高等学校教学用书

解析几何講义

JIEXI JIHE JIANGYI

天津大学数学教研室編

人民教育出版社

高等学校教学用书

解析几何講义

JIEXI JIHE JIANGYI

（内部发行）

天津大学数学教研室编

人民教育出版社

本书是在教学改革前由天津太学数学教研室编写的，系供高等工业学校机电类型专业与化工类型专业共同使用的解析几何教材。由于编写的时间較早，未能足够反映教学改革的精神和要求，暂作內部发行，希望使用本书的教师和学生对书中的內容和讲授方法多提改进意見，为将来编写供机电和化工专业用的更完善的高等数学教科书作好准备。

解析几何讲义

天津大学数学教研室编

人民教育出版社出版 高等学校教学用书编辑部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印书局印装　新华书店发行

统一书号 13010·809　开本 850×1168 1/32　印张 5'

字数 129,000　印数 0001—8,000　定价（6）¥0.55

1960年7月第1版　1960年 月北京第1次印刷

目　录

第一章　平面上的直角坐标

§1.1　引言

解析几何是因生产实践的需要而发展起来的。在十七世紀的前半叶，欧洲已开始向資本主义的生产方式过渡，由于生产技术的革新和商业的发展，就使得航海学、天文学、力学，也有了重大的发展，从而引起数学方法的根本变化，形成了数学的一些新的分支：解析几何学、微分学、积分学。

解析几何的內容是用代数的方法研究几何图形，在空間形状和数量关系之間建立起密切的联系。首先是使几何中的基本元素"点"与代数中的基本元素"数"建立联系，建立这种联系的基础是坐标法。坐标法的思想是在十七世紀初由数学家費尔馬和笛卡尔等明确提出的。1637年笛卡尔在他的文集"几何学"中，明晰而完备地闡述了坐标法的基本思想。坐标法的內容就是用数表示点的位置，正如我們用經度和緯度两个数来表示地球上各点的位置一样。在解析几何中，更重要的特征是以用运动的点来研究图形，將图形看成是动点的运动軌迹。在坐标法的基础上，动点必然联系着变量，图形必然联系着变量間的依从关系，这依从关系一般可用方程的形式来表示。这样就把几何中的图形与代数中的数和方程联系起来了，通过数的計算及方程的討論，便可以得出图形的性質及图形的关系。

§1.2　有向綫段·有向直綫

为了用数表示点的位置，首先要把几何量与数結合起来，如对

綫段的測量，对角度的測量等。在初等几何里，我們是不管直綫和綫段的方向的。用单位綫段測量已給綫段，总对应一个正数，卽它的长度；但在几何和力学中常要求考虑綫段的起点和終点，也就是要区分它的指向。譬如将一个綫段看成是动点运动时所沿的道路，那么交换了綫段的終点与起点，动点运动方向就与原方向相反。可見有必要研究有向綫段和有向直綫。

定义．规定了起点和終点的綫段，称为有向綫段。规定了正向的直綫称为有向直綫，也称为軸。

如果以 A 点为起点，B 点为終点的有向綫段用符号 $\overline{AB}$ 表示。这样，$\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 是方向相反的二有向綫段。

如果所考虑的有向綫段是在一个軸上，則有向綫段的方向与有向直綫的方向可以相同，也可以不同；方向相同时，称此有向綫段为正綫段，否則称为負綫段。如(图 1-1)中 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 与 $\overline{AC}$ 都是正綫段；$\overline{BA}$、$\overline{CB}$、$\overline{CA}$ 都是負綫段。

图 1-1

对有向綫段进行测量时，其长度不能反映指向。因此要描述軸上的有向綫段，还得引入綫段的数值这一概念。

定义．在一个軸上的有向綫段 $\overline{AB}$ 的数值是取該綫段的长度并附以正、負号，对正綫段附以正号，对負綫段附以負号。

有向綫段 $\overline{AB}$ 的长度用符号 $|AB|$ 表示，$\overline{AB}$ 的数值用 AB 表示。于是上述定义可表示为

图 1-2

$$AB=\begin{cases} |AB| & \text{当 } \overline{AB} \text{ 是正綫段时；} \\ -|AB| & \text{当 } \overline{AB} \text{ 是負綫段时。} \end{cases}$$

