财经类专科试用教材

经济数学基础

概率论与数理统计

何蕴理　贺亚平　陈中和　张茂祥　编

高等教育出版社

财经类专科试用教材

经济数学基础

概率论与数理统计

何蕴理　贺亚平
陈中和　张茂祥　编

高等教育出版社

近年来,各种形式的财经类专科学校、职业大学财经专业、管理干部学院等发展很快,迫切需要经济数学基础教材,为了适应这一要求,我们计划出版一套"经济数学基础"教材,其中包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《线性规划》、《运筹学》等书.可供财经类专科学校、职业大学、管理干部学院选作试用教材或教学参考书.由于时间紧促,书中肯定会有不少缺点、错误,欢迎读者批评指正.

《概率论与数理统计》全书共有九章,前五章为概率论部分,后四章为数理统计部分.每节后面都附有习题,书末有习题答案及五个附表.

本书取材简明、通俗易懂.

这套教材的主编是崔福荫,副主编是李志煦、戴宗儒、郑郁文、王尚文.

财经类专科试用教材

经济数学基础

概率论与数理统计

何蕴理　贺亚平　陈中和　张茂祥　编

*

高等教育出版社出版

高等教育出版社照排中心照排

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂　印装

*

开本 850 × 1168　1/32　印张　5.75　字数 140 000

1988年 9月第1版　1988年10月第1次印刷

印数 0001－13 110

ISBN7－04－001637－0/O·373

定价　1.60 元

前　言

现代经济科学不仅用到初等数学,而且大量用到高等数学,经济数学在各类财经院校的教学中日益受到重视.近几年来,财经类专科学校、职业大学的财经专业、经济管理干部学院发展很快,迫切需要适应财经类专科层次经济数学教学的教材,本书就是为此目的而编写的.

本书对基本概念、重要公式和定理的实际意义方面,注意结合财经类专业的特点,选用了较多的管理和经济方面的实例,并配有适量的练习题,书后附有答案或提示.

书中有些内容加注了 * 号,作为选学内容,这是为了使教和学都能有较大的灵活性.

本书由何蕴理同志主纂.

本书由韩焕堂同志初审,高尚华同志复审,在此表示衷心的感谢.

由于我们水平有限,缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

一九八七年十二月

目　录

第一章 随机事件的概率

§1－1 随机事件

一、随机现象

在现实世界中,我们经常遇到两类不同的现象：一类是确定性现象,即在一定条件下，必然会发生某一种结果或必然不发生某一种结果的现象;另一类是随机现象,即在同样条件下,多次进行同一试验,所得结果并不完全一样，而且事先不能预言将会发生什么结果的现象.比如:

例1.1 抛一枚均匀硬币，必往下落.

例1.2 抛一枚均匀硬币,落下后,可能正面向上，也可能反面向上.

例1.3 某篮球运动员投篮一次,其结果可能命中,也可能不中.

例1.4 从某厂的一批产品中，随机抽取4件进行检查，抽到的次品数可能是0，1，2，3，4.

其中，例1是确定性现象,例2、3、4都是随机现象.

随机现象是偶然性与必然性的辩证统一，其偶然性表现在每一次试验前，不能准确地预言发生哪种结果；其必然性表现在相同条件下进行大量重复试验时，结果呈现出统计规律性. 偶然性孕育着必然性，必然性通过无数的偶然性表现出来. 概率论就是一门研究随机现象统计规律性的数学学科. 它从表面上看起来是错综复杂的偶然现象中，揭露出潜在的必然性来. 概率论在自然科学和社会科学的各个领域中的应用十分广泛，它是从事经济管理工作的必不可少的工具之一.

二、随机试验和随机事件

随机现象是通过随机试验去研究的. 在一定条件下，抛硬币、投篮、抽查产品等，都是随机试验，简称试验. 从理论上讲，它可以在相同条件下，重复进行多次，且各次试验的结果不一定相同.

