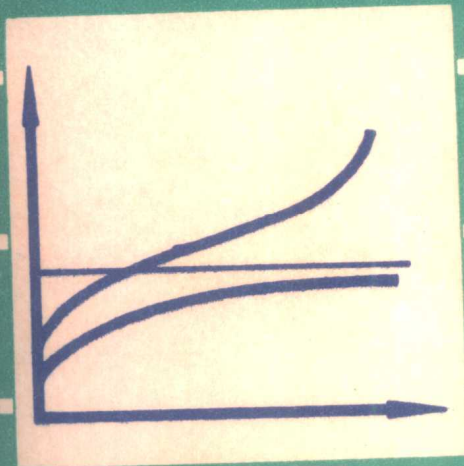


流变力学原理

及其在岩土工程中的应用

周德培 等编著

郑鸿泰 主审



西南交通大学出版社

流变力学原理 及其在岩土工程中的应用

编著 周德培 朱本珍
毛坚强
主审 郑鸿泰

江苏工业学院图书馆
藏书章

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书结合岩土工程的实际问题,讲解流变力学的一些原理及其应用方法。内容包括岩土工程材料在动、静力作用下的流变力学性质;粘弹性体的应力分析;室内和现场试验理论与方法;试验数据的分析处理;长期强度及流变参数的确定等。对地下结构受力和变形的时间效应给出了理论解析和有限元分析;还根据滑坡动态规律、滑带土流变特性,提出了滑坡的分级超前预报模式。除第九章外每章末还附有相应的习题,以便读者练习。

本书以较为浅显的数理力学知识阐述了有关的流变力学原理,通俗易懂,实用性强,便于自学。因此除作为研究生教材外,也可供岩土工程界的工程技术人员、科研工作者及本科高年级学生阅读。

流变力学原理及其在岩土工程中的应用

周德培 等编著

*

西南交通大学出版社出版发行

(成都 二环路北一段 610031)

新华书店经销

郫县印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 14.875

字数: 358 千字 印数: 1—1000 册

1995年12月第1版 1995年12月第1次印刷

ISBN 7—81022—875—7/T·161

定价: 15.00 元

序

我高兴地粗阅了由西南交通大学岩土工程研究所副教授周德培博士撰写拟新近交付出版的这本学术专著《流变力学原理及其在岩土工程中的应用》，感到确实是一本好书，希望能尽早问世以应当前这方面的工作急需。

记得多年以前我曾去峨眉主持过周博士的学位论文答辩。当时他以优异成绩通过了他在这一学科领域深入钻研而完成的论文，他的答辩曾受到与会评委们的高度赞许；现在，周博士百尺竿头、更上层楼，经过这些年的进一步研究与教学实践，在博士论文的基础上又有许多新的见地和提高。因此，他的这本新作对我来说就倍感亲切和受到鼓舞。

众所周知，“他山之石可以攻玉”。当今各相关学科之间的学术交叉和彼此融合，进而在其结合点上派生新的学科分支，正是衍生和发展新兴学科的一种趋向。岩土流变力学学科自然也不例外。它的研究领域十分广阔：在理论探讨上，它研究各类材料的流变属性，包括蠕变、应力松弛和材料长期强度问题；需要建立繁复的物性方程，识别合适的模型理论及其参数估计，以及寻找粘弹塑性问题的求解方法。在工程应用实践方面，它涉及研制各类新型的测试、实验仪器设备，探讨流变岩（土）介质与支护结构相互作用的耦合问题，以指导工程设计与施工。以上方面的一些主要内容在本书中都有详尽细致的阐述，这是十分难能可贵的。

工程流变学科是一门既富理论内涵，又有重要工程应用前景的研究热点，它的发展正方兴未艾，这是可以预期的。

我衷心祝愿本书的出版，它将给繁荣昌盛的我国岩土力学与工程界增添一股浓郁的学术芬芳，深信它必将得到广大岩土力学工作者的欢迎，并从中受到教益。

孙钧

1995年7月于同济大学

2007/10

前 言

岩土材料是流变体。在一定的应力条件下,其流变力学性质就会明显表现出来。例如隧洞开挖后在二次应力场作用下围岩表现出明显的蠕变性;设置衬砌后围岩压力会随时间变化;边坡内软弱材料在地应力作用下的蠕变会逐渐形成滑动面从而酿成滑坡等。在这些岩土工程问题中,一个显著的特点是岩土材料及工程结构物的应力、变形、强度等力学性质都与时间有关。现在人们已清楚地认识到,只有用流变力学的原理去分析解决这些问题,才能得到较为合理的结果。因此在岩土工程的设计和施工中了解流变力学原理及其工程应用的知识是很重要的。