在(图 1-2)中，若已知 $|AB|=3$ 那么 $AB=3$，$BA=-3$。

由定义不难看出方向相反的有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 間有下列关系：

$$|AB|=|BA|.$$

而 $$AB=-BA,\ \text{即}\ AB+BA=0.$$

对于軸上任意三点 A, B, C 所联成的有向綫段的数值，有下面綫段的加法定理。

定理. 設 A, B, C 是軸上任意三点，則有向綫段 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ 的数值有下列关系：

$$AB+BC=AC.$$

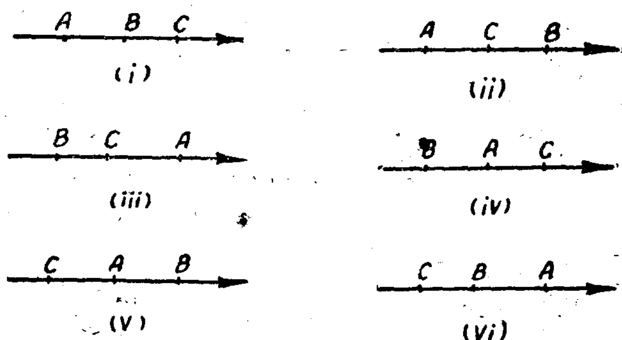


图 1-3

証: 点 A, B, C 在軸上的位置可以有六种不同的安排（如图 1-3），現在把它們分为两类进行討論：

1. 当 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 的方向相同时則 $\overline{AC}$ 的方向也和 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 的方向一致，因而有

$$|AC|=|AB|+|BC|.$$

1° 当它們是正綫段时，于是有：

$$AC=|AC|=|AB|+|BC|=AB+BC.$$

2° 当它們是負綫段时，于是有：

$$AC=-|AC|=-(|AB|+|BC|)=AB+BC.$$

2. 当 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的方向相反时，則 $\overline{AC}$ 的方向与 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中长度較大的那个綫段的方向相同；假設 $\overline{AB}$ 的长度較大，因而有

$$|AC| = |AB| - |BC|.$$

1° 当$\overline{AB}$是正綫段而$\overline{BC}$是負綫段时，于是$\overline{AC}$是正綫段，它的数值

$$AC = |AC| = |AB| - |BC| = AB + BC.$$

2° 当$\overline{AB}$是負綫段而$\overline{BC}$是正綫段时，于是$\overline{AC}$是負綫段，它的数值

$$AC = -|AC| = -|AB| + |BC| = AB + BC.$$

因此，无論在那种情形，定理的結論都能成立。証完。

这个定理可以推广。設$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，是軸上任意的$n$个点，則$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}$的数值必滿足下面等式：

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n.$$

§1.3 直綫上点的坐标

我們通过有向綫段的数值，就可以用数来表示直綫上点的位置。

首先在已給有向直綫上，任选一定点O称为原点，然后再取单位长度；于是直綫上任一点P，必对应有向綫段$\overline{OP}$的数值$OP = x$，反之，对任一实数x作一綫段OP，使x恰好为$\overline{OP}$的数值，因此得到对应点P。这样直綫上的每个点，都对应一个数，而每个数也都对应直綫上一个点，于是就得到直綫上的点与数的一一对应关系，这时用数就能表示出点在直綫上的位置，我們称这样的数x为点P的直綫坐标，用符号$P(x)$表示。此时称这条直綫为坐标軸或数軸。

当坐标軸的位置是水平的，且正向是自左向右时，显然原点O右侧的点的坐标是正数，原点O左侧的点的坐标是負数，原点O的坐标是零。

依上所述，利用点的坐标就能够便利地算出轴上任何有向綫段的数值。

設坐标軸上任意两点 P_1, P_2，它們的坐标分别是 x_1, x_2，则 $\overline{P_1P_2}$ 的数值等于 $\overline{P_1P_2}$ 的終点坐标减始点坐标。即：

