 (CIP) 数据

平面几何常用解题方法. 何维安, 邹一心主编; 奚根荣, 文竹编著. —上海: 东方出版中心, 2003. 8

(中学数学凯旋门)

ISBN 7-80186-077-2

I. 平… II. ①何…②邹…③奚…④文… III. 平面几何—初中—解题 IV. G 634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 033454 号

平面几何常用解题方法

出版发行: 东方出版中心

地 址: 上海市仙霞路 335 号

电 话: 62417400

邮政编码: 200336

经 销: 新华书店上海发行所

印 刷: 上海望新印刷厂

开 本: 850×1168 毫米 1/32

字 数: 170 千

印 张: 7.5

版 次: 2003 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-80186-077-2

全套定价: 72.00 元 (共 6 册)

版权所有, 侵权必究。

内 容 提 要

“中学数学凯旋门”丛书由中学数学特级教师等主持编写,本书是其中之一。本书根据现行全国主要中学数学课程标准和教材,系统、科学地介绍了平面几何中常用的解题技巧、解题途径、注意事项等,特别是根据我国教育改革和素质教育的要求,根据目前高考、中考的需要,加强了其中的“应用问题”、“开放型问题”、“阅读理解型问题”等的编选,以培养读者的建模能力,收集、处理有关信息的能力和创新等能力。本书可供全国广大中学师生阅读,作为教与学的参考。

序

张莫宙

一份解题方法的丛书放在面前:《中学数学凯旋门》,很好听的名字。原以为数学解题书已经出得不少了,要有新意怕也难。打开一看,倒觉得确实与众不同。在目录上,满眼所及,是各式各样的方法。大的如归纳法、分析综合法、数形结合法、代数方程法;小的有待定系数法、旋转法、图形割补法、面积法、比例系数法等等。作者的原意是以数学方法为“经”,大量例题做“纬”,编织成一本中学数学的解题训练书。想法很新颖,付诸实践之后,当会看出它的效果来。

数学方法论一词,当是中国的特色。在著名的美国《数学评论》杂志的 500 多项分类目录中,并没有“数学方法”的条目。回想起来,徐利治先生于 1988 年出版《数学方法选讲》是这项研究的起源。自此之后的十余年间,数学方法在中国大陆迅速传播,尤其在“中学数学解题”领域中独树一帜。在中学数学教育界的声誉,可以说超过了波利亚的《怎样解题》。在实践上,一般的“解题技巧”纷纷向“解题方法”提升。这一热潮至今未退。本书的出现,则是一个新的例证。

这里,我愿从数学教育的角度提一个问题:学生是否能够理解“数学方法”?把数学题目的解法用方法论加以阐述,是教师的愿望。那么,学生是否能够掌握数学方法?学生会解题,就等于掌握了方法?在学生的认知过程中,数学方法论处于何种地位?似乎没有细究。最近,读到一份对高一学生的测试报告,说到学生对“归纳法”的掌握很差。如果问学生“什么是归纳法”,

2 平面几何常用解题方法

绝大多数学生只有模糊的印象,说不清楚。怕未必。因此,如何“教”数学方法,使得学生能够自觉运用数学方法,也许是未来一个重要的研究课题。本丛书从方法入手,将数学方法组织起来,希望能对回答“如何教数学方法”有点益处。

丛书共有六册,涵盖了初中和高中数学的主要内容。翻看之余,愿就几何内容说几句话。平面几何的内容,在新颁布的《九年义务教育数学课程标准》中已经做了大量的削减。公理化方法,以及圆的知识都所剩无几。增加的是几何直观内容,立体几何的若干内容也理所当然地进入了初中。不过,三角形、四边形、勾股定理,全等、相似、运动几何、坐标几何等等的基本概念仍然存在。几何教学的主要目的之一是培养学生的理性精神。因此,如何处理好演绎推理和直观操作的关系,将是今后一个时期研究的热点问题。几何解题方法是否也该做一些改变?此外,高中数学课程标准里有一门平面几何的选修课,奥林匹克数学竞赛中平面几何仍然居于核心地位。所以说,平面几何证题的学习和研究,并不会绝迹。

高中数学课程标准中,立体几何内容的安排,遵循直观认识——操作确认——逻辑论证——度量计算的原则。与此同时,向量计算方法将大量采用。这套丛书注意到了这些发展趋势,值得肯定。

