SHUXUE

数学

三角·第一册

青年自学丛书

四川人民出版社

数 学

青年自学丛书

数学

三角·第一册

主　　编　成都市教育局
编写单位　成都市西北中学
　　　　　成都市第八中学
　　　　　成都市第十三中学
执　　笔　余绍维　黎　明　周泰金

青年自学丛书
数　学
三角·第一册
四川人民出版社出版
（成都盐道街三号）
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆印制第一厂印刷
开本 787×1092 毫米1/32 印张9.5 字数207千
1978年4月第1版　1978年8月第1次印刷
书号：13118·7　定价：0.60元

前　言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”．这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召．这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤．

青年是我们的希望，是我们的未来．为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学、在校中学生课外阅读和中学教师参考．

这套“青年自学丛书”的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册．考虑到这套丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂．同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识．要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度．

这是“青年自学丛书”《数学》的《三角》读本，讲了三角函数的性质、三角函数式的恒等变形、三角方程以及解三角形等方面的内容，编成两册．

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持．四川师范学院数学系协助了丛书《数学》读本的审稿工作，在此，我们谨致谢意．

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误．鉴于当前迫切需要，先以“试用本”出版，广泛听取意见．我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订．

编　者

一九七八年三月

目　　录

第一章　三　角　函　数

三角函数性质的研究是三角学的主要内容之一，它不仅是三角学科本身的基础，同时也是进一步学习高等数学的基础，如解析几何、微积分等都需要三角函数的基础，物理学也广泛地用到三角函数，如力的合成分解、弹道曲线、光的反射和折射，波、磁、电学的研究等等都需要三角函数作为工具．在这一章里，我们将学习有关任意角的三角函数的一些基本知识．学好这部分知识，对于三角学习具有十分重要的作用．

第一节　弧　度　制

1．弧度制

在本丛书的几何部分，我们已经学过角的一种度量制度——角度制．就是在一个圆中，把等于整个圆周$\frac{1}{360}$的弧所对的圆心角，叫做1度的角，而1度的圆心角所对的弧叫做1度的弧．用度作单位来度量弧与角的制度叫做角度制．在角度制里，1度等于60分，记成$1^\circ=60'$；1分等于60秒，记成$1'=60''$．度、分、秒之间是60进位制，因此，角度制也叫做六十分制．

在三角学习以及高等数学、物理学等其它学科的学习中，角的大小除采用“度”作为度量单位外，还常常采用

"弧度"作为角的度量单位.

在一个圆中，把等于半径长的弧，叫做 1 弧度的弧，而 1 弧度的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角. 在图 1—1 里，如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 R，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 就是 1 弧度的弧，$\angle AOB$ 就是 1 弧度的角. 这种用弧度做单位来度量弧与角的制度叫做弧度制. 弧度也叫做弪，所以弧度制也叫做弪制.

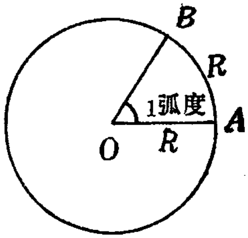

图 1—1

也就是说，一个角的弧度数，就是它所对的弧长与半径长的比. 例如，在图1—2里，如果 $\angle AOB=2$ 弧度，就是说，$\angle AOB$ 所对的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 R 长度的 2 倍. 一般地说，当圆心角所对的弧长等于半径 R 的 α 倍时，这个圆心角就是 α 弧度的角. 角的单位是弧度时，"弧度"二字通常可以略去不写. 例如 $\angle AOB=2$ 弧度(弪)，可以写成 $\angle AOB=2$；又如 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 弧度，可以写成 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 等等. 但角的单位是度时，度的符号"°"就不能省略，如 30° 就不可以写成 30.

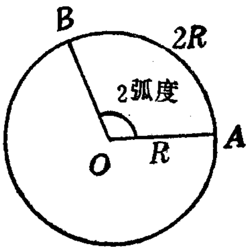

图 1—2

正如我们要量一条线段的长度，有时用"米"作单位，有时用"尺"作单位一样，角度制与弧度制只是弧与角的两种不同的度量制度，在原则上并没有什么不同. 角度制是以"度"作度量单位，而弧度制是以"弧度"作度量单位，如

同米与尺可以互换一样，度与弧度两者也是可以互换的.