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

証：按綫段数值的加法定理，得：

$$OP_1 + P_1P_2 = OP_2, \text{ 或 } P_1P_2 = OP_2 - OP_1.$$

但 $OP_1 = x_1$，$OP_2 = x_2$。所以得：

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

例。巳知直綫上三点 $A(5), B(-1), C(2)$，求 AB, BC, CA.

解：

$$AB = -1 - 5 = -6.$$
$$BC = 2 - (-1) = 3.$$
$$CA = 5 - 2 = 3.$$

§1.4 平面上点的直角坐标

在直綫上的点与数之間巳建立起一一对应关系的基础上，我們来討論如何用数表示平面上点的位置。这时用一个数是不能表达平面上点的位置的。例如，說“在教室中从右数第四个人”，只通过一个数 4，并不能确定这个人所在的位置，但当用两个数字来表达时，如說“在教室中第三排从右数第四个人”，这就可以十分确切地指出他所在的位置。由此看出表示平面上点的位置需要用两个数。現在将上述这种确定点的位置的方法抽象化，这就是点的直角坐标。

在平面上任选一定点 O，过点 O 作两条互相垂直的軸 Ox 与 Oy；常取 Ox 軸为水平位置指向右方，取 Oy 軸为垂直位置指向上方，并选定单位长度。

設平面上有任一点 M，将点 M 分别投影到 Ox 与 Oy 軸上，得点 P 与 Q。也就是过点 M 分别作 Ox 軸，Oy 軸的垂綫，P 与 Q 各是它們的垂足，在 Ox 軸上点 P 有坐标 x，在 Oy 軸上点 Q 有坐标 y，因此，点 M 对应一对数 x 和 y。反之，任給一对数 x 和 y，在 Ox 軸上作出以 x 为坐标的点 P，在 Oy 軸上作出以 y 为坐标的点 Q，以 P，Q 为垂足作垂直于 Ox 軸及 Oy 軸的直綫，得出它們的交点 M 如（图 1-4）。这样就建立了平面上任一点 M 与按先 x 后 y 的次序排列的数偶 (x, y) 間的一一对应关系。于是用这一数偶就能确定平面上点的位置。我們称这数偶 (x, y) 为点 M 的直角坐标，用符号 $M(x, y)$ 表示。这里的 x 称点 M 的横坐标，y 为点 M 的縱坐标。点 O 称为坐标原点，軸 Ox 与 Oy 称为坐标軸，其中 Ox 軸称为横軸，Oy 軸为縱軸。这样在平面上选定了原点，坐标軸及单位长度后，就說在平面上建立了笛卡儿坐标系。

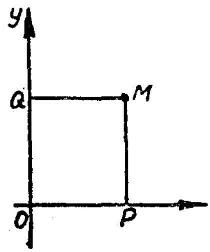


图 1-4

在平面上建立了坐标系后，对任一已知点可以求出它的坐标。反之，对給定的坐标能够画出它所对应的点。因此在解析几何里，点与坐标是不分的，也就是說当已知一点时，就意味着已知它的坐标，当求一点时就是求这点的坐标。

我們規定：凡是平行坐标軸的有向綫段都按坐标軸的方向来决定它們的符号。因此，在求点 M 的坐标，或由坐标画点时只画出折綫 OPM 或 OQM（如图 1-4）就可以了，而不需要作两条垂綫 PM 与 OM，因为

$$OP = QM = x,$$

$$OQ = PM = y.$$

通过折綫上各个綫段的数值可以定出坐标，或画出点。

平面上的全部点被坐标軸分成四个部分，各部分称为象限；四

个象限按一定的次序編号（如图 1-5），第一象限中一切点的坐标有 $x>0, y>0$，第Ⅱ象限中的点有 $x<0, y>0$，第Ⅲ象限中的点有 $x<0, y<0$，第Ⅳ象限中的点有 $x>0, y<0$；横軸 Ox 上的点的縱坐标 $y=0$，縱軸 Oy 上的点的横坐标 $x=0$，原点的坐标为 $(0,0)$。