本书是根据笔者多年从事流变力学教学和科研成果撰写而成的,希望在该学科领域提供一本较全面的研究生教材。因此全书内容较多,共分九章。前四章除了介绍流变力学的一些基本概念外,着重论述了线性粘弹性理论;讨论了在动、静力作用下线性粘弹性体的反应,以及线性粘弹性问题的求解方法,包括直接解法和弹性-粘弹性对应原理的间接解法。第五章简述了非线性流变力学问题。第六、七两章介绍了流变力学问题的室内和现场试验的原理与方法,岩石、土、混凝土等材料的流变性质。第八章阐述了地下结构粘弹性问题的解析解和有限元解法。第九章介绍了滑坡的动态规律及其运动机制,提出了分级超前预报模式。除第九章外各章末都附有相应的习题,以便读者练习。

本书的编著,力求通俗易懂,尽量避免复杂的数学推演。着眼于讲清概念、解题思路和方法。希望读者在学完本书后,除了掌握流变力学的基本原理、实验理论和方法外,还能在实验数据的分析处理、流变参数的选择,以及分析、解决岩土工程流变力学问题的能力等方面有较大提高。倘能如此,笔者甚感欣慰。

本书§8.5和§8.6两节由毛坚强讲师撰写,第九章由铁道科学研究院西北分院朱本珍副研究员撰写,其余各章节均由周德培副教授撰写。全书完稿后,郑鸿泰教授审阅了全书,并着重审阅了第一至五章和第九章;电力工业部成都勘测设计院科研所雷承第高级工程师审阅了第六、七两章;徐文焕教授审阅了第八章。笔者根据审稿人提出的意见作了修改或补充。中国科学院院士、中国岩石力学与工程学会理事长、同济大学孙钧教授也审阅了书稿,并为本书作序。我校图书馆李桂蓉老师还为本书的撰写查阅了资料并作了大量文整工作。另外,本书的出版得到了西南交通大学出版基金的资助。笔者在此一并致以深切的谢意。

由于笔者理论水平和实践经验有限,书中内容难免会有欠缺、不妥甚至谬误之处,恳请各位专家、学者和广大读者批评指正。

周德培

1994年10月于西南交通大学

目 录

第一章 材料的弹性和非弹性	1
§ 1.1 弹 性	1
§ 1.2 非线性变形	6
§ 1.3 塑 性	8
§ 1.4 粘 滞 性	9
§ 1.5 非线性粘滞性	12
§ 1.6 蠕变和松弛	13
§ 1.7 流 变 体	16
习 题	18
参考文献	18
第二章 线性粘弹性体的本构方程	20
§ 2.1 两个基本元件及粘弹性固体和流体	20
§ 2.2 Maxwell 体	22
§ 2.3 Kelvin 体	25
§ 2.4 标准线性固体	27
§ 2.5 Burgers 体	30
§ 2.6 线性粘弹性模型及微分型本构方程的特点	32
§ 2.7 粘弹性模型及流变常数的确定	36
§ 2.8 简单应力状态下粘弹性体微分型本构方程的一般形式	40
§ 2.9 蠕变柔度和松弛模数	44
§ 2.10 线性粘弹性体的积分型本构方程	46
§ 2.11 三维线性粘弹性体的本构方程	49
习 题	51
参考文献	52
第三章 线性粘弹性体的应力分析	54
§ 3.1 线性粘弹性问题的解析法	54
§ 3.2 纯弯曲梁	58
§ 3.3 粘弹性地基上的弹性基础梁	62