为了便于研究，我们把随机试验的结果，称为随机事件，简称事件，用大写拉丁字母A、B、C等表示．在一定的研究范围内，不能再分的事件，称为基本事件．如：例2中的基本事件是“正面向上”和“反面向上”两个；例3中的基本事件是“命中”和“不中”两个；例4中的基本事件是“0件废品”、“1件废品”、“2件废品”、“3件废品”和“4件废品”五个．一个随机试验所对应的基本事件的个数，可以是有限个，也可以是无穷多个．由两个或两个以上基本事件组合而成的事件，称为复合事件．如：例4中“废品数不超过2”这一事件，由“0件废品”、“1件废品”和“2件废品”三个基本事件组合而成，是个复合事件．

在一定条件下，必然发生的事件，称为必然事件，记作Ω．如：“在标准大气压下，纯水加热到100℃沸腾”，“抛一枚硬币，落下后，正面向上或反面向上至少有一个发生”，都是必然事件．在一定条件下，必然不发生的事件，称为不可能事件，记作$\varnothing$．如：“在标准大气压下，20℃的纯水结冰”，“抛一枚硬币，落下后，正面向上和反面向上同时发生”，都是不可能事件．必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现．为了便于讨论，通常把它们当作随机事件的两种极端情况来看待．

三、事件的关系和运算

在某些问题的研究中，我们讨论的往往不只是一个事件，而是好些事件，而这些事件又存在着一定的联系．为了用较简单的事件表示较复杂的事件，下面引进事件之间的几种主要关系以及作用在事件上的运算．

1．包含关系

如果事件A发生，必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A被事件B所包含，记作$A\subset B$或$B\supset A$．

以后，我们将经常用图示法直观地表示事件间的关系：用一个矩形表示必然事件Ω，矩形内的一些封闭图形表示一些随机事件．图1－1表示了事件A、B的包含关系：$A\subset B$．

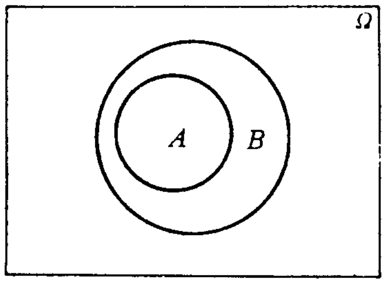

图 1－1

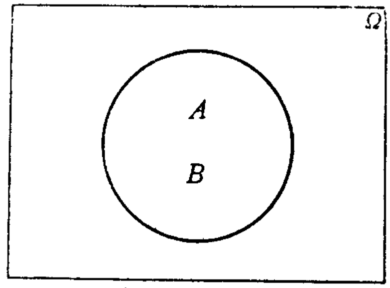

图1－2

包含关系显然具有以下性质:

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B$, $B\subset C$, 则 $A\subset C$;

(3) $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 相等关系

如果事件 B 包含事件 A，同时事件 A 包含事件 B, 即 $A\subset B$ 与 $B\subset A$ 同时成立, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记作 $A=B$. (见图 1－2)

3. 和

事件 A 和 B 至少有一个发生, 称为事件 A 与事件 B 之和, 记作 $A+B$. (见图 1－3) .

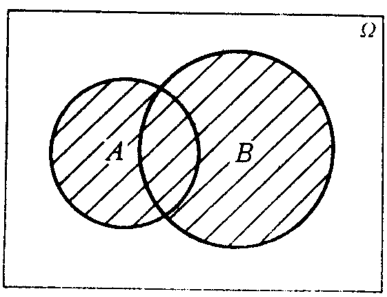

图 1－3

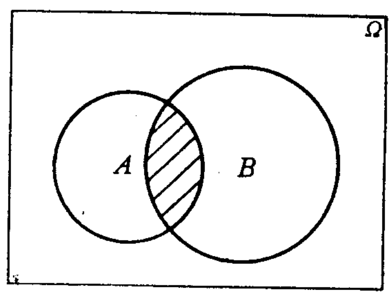

图1－4

这里应该注意的是: $A+B$ 表示“A 和 B 至少有一个发生”, 与“A 和 B 恰有一个发生”(即 A 发生, B 不发生或者 B 发生, A 不发生) 是不同的.

事件和的概念，可以推广到 n 个事件的情况. 事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之和，表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生.

4. 积

事件 A 和 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 之积，记作 AB（见图 1－4）.

事件积的概念，也可以推广到 n 个事件的情况. 事件 $A_1A_2\cdots A_n$，称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 之积，表示 n 个事件 $A_1, A_2\cdots, A_n$ 同时发生.

5. 互不相容关系

如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 和 B 是互不相容的（见图 1－5(a)）.

