医学专业必修课考试辅导丛书

主编 贺东奇

医用高等数学

紧扣教学大纲 梳理知识体系 解读重点难点

网罗名校真题 精讲单项考点 引导复习路径

科学技术文献出版社

医学专业必修课考试辅导丛书

医用高等数学

主编 贺东奇

编者 （按章次为序）

贺东奇 唐志宇

高东红 张 侠

陈靖华 李治国

王 强

作者单位：北京大学医学部生物数学与生物统计学教研室

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北 京

图书在版编目(CIP)数据

医用高等数学/贺东奇主编.-北京:科学技术文献出版社,2002.10
(医学专业必修课考试辅导丛书)
ISBN 7-5023-3811-X

Ⅰ.医… Ⅱ.贺… Ⅲ.医用数学:高等数学-医学院校-教学参考资料 Ⅳ.R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 031599 号

出　版　者:科学技术文献出版社
地　　　址:北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话:(010)68514027,(010)68537104(传真)
图书发行部电话:(010)68514035(传真),(010)68514009
邮 购 部 电 话:(010)68515381,(010)68515544-2172
网　　　址:http://www.stdph.com
E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn
策 划 编 辑:薛士滨
责 任 编 辑:张述庆
责 任 校 对:李正德
责 任 出 版:刘金来
发　行　者:科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印　刷　者:北京国马印刷厂
版 (印) 次:2002 年 10 月第 1 版第 2 次印刷
开　　　本:850×1168　32 开
字　　　数:274 千
印　　　张:8.25
印　　　数:8001~14000 册
定　　　价:13.00 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书为高等医科院校各专业基础理论必修课《医用高等数学》的辅导读物。全书分为七章，内容分别为函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、常微分方程、概率论初步及线性代数初步。每一章由教学大纲要求、教学内容精要、典型例题分析、练习题、单元自测题、答案等六部分组成。本书旨在帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论、方法，培养其应用数学知识解决医学问题的能力。

本书读者对象为高等医科院校各专业学生及自学应试者，也可供讲授医用高等数学课程的教师和有关人员参考。

我们所有的努力都是为了使您增长知识和才干

科学技术文献出版社是国家科学技术部所属的综合性出版机构，主要出版医药卫生、农业、教学辅导，以及科技政策、科技管理、信息科学、实用技术等各类图书。

前　言

《医用高等数学》是医学专业必修课考试辅导丛书中的一个分册，读者对象是医科院校临床医学、口腔医学、精神卫生、预防医学、护理学和基础医学等各专业学生以及有关自学应试者。同时，也可供讲授医用高等数学课程的教师和有关人员参考。

《医用高等数学》是我国医科院校各专业重要的基础理论课。它不仅给学生传授知识，并为后续课程做好准备，而且作为医学数学教育的主要内容，它还提供一种科学的思维方式，对如何思考，如何用所学知识解决实际问题，开发潜在的能动性和创造性起关键作用。医学课程的特点是需要记忆的东西太多，容易钝化学生的抽象思维能力和应用意识。目前我国医科院校通常是在大学一年级第一学期开设高等数学课，其内容涵盖了理工科学生一年以上的课程内容，因而学时少，内容多，使学生学习起来往往不得要领。为使学生学好高等数学，以前也出版了许多好的辅导教材，但基本上是为理工科学生准备的。若能编写这样一本书，使之针对医科学生的特点，告诉学生应该掌握哪些内容，怎样正确理解和巩固加深所学的知识，并且用生物医学中的典型问题进行训练以培养学生的数学意识和应用数学解决实际问题的能力，无疑是大有裨益的。

基于上述要求，应《医学专业必修课考试辅导丛书》组委会之邀，北京大学医学部生物数学与生物统计学教研室同仁合作编写了这本书。本书以卫生部规划教材《医用高等数学》与北京大学医学部临床医学（五年制）等专业用教材《微积分初步与生物医学应用》作为配套教材。全书分为七章，包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数微积分学、常微分方程、概率论初步与线性代数初步等内容。各章分下列部分编写：