§ 3.4 粘弹性的厚壁圆筒	64
习 题	68
参考文献	71
第四章 振动荷载作用下线性粘弹性体的性质	73
§ 4.1 振动荷载及复蠕变柔度和复松弛模数	73
§ 4.2 粘弹性体的耗散能	75
§ 4.3 一些粘弹性体的复松弛模数	76
§ 4.4 E^* 与 $E(t)$ 及 J^* 与 $J(t)$ 的关系	78
§ 4.5 谐振荷载下粘弹性体的动态反应	81
§ 4.6 线性粘弹性体的谐激励振动	85
习 题	87
参考文献	88
第五章 非线性流变力学性质	89
§ 5.1 概 述	89
§ 5.2 塑性元件	89
§ 5.3 粘弹塑模型	91
§ 5.4 粘弹塑强化模型	93
§ 5.5 非线性流变体的本构方程	95
§ 5.6 三维积分型非线性粘弹性体本构方程	98
§ 5.7 非线性流变问题的求解方法	100
习 题	105
参考文献	105
第六章 岩土工程中的流变力学试验	107
§ 6.1 概 述	107
§ 6.2 岩土工程材料的蠕变试验	107
§ 6.3 影响蠕变试验结果的因素	110
§ 6.4 蠕变试验中的荷载	113
§ 6.5 应力 应变的量测	115
§ 6.6 松弛试验	116
§ 6.7 试验结果分析与参数的确定	117
§ 6.8 动力试验	122
§ 6.9 流变力学问题的模型试验——模型的相似关系	123
§ 6.10 隧道结构的模型试验	126
§ 6.11 现场试验与量测	128
习 题	132
参考文献	133

第七章 几种岩土工程材料的流变力学性质.....	135
§ 7.1 概 述	135
§ 7.2 岩石抗拉蠕变性	135
§ 7.3 岩石单轴压缩的蠕变与松弛	139
§ 7.4 多轴应力状态下岩石的蠕变性	143
§ 7.5 岩石的蠕变方程	147
§ 7.6 岩石的长期强度	150
§ 7.7 土的蠕变性	153
§ 7.8 混凝土的蠕变性	154
习 题.....	160
参考文献.....	160
第八章 地下结构的粘弹塑性分析.....	163
§ 8.1 概 述	163
§ 8.2 弹性介质中圆形隧道结构的解	164
§ 8.3 粘弹性介质中圆形隧道结构的解	171
§ 8.4 均匀地应力场中圆形隧道的粘弹塑性解	180
§ 8.5 有限元法的基本概念及粘性材料的本构关系	184
§ 8.6 流变力学问题有限元法公式的建立及实施	196
习 题.....	204
参考文献.....	204
第九章 流变力学在滑坡分析与预报中的应用.....	205
§ 9.1 概 述	205
§ 9.2 滑坡的动态类型及其运动机制分析	206
§ 9.3 滑带土的流变性质与滑坡的时间预报	214
§ 9.4 天水某地滑坡滑带土的流变特征	217
§ 9.5 天水某地滑坡分级预报及其模式	221
参考文献.....	225
附录 拉普拉斯变换.....	226

第一章 材料的弹性和非弹性

§ 1.1 弹 性

材料的弹性指由这种材料组成的物体在外力作用下,其形状和体积发生改变,外力撤除后又能恢复到原来形状和体积的性质。可恢复的变形称为弹性变形。许多材料都具有弹性,但液体和气体材料,仅具有恢复其体积的性质。各种材料的弹性表现程度是不同的,对于固体材料可由实验测出其应力—应变曲线加以分析。图 1.1a 是一种钢材在单向拉伸中测得的应力—应变曲线。OA 段是直线段,此时在外力作用下产生拉应力 σ 与材料发生的应变 ϵ 成正比。A 点对应的应力 σ_e 称为材料的弹性比例极限。过 A 点后 σ 和 ϵ 不成正比, B 点对应的应力 σ_s 称为材料的弹性极限。因此在达到 B 点前的变形都是弹性变形。换言之,当应力达到 σ_s 时,再卸载到零,材料产生的应变 ϵ_e 会完全消失。许多金属材料在单向拉伸时,都具有明显的比例极限,而且当加载到 A 点时,然后再卸载,卸载曲线和加载曲线 OA 重合。这种性质叫可逆线弹性,其应力—应变关系服从虎克定律,具有这种特性的材料称为线弹性材料,又称为线弹性体、理想弹性体或虎克体。在图 1.1b 中,应力—应变曲线是非线性的,在加载到某点 E 再卸载时,仍沿加载曲线卸载到 0 点,这种性质叫非线性可逆弹性。对于岩石、土等非金属材,应力—应变曲线一般是非线性的,如图 1.1c 所示。在某点 D 卸载时,卸载曲线与加载曲线不重合,而沿 DA 卸载到零,瞬时恢复的弹性变形是 ϵ_e 。若 D 点对应的应力不大,材料无永久变形,OA 段的应变将随时间而逐渐恢复到零,这是材料的弹性滞后性质,也称为弹性后效。这类材料表现出非线性非可逆弹性。图 1.1c 中曲边形 ODAO 的面积表示了材料的非弹性变形所消耗的能量。此面积越小,材料的弹性表现越显著,卸载时可恢复的弹性应变 ϵ_e 则越大。因此这类材料在加载曲线上难以看出其弹性表现程度,只能根据卸载特性及卸载时测得的 ϵ_e 的值来衡量。