所谓 n 个事件互不相容，指的是其中任意两个事件都是互不相容的. 应该注意的是，比如三个事件 A、B、C 即使满足 $ABC=\varnothing$，也不一定互不相容（如图1－5(b)）.

6. 对立事件

如果两个事件 A 与 B 满足

$$A+B=\Omega, \qquad AB=\varnothing,$$

则称 A、B 互为对立事件，记作 $B=\overline{A}$.（见图 1－6）

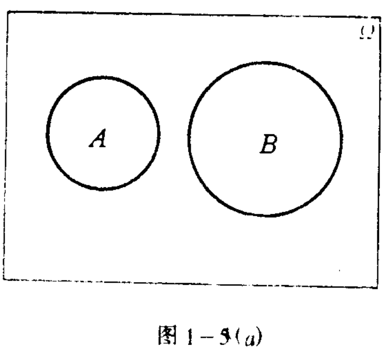

图 1－5(a)

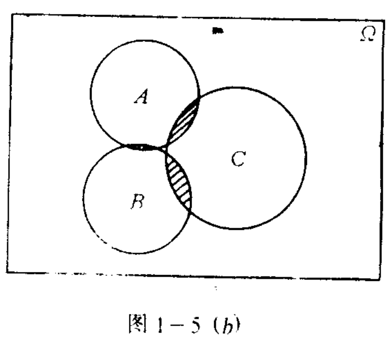

图 1－5 (b)

显见，A 的对立事件 $\overline{A}$，表示 A 不发生.

对立事件具有如下性质：

$\overline{\Omega}=\varnothing$;

$\overline{\varnothing}=\Omega$

$\overline{\overline{A}}=A$

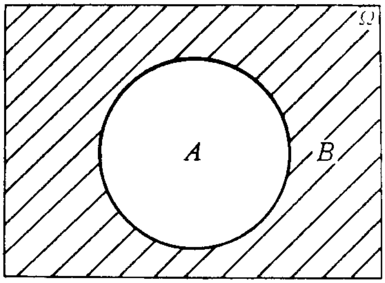

图 1－6

由定义可知，A、B 两事件对立，要求 $A+B=\Omega$ 与 $AB=\varnothing$ 两个等式同时成立；而 A、B 两事件互不相容，仅要求后一个等式成立. 所以，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

例 1.5 设 A、B、C 为三事件，试用事件 A、B、C 的运算表示下列事件：

(1) A 发生，B、C 不发生；

(2) B、C 发生，A 不发生；

(3) A 发生，B 与 C 中任意一个发生，但不同时发生；

(4) A、B、C 至少有一个发生；

(5) A、B、C 恰有一个发生；

(6) A、B、C 恰有两个发生；

(7) A、B、C 都发生；

(8) A、B、C 一个也不发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；

(2) $\overline{A}BC$；

(3) $AB\overline{C}+A\overline{B}C$；

(4) $A+B+C$；

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；

(6) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$；

(7) ABC；

(8) $\overline{A+B+C}$，亦可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 1.6 用文字叙述各对事件的和事件、积事件的意义，并判断各对事件是否相容、是否对立.

(1) A：一批产品中，废品数少于 6 个；

B：同一批产品中，废品数等于 6 个.

(2) C：在某段时间内，电话交换台收到的呼唤次数不少于20次；

D: 在同一段时间内, 电话交换台收到的呼唤次数不多于20次;

解 (1) $A+B$ 表示这批产品中, 废品数 "少于 6 个" 与 "等于 6 个" 至少有一个发生, 即废品数 "不多于 6 个"; AB 表示这批产品中, 废品数既 "少于 6 个", 又 "等于 6 个", 显然是不可能事件.

A、B 互不相容, 但不对立.

(2) $C+D$ 表示呼唤次数 "不少于 20 次" 与 "不多于 20 次" 至少有一个发生, 是必然事件; CD 表示呼唤次数既 "不少于 20 次", 又 "不多于 20 次", 那就是 "等于 20 次".

C、D 相容, 不对立.

四、事件的运算规律

为了对事件的运算式进行恒等变形和化简, 现将事件的运算规律列表如下:

	加　法	乘　法
交 换 律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结 合 律	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
分 配 律	$A(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
蕴 涵 律	$A+B\supset A$ $A+B\supset B$	$AB\subset A$ $AB\subset B$
重 叠 律	$A+A=A$	$AA=A$
吸 收 律	$A+\Omega=\Omega$ $A+\varnothing=A$	$A\Omega=A$ $A\varnothing=\varnothing$
对 立 律	$A+\bar{A}=\Omega$	$A\bar{A}=\varnothing$
摩 根 律	$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$	$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

事件的运算与数的运算, 本质上是不同的. 我们一定要时刻牢记这是事件和事件的运算.