一、教学大纲要求：这一部分概括说明按教学大纲要求本章要学习的内容。它与我国教育部制定的硕士研究生入学考试《数学考试大纲》相适应。

二、教学内容精要：这一部分具体说明本章应掌握的知识。给出了基本概

念、定义、重要定理与常用公式,同时归纳总结出本章基本理论与方法之间的联系以及重点、难点与记忆方法。此外,还列举常用的中英文专业名词对照。

三、典型例题分析:根据教学大纲要求,选择了适当例题,通过分析示范,由浅入深,以解题方式体现教学内容的要求。例题包括概念题、计算题、证明题和应用题以及常见错误分析题,辅导学生正确理解和掌握基本概念、基本理论和基本方法,并通过生物医学中的实例,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力。

四、练习题:根据教学大纲要求,选择适量的、与例题内容和难度相当的习题,供学生复习、检查和巩固之用。

五、单元自测题:这一部分是针对各类考试要求安排的。所列题目是经过筛选的具有相应广度和深度的典型考题,选自北京大学医学部历年来的高等数学试题、研究生入学试题及教学过程中积累的题目。

六、答案:这一部分给出了上述练习题和单元自测题的答案或解题提示。

由于水平所限,本书一定会存在欠妥之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、教学大纲要求

1. 函数

函数的定义及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题中函数关系的建立。

2. 极限

数列极限的 ε-N 定义，函数极限的 ε-δ 定义和函数的左、右极限，无穷小，无穷大，无穷小的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限。

3. 连续

函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质。

二、教学内容精要

1. 函数的定义及表示法

如果对于数集 D 中的每一个 x 值，通过一个确定的对应规则 f 都有数集 R 中的一个确定的数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在 D 上的一个函数关系，称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$。x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，y 的取值范围 R 称为值域。

函数有三种常用的表示法：解析法、列表法和图像法。分段函数是解析法的一个重要的表示方法。

求函数的定义域时要考虑以下几点：

(1) 除去使被开偶次方的函数式为负数的那些 x 值；

(2) 除去分式中使分母为 0 的那些 x 值；

(3) 除去使对数的真数为负数或 0 的那些 x 值；

(4) 除去使三角函数正切角出现 $(k+\frac{1}{2})\pi$，余切角出现 $k\pi$（k 为整数）的那些 x 值；

(5) 考虑反三角函数的定义域：

$y = \arcsin x$ 的定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$；

$y = \arccos x$ 的定义域为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$；

$y = \arctan x$ 的定义域为 $-\infty < x < \infty$；

$y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域为 $-\infty < x < \infty$.

2. 函数的特性

函数的奇偶性：若函数 $f(x)$ 在其定义域内满足 $f(x) = f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若函数 $f(x)$ 在其定义域内满足 $f(x) = -f(-x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

函数的有界性：若存在一个正实数 M，使得函数 $f(x)$ 定义域内的任意 x，总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 为有界函数。有界函数的图形必在直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间的带形区域内。

函数的单调性：设函数 $f(x)$ 在某一区间内有定义。若在该区间内任取两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在该区间内是单调增加的；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在该区间内是单调减少的。单调增函数与单调减函数均称为单调函数。若函数在某区间内是单调的，则称该区间为这个函数的单调区间。

函数的周期性：对于函数 $y = f(x)$，若存在一个最小的正的常数 T，使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期。

3. 复合函数、隐函数和反函数

复合函数：若对于函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域内每一个 x 所对应的 u，都使得函数 $y = f(u)$ 有定义，则称 y 与 x 之间的关系为复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量。并非任意两个函数都可以构成一个复合函数。只有当中间变量的值域包含在另一个函数的定义域内时，两个函数才能构成复合函数。两个以上的函数可以经过多次复合构成一个函数。

隐函数：自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系是由方程 $F(x,y) = 0$ 来规

定的，对于 x 取定的每一个值代入方程后，可以解出对应的 y 值，这种由方程规定的函数关系称为隐函数。

反函数：给定函数 $f(x)$，若由 $y=f(x)$ 可确定函数 $x=\varphi(y)$，此时，称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数。在同一平面坐标系下，$y=f(x)$ 与其反函数 $x=\varphi(y)$ 表示的是同一条曲线。

4. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等五种函数称为基本初等函数。由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而构成的并且可以用一个解析式表达的函数，称为初等函数。