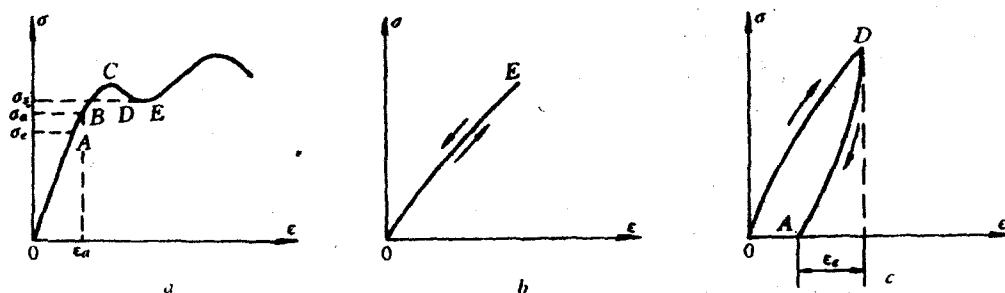


图 1.1 应力—应变曲线

在弹性力学中,对线弹性体的研究已较为成熟。为以后章节中的引用,下面简述求解弹性问题的基本方程^[1.1]。

弹性体受外力作用会发生变形,其内部各点产生相对位移,同时在内部形成应力场和应

变场”。在三维空间，例如在直角坐标系 $oxyz$ 中考虑此问题时，物体内任一点，有六个应力分量函数 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ，组成了该点的应力状态；同时有六个应变分量函数 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ，组成了该点的应变状态；另外还有三个位移分量函数 u, v, w ，分别对应了该点在 x, y, z 方向的位移。这 15 个未知函数通过下面 15 个方程来确定，即

1. 静力平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

用张量表示则为

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

其中 X_i 和 u_i 是沿坐标方向单位体积的体积力分量和位移分量，在静力或准静力作用下，惯性力 $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$ ， ρ 是物体密度。

2. 几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

或
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.4)$$

应注意式(1.3)括号中的项定义了工程剪应变，即 $\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$, $\gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y$, $\gamma_{zx} = \partial w / \partial x + \partial u / \partial z$ ，式(1.3)左边应变为张量应变，因而

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$$

3. 相容方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}, \quad 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

或
$$\epsilon_{i,j,k} + \epsilon_{k,i,j} = \epsilon_{k,j,i} + \epsilon_{j,i,k} \quad (1.6)$$

相容方程是根据几何方程导出的，两者只应用其中之一。

4. 本构方程

• 本书中应力与应变正负号规定与岩石力学相同。

对于各向同性材料，以应变表示应力，则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G\epsilon_x + \lambda\epsilon_{kk} & \tau_{xy} &= 2G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\epsilon_y + \lambda\epsilon_{kk} & \tau_{yz} &= 2G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\epsilon_z + \lambda\epsilon_{kk} & \tau_{zx} &= 2G\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

或 $\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.8)$

以应力表示应变，则为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \tau_{yz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

或 $\epsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\mu}{E} \cdot \sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (1.10)$

其中 $\sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad \epsilon_{kk} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

均质各向同性的线弹性体有 5 个弹性常数，即弹性模量 E 、剪切模量 G 、拉梅常数 λ 、体积弹性模量 K 和泊松比 μ ，其中仅两个是独立的，它们之间的相关性如表 1.1 所示。方程 (1.8) 和 (1.10) 分别是用 G 、 λ 和 E 、 μ 表示的，也可用其它两个常数表示，例如改用 G 、 K 表示，则有

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2G}{3} \right) \epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} \quad (1.11)$$

$$\epsilon_{ij} = \left(\frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} \right) \sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2G}\sigma_{ij} \quad (1.12)$$

