高等工程數學

（下册）

Advanced Mathematics for Engineers

原著者：Wilfred Kaplan

譯述者：劉柏宏　徐澧貽

科技圖書股份有限公司

高等工程數學

（下 册）

Advanced Mathematics for Engineers

原著者：Wilfred Kaplan

譯述者：劉柏宏　徐澧貽

科技圖書股份有限公司

本書各部分均將電算器列入考慮，作為使用電算器求解各種工程數學方法的重點。並列有專章討論數值分數與最新發展的有限元素法而為其他高等工程數學所未及錄入者，此為本書的特點。Kaplan 教授著作頗多，此為其最近出版的大作，特譯介如上。

本公司經新聞局核准登記
登記證局版台業字第1123號

書　　名：高等工程數學（下册）
原 著 者：Wifred Kaplan
譯 述 者：劉柏宏　徐澧貽
發 行 人：趙　國　華
發 行 者：科技圖書股份有限公司
台北市復興南路一段360號7樓之三
電　話：7073230・7056781
郵政劃撥帳號 15697

七十二年十一月初版　　特價新台幣190元

原序

本書係供研修工程同學在修完微積分後，繼續研習數學之用。其內容以工程方面的應用為主，列有為數頗多的實際示例。

近年來由於電算器的突飛猛進，對數學在應用方面所扮演的角色，已有了重大改變。以往認為難予解答諸問題，現可採用準備妥當的電算器程式，經常獲得解答而成為例行作業。有人會輕易的加上結論，認為以後就不需太多的數學理論，其實不然。在應用電算器時，如果未能眞正瞭解數學，對問題很易導致一個毫無意義的解答。因此，把握住實切的數學觀念，更是迫切需要。

本書在各部分均將電算器列入考慮，用電算器求解的各種數學方法，作為本書的重點。更進一層，本書列有專章（第十三章），專論數值分析。最近研究所得有關這方面的新工具，如Romberg積分與快速Fourier 變換式等，均作詳盡的考慮。有關有限元素法的介紹，亦用專章予以討論（第十四章）。

鑒於各個主題內容性質有所不同，作者尋得一種方式，使基本上各章可各自獨立。如此，可不依順序對各章分別予以考慮。

微分方程為本書的中心課題。的確，首先八章形成該主題的一項課程。第一章包括常微分方程的基本觀念。第二章專論無窮級數，章末附有用冪級數求解微分方程式的方法。第三章為根據 Fourier 級數而得的同一目標。第四章也具同一目標，但其方法則以 Laplace 與 Fourier 變換為主。第五章為矩陣與基本線性代數，第六章採用線性代數處理聯立線性微分方程式，第七章的本身，係用來處理非線性微分方程式的。第八章專論偏微分方程式。

這八章的內容，係供僅具初等微積分的知識即可研讀而撰寫的。其中也包含些偏導數，但更高等的微積分論述，諸如鏈鎖法則（chain rule）與線積分（ line integrals）等，則置於第九章與第十章。如此

，有關熱量方程式、波動方程式、以及與此類似的方程式等的推導，可容在第十章論述。依第八章（偏微分方程式）的目的而言，是採用個別方式以誘導此等方程式。此種方式應能使讀者對其包含的內容，有一良好的實質瞭解，並且能促進對一般應用數值計算法的瞭解。第十一章包含複變數函數的基本理論，及其若干應用。第十二章採用這些理論對特殊函數作扼要的介紹。

第十三與十四章分別專章討論數值計算法與有限元素法。第十五章，也是最後一章是對機率與統計作扼要介紹。

下列係按五學分授課對本書分段的一例：

1. 常微分方程式、無窮級數、Fourier 級數、Laplace變換式（一至四章）。
2. 矩陣、聯立線性微分方程式、非線性微分方程式（五至七章）。
3. 偏微分方程式與向量微積分（八至十章，或按九、十、八的順序）。
4. 複變數，保形映像，線數（十一章）。
5. 特殊函數、數值分析（十二至十四章）。

全書附入頗多習題。書末附有部分習題的答案；所有已附答案的習題均用粗體字編號刊出。

本書各章節中，分別指出參考圖書的出處，以供讀者對該主題作更詳盡的研究用。在本書中屢被提到的參考圖目則用縮寫字或簡短標題標出，與所附參考書目錄情形一致。

在某些章節中（尤其是第五章與第十一章），作者曾從其以往的著述中錄入若干資料。

作者對 Addison-Wesley 圖書公司與其同仁的密切合作以及許多同僚的指教，D. A. Lentz 與 M. D. Spickenagel 對於手稿的打字，均致由衷的感謝。