5. 曲线拟合与经验公式，直线拟合，曲线的直线化

曲线拟合与经验公式：科学实验中有时需要探求变量之间的函数关系。当变量 x 与 y 的实验数据 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 成对出现时，往往要为 xy 平面上的这些散点配置一条曲线来近似地反映 x 与 y 之间的函数关系，这项工作称为曲线拟合。此时，可将实验数据的散点图与一些典型的函数图形相对照，从中选出比较接近的一类曲线作为所研究问题的拟合曲线。通常的作法是，先根据散点图确定拟合曲线的类型，再用变量替换的方法将含有待定参数的曲线方程化为直线方程，而后用最小二乘法对经过同样变量替换的实验数据作直线拟合，由此确定待定参数，得到 x 与 y 之间的函数关系，这就是经验公式。

直线拟合：如果实验数据 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表明变量 x 与 y 呈线性关系，便可以取拟合直线方程为 $y=ax+b$，其中 $a=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，

$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i,b=\bar{y}-a\bar{x}$.

双曲线和双曲型饱和曲线的直线化：对于函数 $\dfrac{1}{y}=a\dfrac{1}{x}+b$，令 $Y=\dfrac{1}{y}$，$X=\dfrac{1}{x}$，则有 $Y=aX+b$。在以 X 为横轴，Y 为纵轴的直角坐标系中呈现的图形是斜率为 a，截距为 b 的一条直线。

指数函数曲线的直线化：对于指数函数 $y=Na^{kx}(N>0,1\neq a>0)$，令 $Y=\log_a y,X=x$，则有 $Y=kX+\log_a N$。在以 X 为横轴，Y 为纵轴的直角坐标系中的图形是斜率为 k，截距为 $\log_a N$ 的一条直线。

对数函数曲线的直线化：对于对数函数 $y = a\log_b x(b > 0, b \neq 1)$，令 $Y = y, X = \log_b x$，则有 $Y = aX$。在以 X 为横轴，Y 为纵轴的直角坐标系中的图形是斜率为 a，通过原点的一条直线。

幂函数曲线的直线化：对于幂函数 $y = ax^b(a > 0, b \neq 0)$，令 $Y = \ln y$，$X = \ln x$，则有 $Y = \ln a + bX$。在以 X 为横轴，Y 为纵轴的直角坐标系中的图形是斜率为 b，截距为 $\ln a$ 的一条直线。

6. 极限概念

数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义：设有数列 $\{x_n\}$，如果存在一个常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在自然数 N，使得只要 $n > N$，恒有 $|x_n - A| < \varepsilon$，则称此常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$。

函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有定义，如果存在一个常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称此常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，或称当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

函数极限的 $\varepsilon - M$ 定义：设有函数 $f(x)$，如果存在一个常数 A，对任意给定的正数 ε，总存在正数 M，使得只要 $|x| > M$，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称此常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于无穷大时的极限，或称当 x 趋于无穷大时函数 $f(x)$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$。

函数的左、右极限：当 x 小于 x_0（或 $+\infty$）而趋于 x_0（或 $+\infty$）时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0（或 $+\infty$）时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$）；当 x 大于 x_0（或 $-\infty$）而趋于 x_0（或 $-\infty$）时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0（或 $-\infty$）时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$）。

函数 $f(x)$ 极限存在的充要条件是 $f(x)$ 的左、右极限存在并且相等。

7. 无穷小与无穷大

如果 $\lim f(x) = 0$，则称函数 $f(x)$ 为在某一变化趋势下的无穷小。如果 $\lim f(x) = \infty$，则称函数 $f(x)$ 为在某一变化趋势下的无穷大。极限符号 lim 表示当自变量 x 在某一变化趋势下时取极限。

无穷大的倒数是无穷小，无穷小的倒数是无穷大。

当自变量 x 在某一变化趋势下，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限的充要条件

是 $f(x)$ 与 A 之差 $f(x)-A$ 为无穷小。

无穷小的性质：有限个无穷小的代数和仍为无穷小；有界函数与无穷小的乘积为无穷小；有限个无穷小的乘积仍为无穷小。

无穷小的比较：设在同一变化趋势下，α,β 均为无穷小。如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 为相对于 β 的高阶无穷小，称 β 为相对于 α 的低阶无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；如果 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=k(k\neq 0)$，则称 α 为 β 的同阶无穷小，记作 $\alpha=O(\beta)$；特别地，当 $k=1$ 时，称 α 为 β 的等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$。当 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，并且 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在时，无穷小代替公式成立，即 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

常用的等价无穷小：

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^{\alpha}\sim\alpha x$，$e^{x}-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}\sim\frac{x}{n}$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$。

8. 极限的四则运算

当自变量 x 在某一变化趋势下，如果 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都存在，则

(1) $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$，其中 $\lim g(x)\neq 0$。

9. 极限存在的两个准则

(1) 单调有界法则：单调有界数列必有极限。

(2) 两边夹定理：设有三个数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，如果对于任意的 n，都有 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$。

在函数极限情形下，上面两个法则也是成立的。

10. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$.