“与时俱进”,打开数学方法的教学研究的新局面,该是未来努力的目标。上面的一些话,权作为序。

2003年春于华东师大

编 者 的 话

数学是中学的一门主要学科,要学好数学,必须掌握数学的基础知识、基本技能和基本思想方法。有的读者感到数学抽象、难学,虽然花了不少时间,但提高不快;面对稍难的题目,就不知从何下手。为此,我们一些长期在中学数学教学第一线的教师编写了这套中学数学凯旋门丛书,希望在切实掌握数学思想方法的基础上,能为读者解除困惑,指点迷津。

为了让读者能尽快提高数学素质,领悟并能运用常用的数学思想方法,本书在编写过程中,既注意与现行教材同步,又对每一节内容按常用的数学思想方法进行分类阐述,以突出数学思想方法的训练;不仅精选典型例题,而且对每一例题都作了深入的剖析。特别是,“解题思路”栏目在帮助读者解决“你是怎么想到的”同时,培养读者的探究能力;在解题的基础上又引导读者反思:解这类题易犯什么错误,如何防止,有什么规律,能否类比、引申?从中帮助读者深入领悟数学思想方法。本书面向全体学生,其中既有很多基本的例题和习题,通过自学和自习,可使目前学习数学暂时有困难的读者,摆脱困境;同时又有不少综合性较强、灵活运用的例题和习题,让水平较高的读者也能得到进一步的提高。本书中还特别加强了“应用问题”、“开放型问题”、“阅读理解型”问题等的编选,以培养读者的建模能力,收集、处理信息的能力和创新等能力。

本书中如有不妥或疏漏之处,敬请读者批评指正。



一、实验几何	1
相关知识要点	1
解题思路方法	1
1. 实验法	1
2. 观察法	3
3. 图形运动法	5
4. 归纳法	9
5. 分类讨论法	10
二、三角形	17
(一) 三角形的概念及其性质	17
相关知识要点	17
解题思路方法	17
1. 分析综合法	17
2. 面积法	19
3. 代数法	20
4. 图形构造法	21
5. 分类讨论法	22
(二) 特殊三角形	25
相关知识要点	25
解题思路方法	25
1. 图形运动法	25
2. 构造法	28
3. 尝试与猜想法	29
4. 逆推法	31
5. 分类讨论法	32
(三) 全等三角形的判定、性质和应用	35
相关知识要点	35



解题思路方法	36
*1. 同一法	36
2. 构造法	37
3. 分类讨论法	39
4. 截长补短法	41
5. 分析综合法	42

三、四边形 46

(一) 平行四边形 46

相关知识要点 46

解题思路方法 47

 1. 平行移动法 47

 2. 分析综合法 48

 3. 面积法 51

 4. *同一法 52

 5. 图形旋转法 53

(二) 梯形 57

相关知识要点 57

解题思路方法 57

 1. 分析综合法 57

 2. 代数方程法 59

 3. 分类讨论法 60

 4. 形数结合法 61

 5. 面积法 62

(三) 面积、勾股定理及其应用 65

相关知识要点 65

解题思路方法 66



目
录

1. 分析综合法	66
2. 代数方程法	68
3. 分类讨论法	70
4. 构造法	71
5. 面积法	73

四、相似三角形 77

(一) 成比例线段的概念、性质及其应用 ... 77

相关知识要点	77
--------------	----

解题思路方法	79
--------------	----

1. 比例系数法(也即“设 k 法”)	79
-----------------------------	----

2. 代数计算法	81
----------------	----

3. 分析综合法	82
----------------	----

4. 面积法	84
--------------	----

5. 函数思想方法	87
-----------------	----

6. 开放探究的方法	89
------------------	----

(二) 相似三角形的判定、性质及其应用 ... 93

相关知识要点	93
--------------	----

解题思路方法	94
--------------	----

1. 分析综合法	94
----------------	----

2. 基本图形分析法	96
------------------	----

3. 分类讨论法	98
----------------	----

4. 代数方程法	100
----------------	-----

5. 三角法	102
--------------	-----

五、锐角的三角比 106

(一) 锐角的三角比 106

相关知识要点	106
--------------	-----



解题思路方法	107
1. 比例系数法(也即“设 k 法”)	107
2. 配方法	108
3. 构造法	109
4. 数形结合法	111
5. 分析综合法	113
6. 分类讨论法	114
(二) 解直角三角形	116
相关知识要点	116
解题思路方法	117
1. 代数方程法	117
2. 图形割补法	119
3. 分析综合法	122
4. 归纳法	126
5. 数形结合法	127
(三) 解直角三角形的综合应用	130
1. 解直角三角形方法在测量方面的应用	130
2. 解直角三角形方法在几何中的应用	133
3. 解直角三角形方法与代数、几何方法的综合应用	135
4. 三角知识在生产实践中的应用	137
六、圆	142
(一) 圆的基本性质	142
相关知识要点	142