各弹性常数间的关系

表 1.1

	G	E	G	K	E	K	G	μ	E	μ	K	μ	λ	G
E			$\frac{9GK}{3K+G}$				$2G(1+\mu)$				$3K(1-2\mu)$		$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	
G				$\frac{3EK}{9K-E}$				$\frac{E}{2(1+\mu)}$			$\frac{3K(1-2\mu)}{2(1+\mu)}$			
K	$\frac{EG}{9G-3E}$						$\frac{2G(1+\mu)}{3(1-2\mu)}$		$\frac{E}{3(1-2\mu)}$				$\frac{2G}{3} + \lambda$	
μ	$\frac{E}{2G} - 1$		$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$		$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{3K} \right)$								$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	
λ	$\frac{(E-2G)G}{3G-E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$		$\frac{2G\mu}{1-2\mu}$		$\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$		$\frac{3K\mu}{1+\mu}$			

应力张量 σ_{ij} 可分解为应力球形张量 $\sigma_0\delta_{ij}$ 和应力偏斜张量 s_{ij} ，即

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0\delta_{ij} \quad (1.13)$$

对于应变张量也可作同样的分解

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon_0\delta_{ij} \quad (1.14)$$

s_{ij} 使物体产生形状改变,相应的变形是应变偏量 e_{ij} 。 σ_0 使物体产生体积改变,相应的变形是 ϵ_0 ,因而本构方程还可下式表示:

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}, \quad \sigma_0 = 3K\epsilon_0 \quad (1.15)$$

其中 $\sigma_0 = \sigma_{kk}/3$, $\epsilon_0 = \epsilon_{kk}/3$ 。求解弹性力学问题就是在已知物体形状、材料性质及体积力后,寻求满足给定边界条件(如果是动力学问题还要给出初始条件)下,上述方程组的解。弹性力学边界条件分为三类。

1. 应力边界条件

假设在边界 Γ 上,作用在单位面积上的应力矢量为 T_i ,边界上某点的应力矢量 T_i 与该点的应力分量之间有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\ T_y &= l\tau_{yx} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\ T_z &= l\tau_{zx} + m\tau_{xy} + n\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

或 $T_i = a_j \sigma_{ij} \quad (1.17)$

其中 a_j 为边界上该点外法线的方向余弦,在 $oxyz$ 坐标系中为 l, m, n 。

2. 位移边界条件

在部分或全部边界 Γ_* 上,给定的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_i &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_i &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_i &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

f_i 为已知函数。

3. 混合边界条件

即边界上既有规定的应力也有给定的位移。

一些弹性力学问题,在一定条件下可简化为平面问题,从而在二维坐标系例如 oxy 中分析。此时物体中的位移、应力、应变等函数仅与 x, y 坐标有关。弹性力学中有两类平面问题,即平面应力和平面应变。弹性体中的应力、应变、位移分量函数分别为:

对于平面应变问题

位移: $u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0$

应变: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \epsilon_z = 0$

应力: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ 均不为零, $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

对于平面应力问题

位移: $u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y)z$

应变: $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

应力: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 均不为零

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

求解弹性平面问题的基本方程如下:

1. 平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

2. 几何方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

或

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1.21)$$

3. 本构方程

对于平面应力:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

在式(1.22)和(1.23)中, 以 $E/(1-\mu^2)$ 、 $\mu/(1-\mu)$ 分别代替 E 、 μ , 则得到平面应变问题的本构方程。

4. 对于应力边界条件

$$\left. \begin{aligned} T_x &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ T_y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

根据平衡方程、几何方程、本构方程, 在体积力为常量的条件下可得出下列双谐方程:

$$\nabla^4 \varphi = 0 \quad (1.25)$$

其中, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为拉普拉斯算子, 应力函数 φ 与应力分量之间的关系为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} + X_x + Y_x = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

因此求解弹性力学平面问题归结为寻求满足式(1.25)的应力函数 φ , 并使所得的解满足边界条件。当体积力为常量, 并且弹性体的尺寸、形状及外力相同时, 由平面应变及平面应力问题所得到的应力分布完全相同, 但应变分布不同。另外, 满足密切尔(J. H. Michell)条件的平面

应变及平面应力问题中, 应力分布与材料弹性常数无关。密切尔条件: 在不考虑体积力的线弹性平面问题中, 若弹性体为单连通域或多连通域, 而且在每个闭合边界上, 外力的合力为零, 或可化为一个力偶, 则弹性体中的应力分布与材料弹性常数无关^[1,1]。在图 1.2 中, a 、 b 、 c 满足密切尔条件, 而 d 、 e 不满足此条件。