2. 度与弧度的互换

因为半径为 R 的圆周长是 $2\pi R$，它所对的圆心角是一个周角，所以一个周角（即 360°）的弧度数是 $\dfrac{2\pi R}{R}=2\pi$，也就是 $360^\circ=2\pi$ 弧度. 因此我们便得到

$$180^\circ=\pi\text{弧度}$$

亦即 $180\cdot1^\circ=\pi$ 弧度，

$\pi\cdot1$ 弧度 $=180^\circ$.

所以 $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 ≈0.01745 弧度，

$$1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx57\cdot296^\circ=57^\circ17'45''.$$

这样，我们就可以将任何一个角（或弧）的度数与弧度数相互转化.

下面所列出来的是几个常用的特殊角的度数和弧度数的对应值，应当熟记.

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧　度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例 1　把 $22^\circ30'$、$108^\circ48'$ 化成弧度（轻）.

解：　$22^\circ30'=22\dfrac{1^\circ}{2}=\dfrac{\pi}{180}\times22\dfrac{1}{2}=\dfrac{45\pi}{360}$

$=\dfrac{\pi}{8}$（弧度）；

$$108°48' = 108\frac{4}{5}° = \frac{\pi}{180} \times 108\frac{4}{5} = \frac{544\pi}{900}$$

$$= \frac{136\pi}{225}\ (弧度).$$

如果需要求得这个弧度数的近似值，例如精确到 0.001，我们可以这样来做：

$22°30' \approx 0.01745$ 弧度 $\times 22.5 \approx 0.393$ 弧度.

例 2 把 $\frac{4\pi}{5}$ 弧度、2.4 弧度化成度.

解： $\frac{4\pi}{5}$ 弧度 $= \frac{180°}{\pi} \times \frac{4\pi}{5} = 144°$；

2.4 弧度 $\approx 57.296° \times 2.4 \approx 137.5°$.

3. 圆心角、半径和弧长之间的关系

如果用 l 表示弧长，R 表示圆的半径，α 表示这段弧所对的圆心角的弧度数，那么，根据前面我们所讲的一个角的弧度数的意义，就有：

$$\alpha = \frac{l}{R}$$

即，圆心角的弧度数等于弧长除以半径的长.

显然，在一个半径为 R 的圆中，已知圆心角的弧度数为 α，则它所对的弧长为：

$$l = R\alpha$$

即，弧长等于半径的长乘以圆心角的弧度数.

我们还可以得到：

$$R = \frac{l}{\alpha}$$

即，半径的长等于弧长除以圆心角的弧度数.

这里必须注意，在这组公式中，圆心角 α 的大小是用“弧度”数，而不是用“度”数来表示的。在使用这组公式时，如果所给的圆心角是以“度”为单位，必须先把它化成“弧度”为单位，再进行计算.

例 3 已知圆的半径是 5 厘米，试求 18° 的弧长.

解： $\because \quad 18^\circ=\dfrac{\pi}{10}$ 弧度，

根据弧长公式得

$$l=R\alpha=5\times\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\approx1.57\ (\text{厘米})$$

答： 这段弧长约为 1.57 厘米.

例 4 已知半径是 15cm 的圆上，一条弧长为 6 cm，求这条弧所对的圆心角的度数.

解： $$\alpha=\frac{l}{R}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}\ (\text{弧度})$$

$$\therefore \quad \frac{2}{5}\text{弧度}\approx\frac{2}{5}\times57.29^\circ\approx22.91^\circ=22^\circ54'36''.$$

答： 这条弧所对的圆心角约是 $22^\circ54'36''$.

例 5 求半径是 R，圆心角是 α 弧度的扇形面积.

解： 如图 1—3，$\angle AOB=\alpha$，$OA=R$，

$\because$ 圆面积为 πR^2，一周角为 2π 弧度.