解题思路方法	142
1. 分析综合法	142
2. 分类讨论法	145
3. 数形结合法	147
4. 图形运动法	148
5. 建立函数模型法	150
6. 代数方程法	152
(二) 直线和圆、圆和圆的位置关系	156
相关知识要点	156
解题思路方法	156
1. 分类讨论法	156
2. 代数计算法	159
3. 分析综合法	161
4. 比例系数法(也即“设 k 法”)	163
5. 三角法	164
(三) 切线的判定、性质及其应用	168
相关知识要点	168
解题思路方法	169
1. 分析综合法	169
2. 分类讨论法	170
3. 数形结合法	172
4. 面积法	174
5. 配方法	176
6. 归纳法	177
7. 三角法	179
(四) 正多边形和圆、圆的度量	182
相关知识要点	182
解题思路方法	183



1. 定义法	183
2. 面积法	185
3. 三角法	186
4. 分解组合法	188
5. 方程法	191
(五) 关于圆的解题方法的综合应用	194
1. 圆与其他几何知识的综合应用 ...	194
2. 圆与代数知识的综合应用	196
3. 圆与三角知识的综合应用	200
4. 圆与几何、代数、三角知识的综合 应用	203
5. 圆的知识在实际问题中的应用 ...	206
参考答案与提示	213

一、实验几何

[相关知识要点]

1. 画简单图形的基本工具:有刻度的直尺、一副三角板(含 90° 、 60° 、 30° 、 45°)、量角器、圆规等。

2. 基本画图:包括过两已知点画直线、画一个角,使它的角度等于已知度数、画已知线段的垂直平分线、推平行线,以已知点为圆心作半径等于已知长的圆等。

3. 简单的平面图形运动

(1) 平移

(2) 对称

(3) 旋转

当旋转角 $\alpha = 180^\circ$ 时,图形的旋转运动就是中心对称。

上述三种图形运动有着共同的特点,即运动后得到的图形与原图形是全等的。但是,它们也有着各自的性质。例如,图形平移后,对应点的连接线段相等且平行。当两个图形关于某条直线对称时,对应点的连接线段被对称轴垂直平分。当两个图形关于某点成中心对称时,对应点的连接线段被对称中心平分。

4. 学会实际操作、认真实验、仔细观察、大胆猜测进而说理(今后是严格的论证)的科学方法,培养科学的探究意识、态度、精神和品质。

[解题思路方法]

1. 实验法

例 1 (1) 操作:分别画出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形各一个,并测量它们每个内角的度数。

(2) 猜测三角形三个内角和是不是一个不变的量? 并能使用不同的方法说明你的理由。

解题思路 (1) 任意画出按要求的三角形,用量角器量得它们各内角的度数,然后将它们相加,猜测任意三角形的三个内角的和是一个不变的量,它总等于 180° 。在测量时要注意精确度,力求准确。

(2) 考虑到平角等于 180° 或两直线平行,同旁内角之和为 180° 这些已知知识,可添置不同的辅助线来正确说明任何三角形内角之和总等于 180° 。

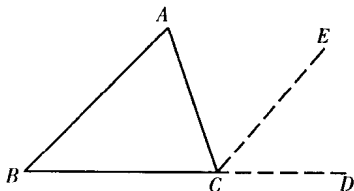


图 1-1-1

解 (1) 略。

(2) 如图 1-1-1, 延长 BC 至 D , 过点 C 画 BA 的平行线 CE 。由平行线的性质, 知 $\angle A = \angle ACE$, $\angle B = \angle ECD$ 。

$\therefore \angle BCD$ 是一个平角, 它等于 180° ,

$\therefore \angle BCA + \angle ACE + \angle ECD = 180^\circ$,

也就是 $\angle A + \angle ABC + \angle BCA = 180^\circ$ 。

$\therefore$ 三角形的三个内角之和等于 180° 。

说明 由于添置辅助线的方法不同, 从而会有不同的“说理”方法。请观察下列各图形(图 1-1-2), 你还有其他的“说理”方法吗? 请试一试。

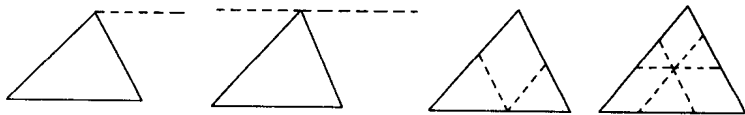


图 1-1-2

例 2 一副三角板中,有这样四个特殊角 30° 、 45° 、 60° 、 90° 。利用这副三角板可以画出 15° 角的方法很多,如图 1-1-3 是其中的一种方法。请你再画出两种不同构成 15° 的方法的图形,并简要说明理由。