關於本書整個的校訂，作者對下列諸先生表示由衷的謝意。Jame Dowdy（西維吉尼亞大學）、William J. Firey（俄勒岡州立大學）、Robert Kadlec（密西根大學）、Ronald J. Lomax（密西根大學）

、David O. Lomen（亞利桑拉大學）、Francis C. Moon（康乃爾大學）、William L. Perry（德州農礦大學）Stephen M. Pollock（密西根大學）、David A. Sanchez（新墨西哥大學）、Klaus Schmitt（猶他大學）、David F. Ullrich（北卡羅來納州立大學）、Michael Williams（維吉尼亞工藝學院與州立大學）等。

密西根大學

W Kaplan 凱布侖

目　錄

原　序

第九章　向量微分

9.1　導　　言 …… 1

9.2　三維空間中之向量 …… 2

9.3　一變數向量函數之微積分 …… 6

9.4　二變數函數，偏導數，微分 …… 12

9.5　擴充至三個或更多變數之函數 …… 21

9.6　方向導數與斜率向量 …… 27

9.7　沿着路線之方向導數；法線導數 …… 30

9.8　力場中顆粒運動之能量不滅定律 …… 33

9.9　極大與極小 …… 37

9.10　函數與映像，線型化，Jacobian 矩陣，Jacobian 行列式 …… 45

9.11　參數代表之曲面 …… 53

9.12　映像之鏈鎖法則 …… 57

9.13　隱函數 …… 60

9.14　階層曲線與階層面 …… 66

9.15　反函數 …… 68

9.16　合成函數之高階導數 …… 74

9.17　極座標，球面座標，柱面座標中之調和量算符 …… 76

9.18　隱函數之高階導數 …… 78

第十章　向量積分

10.1　導　　言 …… 82

10.2　多重積分 …… 83

10.3 積分之 Leibnitz 法則 …… 91
10.4 多重積分中變數之改變 …… 98
10.5 平面中之線積分 …… 104
10.6 Green 定理 …… 106
10.7 向量場之散度，平面中之散度定理 …… 119
10.8 向量場之旋度，平面中之 Stoke 定理 …… 122
10.9 路線之獨立性，單連通敞開區域 …… 128
10.10 對熱力學之應用 …… 137
10.11 空間中之線積分 …… 143
10.12 空間曲面，曲面面積，可定向性 …… 144
10.13 面積分 …… 149
10.14 Guass 定理－三維空間中向量場之散度 …… 156
10.15 Stoke 定理－空間向量場之旋量 …… 160
10.16 向量恒等式 …… 165
10.17 路線獨立之積分－無旋轉場與螺旋管場 …… 172
10.18 物理方面之應用：流體，熱傳導，振動膜 …… 176
10.19 物理上更多之應用：電磁學 …… 182

第十一章 複變數之分析函數

11.1 複數系統 …… 189
11.2 實變數之複數值函數 …… 190
11.3 複變數之複數值函數－極限與連續性 …… 192
11.4 導數與微分 …… 196
11.5 積　分 …… 198
11.6 分析函數，Cauchy-Riemann 方程式 …… 203
11.7 函數 $\ln z$，a^z，z^a，$\sin^{-1}z$，$\cos^{-1}z$ …… 210
11.8 分析函數之積分－Cauchy 積分定理 …… 214
11.9 Cauchy 積分公式 …… 219
11.10 分析函數之冪級數 …… 222
11.11 一般分析函數之冪級數展開 …… 226

11.12 正與負乘方之冪級數；Laurent 展開式……232
11.13 一分析函數之孤立奇異點－零與極……235
11.14 複數∞……239
11.15 殘 數……244
11.16 位於無窮大之殘數……249
11.17 對數殘數；輻角原理……252
11.18 有理函數之部分分數展開式……254
11.19 以殘數應用於計算實數積分……258
11.20 以殘數應用於 Fourier 反變換式……265
11.21 分析函數之 Laplace 變換式……269
11.22 Nyguist 準則……273
11.23 多值分析函數、分析開拓、Riemann 面……280
11.24 包含多值函數之殘數……286
11.25 保形映像……293
11.26 保形映像舉例……296
11.27 保形映像之應用，Dirichlet 問題……305
11.28 半平面用之 Dirichlet 問題……307
11.29 流體動力學中之保形映像……315
11.30 彈性理論中保形映像之應用……319
11.31 保形映像之更進一層的應用……321