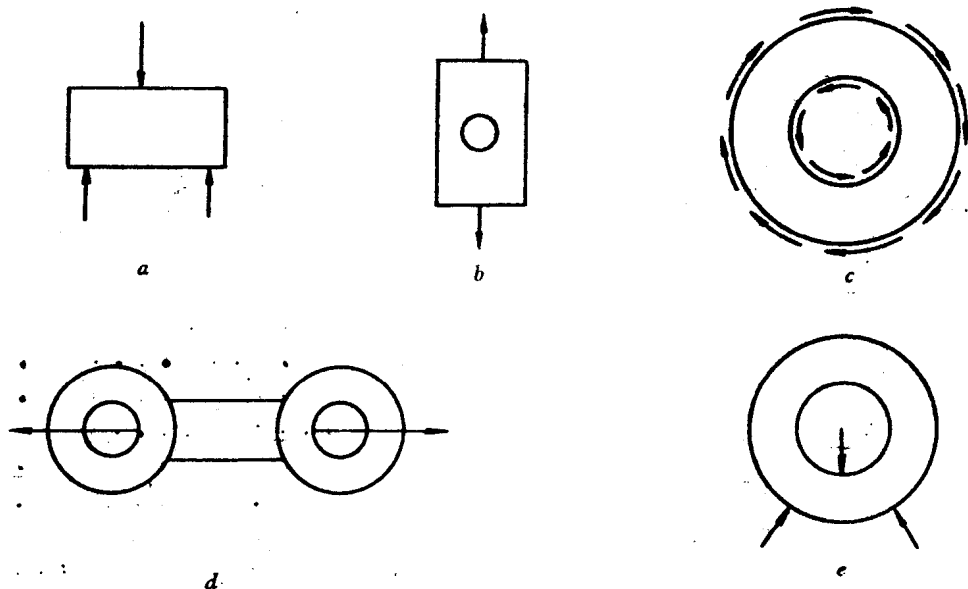


图 1.2 判断能否满足密切尔条件的图示

§ 1.2 非线性变形

有些材料在外力作用下, 物体中的应力与应变之间不是线性的, 而是非线性的, 这属于材料非线性。下面介绍描述非线性应力—应变关系的几种数学表达式。

幂次关系 幂次关系的应力—应变曲线如图 1.3 所示。用下列幂次关系描述此曲线, 即

$$\tau_i = A \gamma_i^m \quad (1.26)$$

其中 τ_i 和 γ_i 分别是剪应力强度和剪应变强度, A

是变形系数, m 是硬化系数, $0 \leq m \leq 1$ 。用应力和应变张量的三个主值表示 τ_i 和 γ_i , 则有

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$$

在纯剪切时, 式(1.26)取如下形式:

$$\tau = A \gamma^m \quad (1.26A)$$

在单轴压缩或拉伸时, 式(1.26)取如下形式:

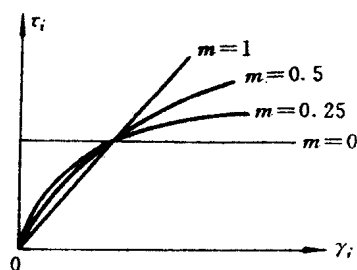


图 1.3 幂次关系的应力—应变曲线

$$\sigma_x = A_x \epsilon_x^m \quad (1.26B)$$

式中, $A_x = A \cdot [2(1+\mu)]^m \cdot 3^{0.5(1-m)}$, 参数 A_x 是沿 x 方向单轴拉伸或压缩的变形模量, A 是纯剪变形模量。

严格地讲, 幂次关系有其缺点: 首先, m 值不能赋予任何物理意义; 其次, 在 $\gamma_i \rightarrow 0$ 时, $d\tau_i/d\gamma_i \rightarrow \infty$, 这意味着在 $\gamma_i \rightarrow 0$ 时, 变形模量 $d\tau_i/d\gamma_i \rightarrow \infty$ 。也就是说初始切线模量为无穷大, 这与实际材料的性质相差较大。当 $\gamma_i \rightarrow \infty$ 时, $d\tau_i/d\gamma_i$ 以很慢的速率趋于零, 即不容易出现流动状态, 物体将无限制地变化。这种性质在粘性压缩下能出现, 但在剪切尤其在拉伸情况下不会出现。但由于函数关系简单, 而且与一些材料如部分岩石、土的试验结果较吻合, 因此在描述非线性变形时, 有时也采用幂次关系。