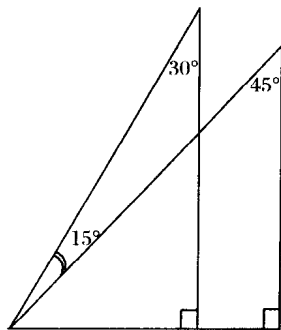


图 1-1-3

解题思路 利用已知特殊角 30° 、 45° 、 60° 、 90° 的和差,通过具体实验解决本题。

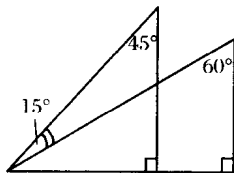
解 具体画法见图 1-1-4(1)。

说明 通过实验操作,还有其他不同的画法。如图 1-1-4(2)(3)就是符合要求的一种。想一想,你还有其他方法吗?

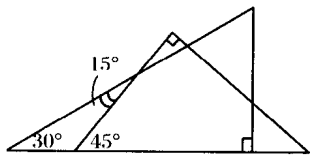
2. 观察法

例 3 (1) 先用直尺和量角器画一个顶角为 36° 的等腰三角形 ABC ,其中 $AB = AC$,再画出 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的角平分线 BD 、 CE (点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上),且 BD 与 CE 相交于点 O 。

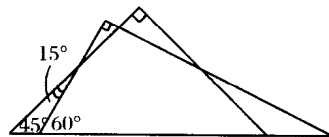
(2) 观察你所画的图形,试问该图形中有几个等腰三角形? 请一一写出来。



(1)



(2)



(3)

图 1-1-4

解题思路 先按题意画图,力求正确,再写上字母,点数该图形中的等腰三角形个数。注意在点数时要注意规律性,既不遗漏,也不重复。

解 (1) 画图,如图 1-1-5。

(2) 该图形中共有 8 个等腰三角形,它们分别是 $\triangle BOE$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACE$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle DBC$ 和 $\triangle ABC$ 。

说明 虽然题中未要求进行说理或证明,但在解题时,仍然要严密思想,思必有据,毫无差错。想一想:上面点数的八个三角形为什么都是等腰三角形?

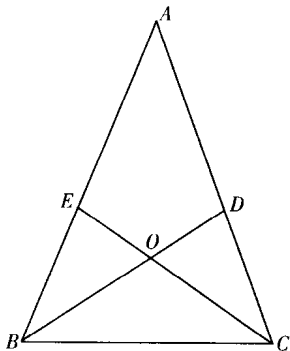


图 1-1-5

例 4 (1) 请画一个四边形 $ABCD$,使得 $AB = AD$, $CB = CD$,再连接 AC 、 BD ,它们相交于点 O 。

(2) 观察你所画的图形,在不再添加字母及辅助线的条件下,写出正确的结论(至少 八 个)。

解题思路 先按题中的操作要求作出图形,再仔细观察(需要时可以量一量或翻折一下或简单算一下),写出正确的结论。

解 (1) 按题意画图,如图 1-1-6。

(2) 该图形中,

相等的角有: $\angle ABD = \angle ADB$,
 $\angle CBD = \angle CDB$, $\angle BAC = \angle DAC$,
 $\angle BCA = \angle DCA$ 等;

相等的线段有 $BO = DO$;

互相垂直的线段有: AC 垂直平分 BD ;

等腰三角形有: $\triangle ABD$ 、 $\triangle CBD$;

全等三角形有: $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, $\triangle ABO \cong \triangle ADO$, $\triangle CBO \cong \triangle CDO$

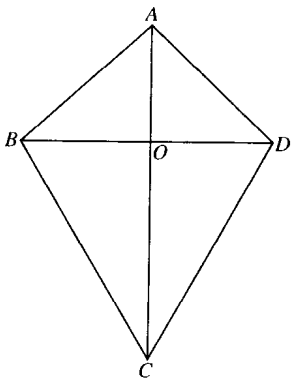


图 1-1-6