第十二章 特殊函數

12.1 本章目標……324
12.2 二階線性微分方程式……325
12.3 Gamma 函數……328
12.4 Beta 函數……333
12.5 正交多項式……335
12.6 正交多項式用之遞推公式……338
12.7 正交多項式之其他特性……339
12.8 正交多項式用之微分方程式……343

12.9 Legendre 連帶函數 …… 347
12.10 球面調和 …… 348
12.11 Bessel 函數 …… 355
12.12 Hankel 函數，漸近級數 …… 360
12.13 超幾何函數 …… 365

第十三章 數值分析

13.1 導　言 …… 367
13.2 聯立線性方程式解 …… 368
13.3 代數方程式之解 …… 375
13.4 Muller 法 …… 382
13.5 求特徵值與特徵向量 …… 385
13.6 以多項式作內插法 …… 391
13.7 以多項式求近似值 …… 399
13.8 以多項式作均勻近似式 …… 406
13.9 Fourier 法 …… 413
13.10 Fourier 法：複數值公式 …… 417
13.11 快速 Fourier 變換 …… 422
13.12 數值微分法 …… 429
13.13 數值積分 …… 433
13.14 常微分方程式之初值問題 …… 442
13.15 常微分方程式之邊界值問題 …… 450
13.16 偏微分方程式用之數值計算法——橢圓方程式 …… 458
13.17 拋物線方程式 …… 466
13.18 雙曲線方程式 …… 468

第十四章 有限元素法

14.1 主題之總觀 …… 473
14.2 加權殘數；Galerkin 法 …… 474
14.3 換部積分角色 …… 479

14.4 二維與三維中之換部積分 …… 483
14.5 若干重要問題 …… 487
14.6 Dirichlet 問題（變分法舉例）…… 489
14.7 一維有限元素 …… 494
14.8 二維問題 …… 500
14.9 二維高次近似法 …… 507
14.10 參考圖書 …… 512

第十五章 機率與統計

15.1 導　言 …… 513
15.2 有限樣本空間之機率 …… 513
15.3 條件機率 …… 517
15.4 排列與組合 …… 521
15.5 無窮大樣本空間之機率 …… 524
15.6 隨機變數 …… 528
15.7 隨機變數之函數 …… 535
15.8 力矩母函數 …… 539
15.9 二項分佈與 Poisson 分佈 …… 542
15.10 常態分佈 …… 545
15.11 數個隨機變數之連合分佈 …… 548
15.12 數個隨機變數之函數 …… 556
15.13 中心極限定理 …… 560
15.14 參數概估 …… 566

部分習題解答 …… 575

第九章　向量微分

9.1 導　言

微積分可應用於一維的最簡單情形。例如，就一顆粒沿着一直綫移動的情形而論，其第一導數可被解釋爲速度，第二導數爲加速度。假如一顆粒承受着一個隨位置 x 變動的力（如引力情形），於是力的本身可描述成以 x 所成的單純函數。同時，當顆粒自 x_1 移到 x_2 ，力所作的功，可得自函數由 x_1 到 x_2 的積分。

在本章中，微積分將擴充到二維到三維空間，並擴充到 n 維空間 R_n 的一般情形。此處，向量觀念乃形成中心角色。由數個變數作成的單純函數可求得第一偏導數，並因而得到一個向量場（ vector field ），又名爲梯度場（ gradient field ），其對所考慮的空間中某區域內各點，指定一個向量（圖 9.1 ）。許多物理問題中，所包含的力，係隨空間位置變化，使用梯度場加以描述。

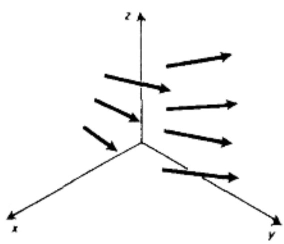

圖9.1　空間的向量場

向量微積分（ vector calculus ）中所發生的最簡單情形爲，所有函數均爲綫性情形。微分的主要成就是設置以綫性方式，概估一般函

數的一個有系統方法。此種處理過程，對作成各種物理定律頗爲重要。本章將不時予以指出，並加強調。一旦問題經過綫性化後，僅有的問題是如何用綫性代數來處理，如此，便可應用第五章所述的諸法。