利用点的坐标討論下面两个几何的基本問題。

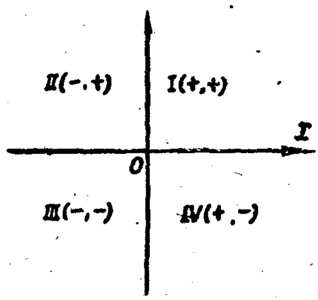


图 1-5

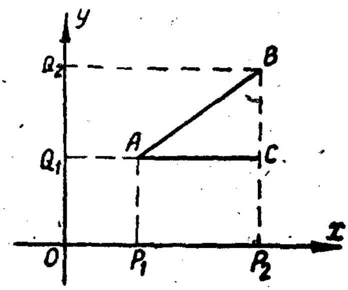


图 1-6

Ⅰ. 已知两点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，求两点間的距离 $d=|AB|$。

过 A, B 作横軸的垂綫，垂足分别为 P_1 及 P_2，再作縱軸垂綫，垂足分别为 Q_1 及 Q_2（图 1-6）

$$P_1P_2=x_2-x_1, \quad Q_1Q_2=y_2-y_1,$$

根据商高定理：

$$|\overline{AB}|^2=|AC|^2+|CB|^2.$$

但 $$AC=P_1P_2, \quad CB=Q_1Q_2,$$

因此 $$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

得 $$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.4-1}$$

例 1. 求两点 $A(-1,4)$ 和 $B(2,0)$ 的距离。

解: 由公式(1.4-1)得

$$d=\sqrt{[2-(-1)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+16}=5.$$

例 2. 求点 (x,y) 和坐标原点的距离。

解: 由公式(1.4-1)得

$$\alpha=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Ⅱ. 已知軸上两点 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$，在軸上求一点 M 使綫段 $\overline{AM}$ 与 $\overline{MB}$ 的数值之比为定值 λ，即 $\frac{AM}{MB}=\lambda$.

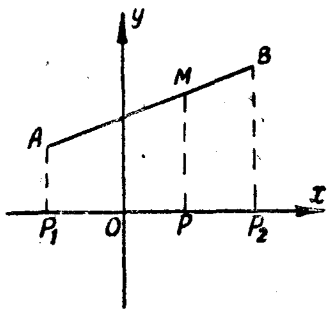


图 1-7

过点 A, M, B 分别作横軸的垂綫，設其垂足为 P_1, P 与 P_2(图 1-7)。由几何平行綫分割定理知

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}.$$

当 λ 为正数时，$\overline{AM}, \overline{MB}$ 是同方向的綫段，点 M 是 $\overline{AB}$ 的内分点。因此，点 P 也是 $\overline{P_1P_2}$ 的内分点，于是 $\overline{P_1P}, \overline{PP_2}$ 也是同方向的綫段，从而有

$$\frac{AM}{MB}=\frac{|AM|}{|MB|}, \quad 及 \frac{P_1P}{PP_2}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|},$$

即得

$$\frac{AM}{MB}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

当 λ 为負数时，$\overline{AM}, \overline{MB}$ 是反方向的綫段，点 M 是 $\overline{AB}$ 的外分点，而 P 也是 $\overline{P_1P_2}$ 的外分点，于是 $\overline{P_1P}, \overline{PP_2}$ 也是反方向綫段，从而有

$$\frac{AM}{MB}=-\frac{|AM|}{|MB|}, \quad 及 \frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|},$$

也得出

$$\frac{AM}{MB}=\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda.$$

$P_1P=x-x_1$，$PP_2=x_2-x$，代入得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