极限的概念和运算是微积分学的基础和重要工具，它是以无穷小的概念和运算为基础的。因而无穷小分析和求极限是非常重要的内容。常用的求极限的初等方法有等价无穷小代替法，两个重要极限法。尤其是在遇到形如 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，0^{0}，1^{∞}，∞^{0}，$\infty-\infty$，$0\cdot\infty$ 的极限问题时，可以先通过恒等变换（如通分，因

式分解，分子分母有理化，三角变形，代数变形，取对数等）或作变量代换，进行无穷小分析，再利用两个重要极限等已知结论进行求解。此外，连续函数在连续点的极限值等于该点的函数值，也是一个经常用到的结论。

11. 函数连续的概念

函数在一点连续的定义(1)：设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续。

函数在一点连续的定义(2)：设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 的某一邻域内有定义，记 $\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 连续。

函数在开区间内连续的定义：设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，或称 $f(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数。

函数在闭区间上连续的定义：设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续，并且在 $x = a$，$f(x)$ 右连续，在 $x = b$，$f(x)$ 左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，或称 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数。

连续函数的图形是一条连绵不断的曲线。连续函数在其定义域内求极限时可以用代入法，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。

基本初等函数在其定义区间内都是连续的。

12. 函数间断点的类型

使函数不连续的点叫做间断点。间断点 x_0 有三种情形：(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 无定义；(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，并且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。

第一类间断点：函数左、右极限都存在的间断点，包括(1) 跳跃间断点，即左、右极限存在但不相等的点；(2) 可去间断点，即左、右极限存在且相等但不等于函数值的点。

第二类间断点：非第一类的间断点。无穷型间断点属于第二类间断点。

13. 初等函数的连续性

连续函数的四则运算性质：如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 点连续，则它们的和、差、积、商（分母不为零）在 x_0 点也是连续的。

复合函数的连续性：如果函数 $y = f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 点连续，$u = \varphi(x)$ 在 x_0 点连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点也是连续的。

初等函数在其定义区间内都是连续的。

14. 闭区间上连续函数的性质

最大值最小值定理：在闭区间上连续的函数在这个区间上必有最大值和最小值。

介值定理：在闭区间上连续的函数必可达到介于函数最大值和最小值之间的任何一个值。

15. 小结

作为微积分学的基础知识，本章主要介绍了函数的定义、基本初等函数、函数的分解与复合、初等函数、无穷小分析、函数的极限与连续等基本内容。

为了描述客观世界中变量之间的依赖关系，人们抽象出来函数的概念。函数作为两个数集之间的一个对应关系，具有三要素：定义域、值域和对应关系。两个定义域不同的函数，即使对应关系相同，也不能认为是相同的函数。通常，函数有三种表示法：解析法、图像法和列表法，不同的表示方法各有优缺点。函数的几个特性：奇偶性、有界性、单调性和周期性直观上反映了函数的宏观特性。函数的复合运算是将复杂函数分解为简单函数的重要技巧。由基本初等函数经过四则运算和复合构造出来的初等函数是微积分学研究的主要对象，也是最简单实用的函数。以曲线的直线化和线性回归为基础的曲线拟合是生物医学研究的有用方法，该方法能从实验现象中寻求定量规律或经验公式。

以无穷小分析为核心的极限理论是微积分学的重要工具。严密的极限定义精辟地反映了自变量向某一点逼近时因变量变化的趋势，要联系其几何意义深入体会“$\varepsilon-\delta$”语言的动态含义。求极限要用到许多技巧；单调有界法则和两边夹定理是处理极限问题，包括导出两个重要极限的普遍方法；许多复杂极限问题要利用两个重要极限。本课程后续内容与极限问题密不可分，求极限一定要熟练。