分数—线性关系 应力—应变之间的关系为

$$\tau_i = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i} \cdot \gamma_i \quad (1.27)$$

式中有 G_0 和 τ_s 两个参数, 其物理意义解释如下。

改写式(1.27)为

$$\frac{\tau_i}{\gamma_i} = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i}$$

当 $\gamma_i \rightarrow 0$ 时, $\tau_i/\gamma_i \rightarrow G_0$, 因此 G_0 为相应无穷小变形时的初始剪切模量。如果 $\gamma_i \rightarrow \infty$, 由式(1.27)可得 $\tau_i \rightarrow \tau_s$ 。因此 τ_s 为变形无限发展时所达到的应力极限值, 即流动极限。在单轴压缩或拉伸时, 式(1.27)可改写为

$$\sigma_x = \frac{E_0 \sigma_s}{\sigma_s + E_0 \epsilon_x} \cdot \epsilon_x \quad (1.28)$$

此时 E_0 和 σ_s 分别是初始模量和流动极限。

式(1.27)和(1.28)所确定的剪切和压缩模量为

$$G(\gamma_i) = \frac{G_0 \cdot \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i}, \quad E(\epsilon_x) = \frac{E_0 \sigma_s}{\sigma_s + E_0 \epsilon_x} \quad (1.29)$$

当 τ_s 或 σ_s 趋向于无穷大时, $G(\gamma_i) = G_0$, $E(\epsilon_x) = E_0$, 此时式(1.27)和(1.28)变成线性的虎克定律。分数—线性关系既描述材料极限状态之前的情况, 又描述材料极限状态, 并且包括了变形指标 G_0 和强度指标 τ_s 。

双曲线关系 一些材料在三轴压缩时, 得出的应力—应变曲线近似为双曲线, 可写成下列方程:

$$R = \frac{\epsilon}{a + b\epsilon} \quad (1.30)$$

$$\text{或} \quad \frac{\epsilon}{R} = a + b\epsilon \quad (1.31)$$

其中 R 是主应力差, a 、 b 为实验常量。现根据方程式(1.30)先确定初始弹性模量 E_i , 即

$$E_i = \left(\frac{R}{\epsilon} \right)_{\epsilon \rightarrow 0} = \frac{1}{a}$$

极限抗压强度 R_{∞} 为: $R_{\infty} = (R)_{\epsilon \rightarrow \infty} = 1/b$

上式也是方程(1.30)的渐近线, 方程(1.30)的曲线如图 1.4 所示。

应力和体积变形之间的非线性关系也可用幂次关系表示,即

$$\sigma_0 = D \epsilon_0^n \quad (1.32)$$

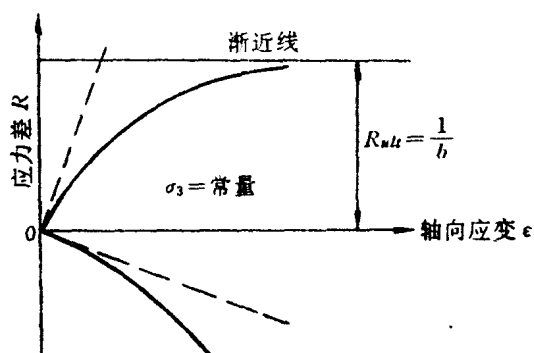


图 1.4 双曲线关系的应力—应变曲线

也可用下列分数—线性关系表示:

$$\sigma_0 = \frac{K_n \cdot \epsilon_i}{\epsilon_i - \epsilon_0} \cdot \epsilon_0 \quad (1.33)$$