解出 x，得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}. \tag{1.4-2}$$

同理可推出

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.4-3}$$

例 1. 已知軸上的点 $A(1,2)$ 和点 $B(-4,1)$，求軸上一点 M，它使綫段 $\overline{AM}$ 与 $\overline{MB}$ 的数值之比为 $\frac{1}{2}$。

解：設点 M 的坐标为 (x,y)，由公式得

$$x=\frac{1+\frac{1}{2}(-4)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}, \quad y=\frac{2+\frac{1}{2}(1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}.$$

例 2. 求綫段 $\overline{AB}$ 的中点 $M(x,y)$。

解：因 $AM=MB$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，按公式(1.4-2)和(1.4-3)得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

习　題

1. 在軸上的有向綫段的数值何时取正值，何时取負值？
2. 直綫上点 P 的坐标是 x，問 x 是 $\overline{OP}$ 的长度还是它的数值？
3. 利用数軸上点的坐标，求有向綫段 $\overline{MN}$ 的数值：

   1° M 点的坐标为 -5，N 点的坐标为 -2。

   2° M 点的坐标为 -1，N 点的坐标为 2。
4. 在軸上有四点 A, B, C, D，証明 $AB+BC+CD=AD$。
5. 若点 M 和点 $A(1,2)$ 分别对于：(1) Ox 对称；(2) Oy 对称；(3) 原点对称；(4)第Ⅰ、第Ⅲ两象限的分角綫对称。求这些对称点的坐标。
6. 如上題所述若点 A 为 (a,b)，求点 M 的坐标。
7. 动点沿与 OX 軸平行的直綫移动，問这动点的坐标有什么特点？又如沿与 Oy 軸平行的直綫移动时，它的坐标有什么特点？

8. 求合于下列条件的点的位置:

 1° 横坐标为零的点;

 2° 横坐标为 2 的点;

 3° 纵坐标为 -3 的点;

 4° 纵横坐标相等的点?

9. 証明$(1,4)$, $(4,1)$, $(5,5)$为一等腰三角形的三个頂点。

10. 在 Ox 上求与点$(8,4)$的距离等于 5 的点。

11. 求点 $A(5,3)$到 Ox 軸、Oy 軸和原点的距离。

12. 将点$(1,-3)$与$(4,3)$的联綫三等分,求分点的坐标。

13. 三角形的三頂点为 $A(1,4)$, $B(3,-9)$, $C(-5,2)$, 求由点 B 所引出的中綫长。

14. 質量均匀的棒的端点为$(3,-5)$, $(-1,1)$, 求其重心及棒长。

15. 在 $A(-3,-1)$和 $B(4,6)$两点有两个平行作用力分别等于 30 和 40 千克,求合力在 AB 綫段上的作用点。

16. 三角形三頂点为(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 試証它的重心为

$$\mathrm{I}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\quad y=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3).$$

§1.5 二有向直綫的夹角

两条有向直綫所夹的角也和有向綫段一样,除了要考慮它的大小以外,还要考慮它的方向。

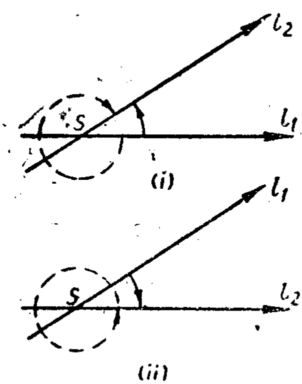


图 1-8

两条有向直綫 l_1 与 l_2 所夹的角,用記号 $(\widehat{l_1,l_2})$ 表示。我們規定它是由旋轉第一条綫 l_1, 使其正向与第二条綫 l_2 的正向重合时所扫出的角度;旋轉时可按逆时針与順时針两个相反的方向进行。为区別旋轉方向,于是規定角度的正負: l_1 按逆时針方向旋轉所扫出的角度是正的,按順时針方向旋轉所扫出的角度是負的(图1-8)。旋轉

l_1当其正向与l_2的正向初次重合后，再継續旋轉一个周角，又达到第二次重合，由此看出夹角$(\widehat{l_1,l_2})$有无限多个值，它們之間相差2π的倍数。习惯上我們常取絕对值最小的一个值，也就是取$(\widehat{l_1,l_2})$为$-\pi$到π之間的角。这时$(\widehat{l_1,l_2})$和$(\widehat{l_2,l_1})$是絕对值相同而符号相反的角。当l_1, l_2平行且方向相同时，夹角$(\widehat{l_1,l_2})$为0；平行而方向相反时夹角$(\widehat{l_1,l_2})$为π。