事件运算的摩根律:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$$

和

$$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$$

在简化运算式时是很有用的. 我们从图1－7可以直观地看出来. 图中, $\overline{A}$ 标以横线条, $\overline{B}$ 标以纵线条, 显见, $\overline{A+B}$ 与 $\overline{A}\ \overline{B}$ 都是标有方格的区域, 故相等; $\overline{AB}$ 与 $\overline{A}+\overline{B}$ 都是标有线条(不论横线条或纵线条)的区域, 故相等.

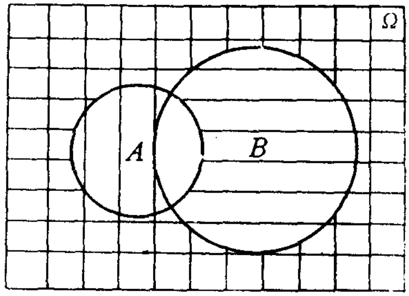

图 1－7

关于上述事件的一些运算规律, 不难推广到 n 个事件的情况.

五、事件和集合

随机试验中, 每次试验的一种可能结果, 称为一个样本点, 用 ω 表示. 所有样本点的集合, 称为样本空间, 用 Ω 表示. 所谓随机事件, 就是样本空间 Ω 的子集. 而 Ω 的单元素子集, 就是基本事件. 显然, Ω 本身就是必然事件, 空集 $\varnothing$ 就是不可能事件. 由此可见, 事件的关系和运算与集合的关系和运算完全是一回事. 把事件和集合等同起来, 这是把概率论纳入现代数学行列的关键性一步, 对概率论的发展有重大意义.

习 题 1－1

1. 以下二式各说明 A、B 之间有什么关系?

(1) $A+B=A$;

(2) $AB=A$.

2. 事件 A 表示"五件产品中至少有一件废品", 事件 B 表示"五件产品都是合格品", 则 $A+B$、AB 各表示什么事件? A、B 之间有什么关系?

3. 随机抽检三件产品,

设 A 表示 "三件中至少有一件是废品";

B 表示 "三件中至少有两件是废品";

C 表示 "三件都是正品";

问 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$、$A+B$、AC 各表示什么事件?

4.对飞机进行两次射击,每次射一弹.

设 A_1 表示"第一次射击击中飞机";

A_2 表示"第二次射击击中飞机".

试用 A_1、A_2 及它们的对立事件,表示下列各事件:

B:"两弹都击中飞机";

C:"两弹都没击中飞机";

D:"恰有一弹击中飞机";

E:"至少有一弹击中飞机".

并指出 B、C、D、E 中,哪些是互不相容的,哪些是对立的.

5. 袋中有 10 个零件,其中 6 件一等品、4 件二等品,今无放回地抽三次,每次取一件. 若用 A_i 表示"第 i 次抽取到一等品"($i=1, 2, 3$),问如何表示以下各事件:

(1) 三件都是一等品;

(2) 三件都是二等品;

(3) 按抽取顺序,前两件为一等品,最后一件为二等品;

(4) 不计顺序,所取三件中,有两件一等品、一件二等品.

6. 从 0、1、2 三个数字中有放回地抽两次,每次取一个. 用(x, y)表示"第一次取到数字 x,第二次取到数字 y"这一事件.

(1) 求该随机试验中基本事件的个数,并列出所有的基本事件.

(2)"第一次取出的数字是 0"这一事件,由哪几个基本事件组成?

(3)"第二次取出的数字是 1"这一事件,由哪几个基本事件组成?

(4)"至少有一个是数字2"这一事件,由哪几个基本事件组成?

§1-2 事件的概率

一、概率的统计定义

我们知道,一个随机事件,在每次试验中,可能发生也可能不发生. 即在一次试验中,随机事件的发生带有偶然性. 然而,对同一事件,在相同条件下进行大量试验,又会呈现出一种确定的规律来. 它告诉我们:随机事件发生的可能性的大小是可以度量的.