9.2 三維空間中之向量

此處將扼要複習點積（dot product），叉積（cross product），以及與三維空間相關的幾何。下一節將複習一個變數的諸向量函數。大多數觀念與結果，均可予以一般化擴充至 n 維空間。

茲假設採用一般常用的直角座標系統，其中原點爲 O，座標值爲（x，y，z），以及相應的基底向量爲 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$，其形如圖 9.2 所示。爲求簡化，假設採用右手座標系統，此即 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 的可能方向爲右手的拇指、食指、與中指，其形如圖所示。

點 P（x，y，z）具有位置向量（position vector）$\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，向量 $\mathbf{r}$ 的量值爲 $\|\mathbf{r}\|$，或 $|\mathbf{r}|$：

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{9-20}$$

其中 r 爲自 O 到 P 的距離。此處 x，y，z 爲 $\mathbf{r}$（分別對所選取的基底）的分量。一般情形，向量 $\mathbf{v}$ 對這些基底的分量分別爲 v_x，v_y，v_z，同時 $\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$。特殊情形中，自點 P_1（x_1，y_1，z_1）到點 P_2（x_2，y_2，z_2）的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 等於 $\overrightarrow{OP}_2-\overrightarrow{OP}_1$，因之其

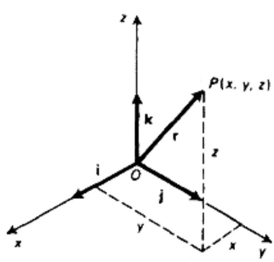

圖 9.2　空間的向量

所具的分量爲 $x_2 - x_1$ ，$y_2 - y_1$ ，$z_2 - z_1$ 。如第五章所述，可寫得 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$，並視何者爲方便，將其作爲行向量（ row vector ）或列向量（ column vector ）來處理。

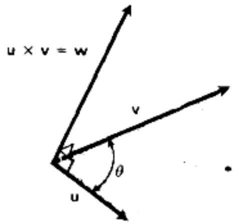

圖 9.3　點積與叉積

兩向量 u 、v 的點積（內積，純量積（ scalar product)，如圖（ 9-3 ）

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta. \tag{9-21}$$

其中，θ 爲 u 與 v 間的夾角 θ （ $0 \leq \theta \leq \pi$ ）。假如 u 或 v 爲 $\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ，則夾角不能確定，根據定義，在此情形中的 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ 。其一般法則爲：

唯有 u，v 相互垂直，才能 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ 。

此處的 0 向量被認爲是垂直於（並平行於）所有向量。

式（ 9-21)中的因子 $|\mathbf{v}|\cos\theta$ ，可解釋成 v 在 u 方向中的分量寫爲，$\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ ，如此得：

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,\text{comp}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}. \tag{9-21'}$$

u 與 v 的叉積〔向量積（ vector product ）〕，係用 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 表示，爲一向量 $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 而使：

$$\begin{cases} |\mathbf{w}| = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\sin\theta, \\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\ \text{形成一正值三元組} \end{cases} \tag{9-22}$$

（見圖 9-3 ）。此處的 u ，v ，w ，如按已知順序，可概略的決定一個右手座標系統，則（按其順序）可形成一個正值三元組（ positive triple）；更精確的說法是：若按已知順序排列的 **u**，**v**，**w**，可將 **i**，**j**，**k** 的長度與方向作連續的改變而求得，但不可使其中向量之一，縮小爲 **0**，或使各向量同在一平面上（綫性相關），則 **u**，**v**，**w** 可形成一個正值三元組。假如 **u**，**v**，**w** 形成一個正值三元組，則 **w**，**u**，**v** 與 **v**，**w**，**u** 也是一樣爲正值三元組；但 **u**，**w**，**v** 三元，**w**，**v**，**u** 三元，與 **v**，**u**，**w** 三元統稱爲負三元。空間中每一組綫性獨立向量依序的三元，不是正值，便是負值，不能兩者兼備。

假如 **u** 或 **v** 爲 **0**，或是 $\theta = 0$ 或 π，則定義式（9-22）不能成立。所有此種情形均置 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$，於是得其法則是：

唯有 **u**，**v** 爲相互平行，才能 $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

同時，如圖 9.3 所示：

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ = 由兩邊爲 **u**，**v** 所組成的平行四邊形面積。