在高等数学里，測量角度的单位是用弧度。

§1.6 射影

建立点的直角坐标时曾应用过射影，因此通过坐标研究图形时，射影理論是个重要工具。

在中学已学过点到軸的射影，現在我們来講綫段在軸上的射影和折綫在軸上的射影。

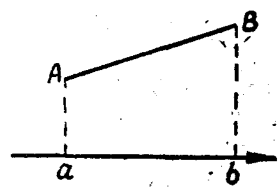


图 1-9

定义 1. 有向綫段$\overline{AB}$的端点A与B在軸l上的射影为点a与b(图 1-9)时，綫段$\overline{ab}$的数値ab，称为有向綫段$\overline{AB}$在軸l上的射影。用記号"射影$_l\,\overline{AB}$"表示。即：

$$\text{射影}_l\,\overline{AB}=ab.$$

应該注意，有向綫段在軸上的射影是一个数，这个数可正，可負，也可以是零，同时由定义不难看出

$$\text{射影}_l\,\overline{AB}=-\text{射影}_l\,\overline{BA}.$$

上面的l軸称为射影軸。

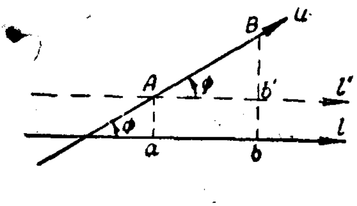
关于綫段在軸上的射影有下面重要的定理。

定理 1. 已知射影軸l与軸u的夹角为φ，則軸u上的有向綫段$\overline{AB}$在l軸上的射影等于$\overline{AB}$的数値与二軸夹角$(\widehat{l,u})=\varphi$的余

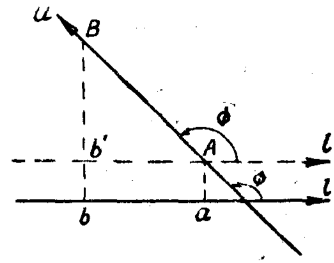
弦的乘积。即:

$$射影_l\,\overline{AB}=AB\cos(\widehat{l,u})=AB\cos\varphi.$$

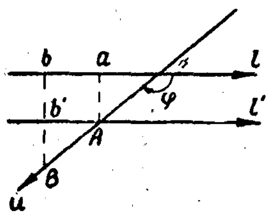
証: 当$\overline{AB}$与u的方向一致时,过点A作軸l'平行軸l且与l指向相同,于是$\overline{AB}$在l上的射影ab等于它在l'上的射影Ab'(如图 1-10)。



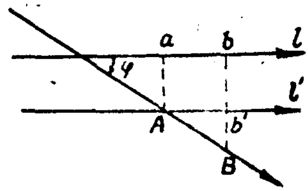
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

图 1-10

由任意角的三角函数的定义,显然有

$$\cos\varphi=\frac{Ab'}{|AB|}{}^{*}.$$

于是 $$射影_l\,\overline{AB}=ab=Ab'=|AB|\cos\varphi.$$

因$\overline{AB}$与u方向一致,$AB=|AB|$,所以

$$射影_l\,\overline{AB}=AB\cos\varphi.$$

当$\overline{AB}$与u方向相反,则$\overline{BA}$与u的方向一致,由前段所証知

* 当以A点为坐标原点,l'为横軸,点B的坐标为(x,y)时,根据角的余弦定义有:$\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$,其中$x=Ab'$,$r=|AB|$。