$\therefore$ 1 弧度的扇形面积是

$$\frac{\pi R^2}{2\pi},$$

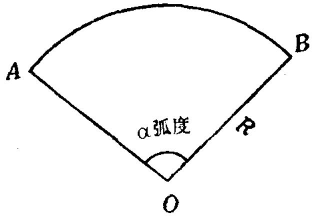

图 1—3

因此，圆心角为 α 弧度的扇形面积为

$$S=\alpha\cdot\frac{\pi R^2}{2\pi}=\frac{1}{2}\alpha R^2$$

由此可见，它比在角度制下的扇形面积公式

$$S=n\cdot\frac{\pi R^2}{360}$$

优越得多，这是因为在弧度制下的扇形面积公式采取了三角形面积公式的形式：

$$S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}(\alpha R)\cdot R$$

$$=\frac{1}{2}\times\text{圆弧长（底）}\times\text{半径（高）}$$

这里，底就是圆弧，高就是半径（因为过切点的半径与切线垂直，我们可视为半径与圆弧垂直），这就与三角形面积公式统一起来了，记忆起来十分方便.

练　　习

1. 在角的角度制和弧度制中，各用怎样大小的角作单位？这两种单位之间有什么联系？

2. 用弧度制表示下列各角（写成多少π的形式）：

（1）15°，　18°，　120°，　135°，　150°；

（2）5°，　23°20′，　50°，　67°30′，　300°，　n°.

3. 用角度制表示下列各角：

（1）$\frac{\pi}{10}$，　$\frac{\pi}{8}$，　$\frac{5\pi}{12}$，　$\frac{4\pi}{5}$，　$\frac{7\pi}{6}$，　$\frac{5\pi}{3}$；

（2）$\frac{7\pi}{12}$，　$\frac{7\pi}{4}$，　$\frac{9\pi}{8}$，　$\frac{5\pi}{9}$，　$\frac{21\pi}{20}$，　3.

4. 用角度制与弧度制分别表示等边三角形，等腰直角三角形的一个锐角.

5． 三角形各角成 2:3:7 之比，将各角用弪（弧度）表示出来．

6． 按下列所设条件求弧长：

(1) 半径 $R=100$ 厘米，弧的大小等于 0.17 弪；

(2) 半径 $R=40$ 厘米，弧所对的圆心角等于 $90°$．

7． 飞轮在 4 小时内旋转 72×10^4 周，它的角速度是每秒几度？

8． 计算 $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，精确到 0.01

9． 若取 π 等于 $\frac{22}{7}$，计算

(1) $1°$ 的角是多少弧度？

(2) 1 弧度的角里有多少度？

10． 已知长 50cm 的弧含有 $200°$，求这弧所在的圆的半径（精确到 0.1cm）．

11． 已知圆的半径等于 2.4 米，求这圆上长 4 米的弧所含的度数（精确到 $1'$）．

12． 在半径等于 20 厘米的圆中，一扇形的弧含有 $50°$，求这扇形的周长和面积．

13． 若地球赤道上的经度相差 $1°$ 的距离为 111.83 公里，求地球的半径．

第二节　角的概念的普遍化

过去我们在学习有关“角”的概念时，是把“角”规定为“由一点引出的两条射线所构成的几何图形”，那时，角的大小是限制在 $0°$ 到 $360°$ 之间的．但是，在人们的社会生产和生活实际中，常常会遇到诸如轮子转动，齿轮啮合时的转动以及钟、表上的指针转动等等所产生的角度问题，如果我们仍然局限在上述“角”的概念里来认识、理解和处理问题，便会发现它是不能如实的、客观的、全面的反映变化着、运动着的角的大小的本质属性的．举个例来说，有一个

螺帽需要旋紧或放松，但如若只说："把螺帽旋转一百八十度"，那我们如何理解这句话的意思呢？按照过去规定"角"的概念，我们只能理解为如图 1—4 里，把 A 点旋转到 A' 点的位置，但这显然是十分不确切的．因为把 A 转到 A' 的位置，既可以是按顺时针方向旋转，也可以是按反时针方向旋转，而旋转的方向不同，其效果和意义是显然不同的，一个是旋紧，一个是放松．而且，就算是旋转方向指定了，但要"把 A 转到 A' 的位置"，可以是转$\frac{1}{2}$转，也可以是转 $1\frac{1}{2}$转，$2\frac{1}{2}$转，……其效果和意义显然也是不同的，因为旋紧（或放松）的程度是不同的．若旋转$\frac{1}{2}$转用"旋转180°"表达，那么旋转 $1\frac{1}{2}$转，$2\frac{1}{2}$转……又应如何表达呢？为了如实的、客观的、全面的反映实际，就要求我们必须用运动的观点（考虑运动的连续性和运动的方向）来理解"角"的概念．通过对大量客观事物、现象的观察、分析、研究，我们将摆脱事物的各种具体属性，抽象出其共性，把角的概念加以推广，使它更具有普遍的意义．