历史上,有人做过抛掷硬币的试验,结果如下表所示:

试验者	投掷次数 n	"正面向上"次数 μ	"正面向上"频率 $\frac{\mu}{n}$
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

容易看出，随着抛掷次数的增加，正面向上的频率 $\frac{\mu}{n}$ 围绕着一个确定的常数0.5作幅度越来越小的摆动. 正面向上的频率稳定于0.5附近，是一个客观存在的事实，不随人们主观意志为转移的. 这一规律，就是频率的稳定性.

一般地，在大量重复试验中，事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ 总是在一个确定的常数 p 附近摆动，且具有稳定性. 这个常数 p 就是事件 A 发生的可能性大小的度量，称为事件 A 的概率，记作 $p(A)$.

这就是说，频率的稳定性是概率的经验基础，而频率的稳定值是随机事件的概率. 频率是个试验值，具有偶然性，可能取多个不同值，它近似地反映了事件发生可能性的大小；概率是个理论值，只能取唯一值. 只有概率，才精确地反映出事件发生可能性的大小.

二、概率的古典定义

设有40件同类产品，其中37件合格品、3件废品，现从中随机地抽取一件进行检查. 这里，所谓"随机地抽取"，指的就是各件产品被抽到的可能性是相同的. 由于40件产品中有3件废品，故即使不进行大量试验，我们也会认为抽到废品的可能性为 $\frac{3}{40}$.

从上例中，我们看到一种简单而又直观地计算概率的方法. 但在应用这个方法时，要求随机试验具备以下两个特点：

(1) 所有可能的试验结果(即基本事件)只有有限个;

(2) 每个基本事件发生是等可能的.

具备上述特点的随机试验模型,称为古典概型.在古典概型中,若总的基本事件数为n,而事件A包含了m个基本事件,则A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

这种概率的定义,称为概率的古典定义.由等可能性的假设,不难理解这个定义确实客观地反映了随机事件发生的可能性的大小.

由概率的古典定义,容易得到概率的几条基本性质:

(1) 任何事件的概率都在 0 与 1 之间,即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 必然事件的概率为 1,即 $P(\Omega)=1$;

(3) 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

例 2.1 同时抛掷两枚硬币,求落下后“恰有一枚正面向上”的概率.

解 用 A 表示“恰有一枚正面向上”这一事件.

抛掷两枚硬币,等可能的基本事件有 4 个,即(正,正)、(正,反)、(反,正)、(反,反),而随机事件 A 由其中的 2 个基本事件(正,反)、(反,正)组成,故 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

这道例题告诉我们,在应用概率的古典定义计算时,必须慎重地判断等可能性.如果认为此例中等可能的基本事件为“全正”、“一正一反”、“全反”就会得出 $P(A)=\frac{1}{3}$ 的错误结论来.

例 2.2 同时抛掷两枚匀称的骰子,求事件A:“点数之和等于 10”的概率.

解 等可能的基本事件共有 $6^2=36$ 个.如果我们用(x,y)表示第一枚骰子出 x 点、第二枚骰子出 y 点这一基本事件,则全部基本事件为

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

事件 A 所包含的基本事件是(4, 6)、(5, 5)、(6, 4) 三个，故 $P(A)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$.

以上两例均采用罗列基本事件的方法. 这种方法直观、清楚，但是太繁琐了. 在很多场合下，由于基本事件的总数很大，实际上是行不通的. 因此在大多数场合，我们是用计算排列、组合的方法，分析求解古典概型问题的.

例 2.3 有10件产品，其中2件次品，无放回地取出3件，求：

(1) 这三件产品全是正品的概率；

(2) 这三件产品恰有一件次品的概率；

(3) 这三件产品至少有一件次品的概率.

解 设 A 表示“全是正品”，

B 表示“恰有一件次品”，

C 表示“至少有一件次品”.

从10件中取出3件，共有 C_{10}^3 种取法，即有 C_{10}^3 个等可能的基本事件.

(1) 这三件产品全是正品的取法有 C_8^3 种.

$$\therefore P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}.$$

(2) 这三件产品恰有一件次品的取法有 $C_8^2C_2^1$ 种.

$$\therefore P(B)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}.$$

(3) 这三件产品至少有一件次品，包括两种情况：恰有一件次品，取法有 $C_8^2C_2^1$ 种；恰有两件次品，取法有 $C_8^1C_2^2$ 种.