點積與叉積，遵循一系列的代數法則：

$$
\begin{gathered}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}), \\
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}, \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2, \\
\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\mathbf{v}\times\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u}\times(c\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\times\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \\
\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}, \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}.
\end{gathered}
\tag{9-23}
$$

此處 c 爲一數值（純量）。

點積及叉積與 **u** 及 **v** 的各分量間的關係如下式：

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z, \\
u_x = \mathbf{u}\cdot\mathbf{i}, \qquad u_y = \mathbf{u}\cdot\mathbf{j}, \qquad u_z = \mathbf{u}\cdot\mathbf{k}, \\
\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\mathbf{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\mathbf{k} \\
\qquad = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}
\end{cases}
\tag{9-24}
$$

此處的行列式可按第一行 row 的子式展開（見 5.2 節）。

若 $|\mathbf{u}| = 1$，則向量 **u** 稱爲單位向量（unit vector）。此種向

量的分量為方向餘弦（ direction　cosine ），亦即；$u_x = \cos\alpha$，$u_y = \cos\beta$，$u_z = \cos\gamma$，其中 $\alpha = ∢(\mathbf{u}, \mathbf{i})$，其餘類推（見下文中習題 3 ）。

u，**v**，**w** 的純量三元積（ scalar triple product ）（按其順序）為 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$（此處毋須括弧，因為 $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ 並無意義）。所遵循的法則為：

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \mathbf{w}\times\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\times\mathbf{v} \\
\qquad = \mathbf{v}\times\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\quad\mathbf{w}\times\mathbf{u} \\
\qquad = -\mathbf{u}\times\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{v}, \text{etc.,} \\
\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\
\mathbf{u}\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \text{以 u，v，w 為稜邊的平行六面體體積}
\end{cases}
\tag{9-25}
$$

最後一項法則的情形如圖 9.4 所示。＋或－符號的採用，視 **u**，**v**，**w**（按其順序）是否形成正或負三元而定；當其為綫性相關，則行列式等於零（ 5.9 節）。

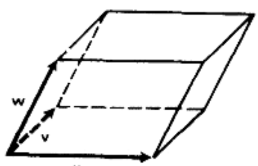

圖 9.4　純量三元積與體積

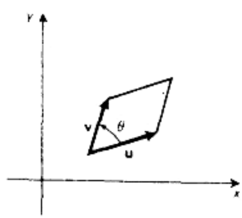

圖 9.5　行列式與面積

法則式 (9-25)指出，三階行列式可解釋成係一體積（要加上 ± 符號）。用同樣方式，亦可證明二階行列式：

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

等於 xy 平面中，以 $\mathbf{u}=u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}$ ，$\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y$ 爲積邊的平行四邊形的（±）面積，其形如圖 9.5 所示。（+）符號，用於自 **u** 到 **v** 的方向夾角 θ ，係位於 0 與 π 間的情形，（－）符號則用於 $\pi<\theta<2\pi$ 的情形。第一種情形中 **u**，**v** 形成正值的一對（positive pair）（如同 **i**，**j** 的情形）；第二種情形，形成負值的一對（negative pair）（如同 **j**，**i** 的情形）。當 **u**，**v** 爲綫性相關時，其行列式爲 0。

對任意 n 階行列式其中亦具有一個類似的法則。假如 $A=(a_{ij})$ 爲一 $n\times n$ 矩陣，則 det A 等於稜邊爲 A 中的行向量，在 R^n 中，n 維超平行體（n-dimensional parallelotope）的（+）或（－）體積。當此等向量形成正交系統（3.11 節與 5.16 節）時，則具有一個矩形超平行體（rectangular parallelotope），其體積等於 n 個行向量長的乘積。

u，**v**，**w** 的向量三元積係用（**u** × **v**）× **w** 與 **u** ×（**v** × **w**）表示。此處需要括弧。其法則爲：

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}.$$

此情形可概括如下：

三元積＝（外側向量、點、較遠向量）鄰近向量－（外側向量、點、鄰近向量）較遠向量。

9.3 單一變數向量函數之微積分

茲考慮向量函數 $\mathbf{r}=\mathbf{F}(t)$，其中 **r** 爲 R^3 中的一個向量，同時，t 在某區間會發生變動。假如用 $\overrightarrow{OP}$ 代表 **r**，其形如圖 9.2 所示，P