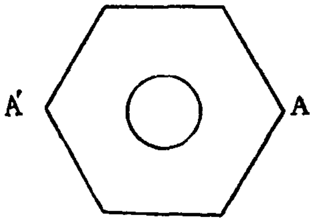

图 1—4

1. 角的概念

我们把在平面上的角，例如$\angle AOB$（图 1—5）看作是由它的一条边 OB 从另一条边 OA 的位置开始，绕着顶点 O 旋转生成的．在旋转开始位置的一边叫做角的始边，在旋转终了位置的一边叫做角的终边．

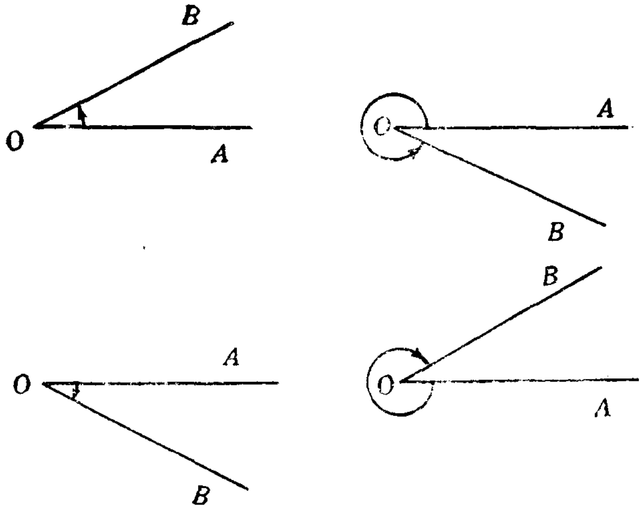

图 1—5

2. **大于 360° 的角**

如果一个角的终边由始边的位置开始，依照反时针方向旋转而回到始边的位置，就生成 0° 到 360°的一切角．如果终边在旋转一周以后，再继续旋转，就生成大于 360° 的一切角．终边由旋转一周到旋转两周，就生成 360° 到 720° 的一切角；旋转两周到旋转三周，就生成 720° 到 1080° 的一切角．同样，终边还可以旋转四周、五周、六周等等，而生成任意大小的角．

如图 1—6，是 30°，390°，750° 的角．

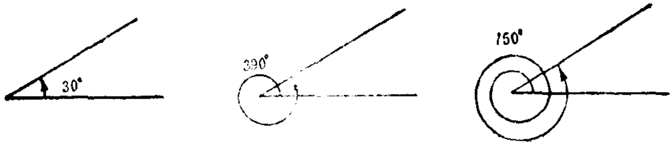

图 1—6

3. 负　角

一个角的始边到终边的旋转方向，有反时针和顺时针两种情况．习惯上我们规定，反时针方向旋转所生成的角叫做正角（图1—6）．顺时针方向旋转所生成的角叫做负角．终边由始边的位置开始，依顺时针方向旋转而回到始边的位置，就生成 $0°$ 到 $-360°$ 的一切角．终边在旋转一周以后，再继续按顺时针方向旋转下去，就生成小于 $-360°$ 的一切角．例如，互相啮合的两个齿轮，当一个齿轮的半径按反时针方向旋转成正角时，另一个齿轮的半径则必然按顺时针方向旋转成负角．

如图1—7，是 $-30°$，$-390°$，$-750°$ 的角。

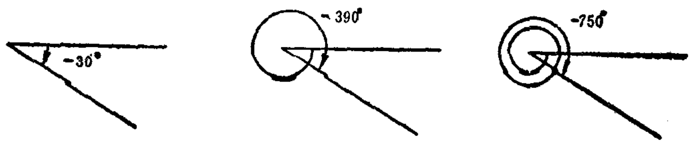

图 1—7

这样一来，我们便可以得到任意大小的角：正角、负角和等于零度的角．而正角和负角仅仅是表示终边的旋转方向不同的两种角．“正”、“负”是相对的，若规定按顺时针方向旋转成正角，则按反时针方向旋转成负角，但通常是规定按反时针方向旋转生成正角．

4. 角纳入坐标系

为了把图形间的关系、变化规律从数量方面将其更好地刻化出来，使得对问题的理解、研究更加深入，我们常常把