函数的连续性是用极限为工具刻画的，连续性包括函数在一点的连续性和在整个区间的连续性。初等函数在其定义域内是连续的。连续函数在闭区间上有许多重要的性质，最主要的就是最大值最小值定理和介值定理。这些性质不仅可以用来求极限，用来判定方程的根的位置，而且在解决微分学和积分学基本问题时起关键作用。

16. 中英文名词对照

function	函数
interval	区间

open interval	开区间
closed interval	闭区间
constant quantity	常量
variable	变量
independent variable	自变量
dependent variable	因变量
domain of definition	定义域
range	值域
bounded function	有界函数
even function	偶函数
odd function	奇函数
monotone function	单调函数
periodic function	周期函数
periodicity	周期
power function	幂函数
exponential function	指数函数
logarithmic function	对数函数
trigonometric function	三角函数
inverse trigonometric function	反三角函数
sine function	正弦函数
tangent function	正切函数
cosine function	余弦函数
cotangent function	余切函数
inverse sine	反正弦
inverse cosine	反余弦
inverse tangent	反正切
inverse cotangent	反余切
fundamental elementary function	基本初等函数
intermediate variable	中间变量
piecewise function	分段函数
compound function	复合函数
implicit function	隐函数

explicit function	显函数
inverse function	反函数
polynomial	多项式
elementary function	初等函数
rational fraction	有理分式
rational function	有理函数
fitting a curve	曲线拟合
empirical formula	经验公式
slope	斜率
intercept	截距
sequence of number	数列
limit	极限
infinitesimal	无穷小
infinity	无穷大
continuity	连续性
continuous	连续的
discontinuity	不连续
discontinuous point	间断点
coordinate	坐标
coordinate axis	坐标轴
coordinate system	坐标系
real number	实数
origin	原点
distance	距离
increment	增量
absolute maximum	最大值
absolute minimum	最小值

三、典型例题分析

例 1　试求下列各函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{x^2-9}$；　(2)$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$；　(3)$y=\frac{1}{\lg(1-x)}$；

(4)$y=\tan(x-\pi)$；　(5)$y=\arcsin(2+3^x)$；　(6)$y=\arctan(x^3+x)$.

解　(1)当$x^2-9\geqslant 0$即$|x|\geqslant 3$时函数有定义，因此函数$y=\sqrt{x^2-9}$的定义域为$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$。

(2)当$x\geqslant 0$且$x\neq 2$时函数有定义，因此函数$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$的定义域为$[0,2)\cup(2,+\infty)$。

(3)当$1-x>0$且$1-x\neq 1$时函数有定义，因此函数$y=\frac{1}{\lg(1-x)}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)$。

(4)当$x-\pi\neq\pm\frac{k}{2}\pi$($k$为奇数)时函数有定义，因此函数$y=\tan(x-\pi)$的定义域为$x\neq\pm\frac{k}{2}\pi+\pi$($k$为奇数)。

(5)当$-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$时函数有定义，不等式$-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$无实数解，因此函数$y=\arcsin(2+3^x)$的定义域为空集。

(6)由于反正切函数的定义域为整个实轴，因此函数$y=\arctan(x^3+x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。

例2　设$f(t)=t^2+1$，求$f(2)$，$f(\tan t)$，$[f(t)]^2$。

解　$f(2)=2^2+1=5$；

$f(\tan t)=\tan^2 t+1=\sec^2 t$；

$[f(t)]^2=(t^2+1)^2=t^4+2t^2+1$.

例3　设$f(x)=x^2-3x+7$，求$f(x+\Delta x)$，$f(x+\Delta x)-f(x)$。

解　$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+7=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-3x-3\Delta x+7$.

$$\begin{aligned}f(x+\Delta x)-f(x)&=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-3x-3\Delta x+7-x^2+3x-7\\&=(2x+\Delta x-3)\cdot\Delta x.\end{aligned}$$

例4　设$f(x)=a^x$，试证明(1)$f(x)\cdot f(-x)=1$；(2)$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$。

解　(1)$f(x)\cdot f(-x)=a^x\cdot a^{-x}=a^{x-x}=a^0=1$；

(2)$f(x)\cdot f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$.

例5　设$\varphi(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$，试证明：$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(\frac{x+y}{1+xy})$。