式(1.32)和式(1.33)中 D 、 n 、 K_n 、 ϵ_0 是常数,由实验确定。

§ 1.3 塑 性

加在材料上的力若达一定值后,材料的变形将明显增加,或应力保持不变而变形不断增加(如图 1.1a 中的 DE 段),即形成塑性流动,卸载时产生不可恢复的永久变形,此时我们说材料进入塑性状态,表现出塑性特性。材料的塑性一般要在应力达到一定程度时才明显表现出来。对于有明显屈服极限 σ_s 的金属材料,仅当施加在材料上的应力达到 σ_s 时,才会出现塑性流动,产生很大的塑性变形。要判断材料是否进入塑性状况,这在单轴拉伸、压缩或纯剪切等简单应力状态下是比较容易的,只需判断施加的应力是否到达屈服极限就可以了。但在三维应力状态下,它是一点应力分量的综合指标,要根据一定屈服条件来判断。另一方面塑性流动仅当施加在物体上的应力达到或超过 σ_s 时才出现,是在一定应力下发生的无限制塑性变形,它和以后我们将讲到的粘滞性流动有相同之处,也有不同之处,其差别以后将予以说明。一些岩石、土等材料的应力—应变曲线具有明显的不可逆非线性特性,无明显屈服极限。即使在低应力下,也具有塑性。在低应力下卸载时仍有永久变形就可说明这一点。岩石在三轴高压下具有显著塑性,图 1.5 是白云岩的测试结果。它说明岩石的塑性要在应力达到一定值后才显现出来,而且具有塑性强化的性质。

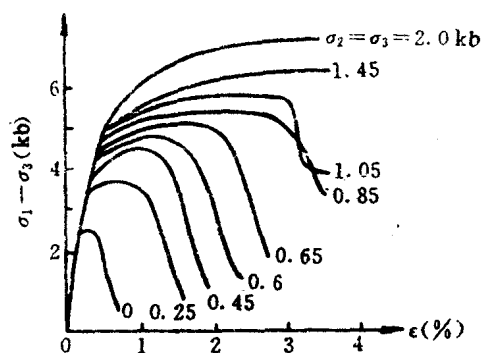


图 1.5 Dunham 白云岩常规三轴压缩试验得出的应力—应变曲线^[1.4]

注:图中 kb 为非国际单位制单位,它与国际单位制单位的换算关系为 $1 \text{ kb} = 100 \text{ MPa}$

在实际解决塑性力学问题时,常常根据具体情况将应力—应变曲线加以简化,从而得出

理想的力学介质模型。较常用的简化模型有以下几种。

1. 理想刚塑性模型

图 1.6 是理想刚塑性体，其特点是当应力 σ 达到屈服极限 σ_s 前，材料的变形很小，把材料视为不变形体。当 $\sigma = \sigma_s$ ，进入塑性状态时，材料丧失了继续抵抗外力的能力，其变形出现塑性流动。

2. 理想弹塑性体

图 1.7 是理想弹塑性体的应力—应变曲线。它所表示的材料的特点为： $\sigma < \sigma_s$ 时，材料是线弹性体；当 $\sigma = \sigma_s$ 时，弹性应变达到最大值 ϵ_s ，材料进入塑性状态，出现塑性流动，且具有理想塑性的性质。这种材料的应力—应变关系为

$$\sigma = E\epsilon, \quad \epsilon \leq \epsilon_s = \sigma_s/E$$

$$\sigma = \sigma_s, \quad \epsilon > \epsilon_s = \sigma_s/E$$

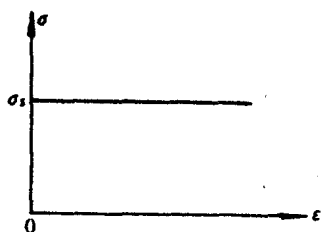


图 1.6 理想刚塑性体

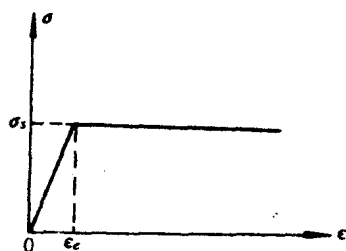


图 1.7 理想弹塑性体

3. 线性强化弹塑性体

其应力—应变关系如图 1.8 所示，它是将实际的非线性应力—应变曲线简化为两条折线。对于无明显 σ_s ，且在一定应力后表现出塑性强化性质的材料，是较为适用的。这种材料的应力—应变关系为

$$\sigma = E\epsilon, \quad \epsilon \leq \epsilon_s = \sigma_s/E$$

$$\sigma = \sigma_s + E_1 \cdot (\epsilon - \epsilon_s), \quad \epsilon > \epsilon_s$$

E 和 E_1 分别是两段直线的斜率， E_1 是强化模量。

一些材料的应力—应变曲线是非线性的，不但无明显 σ_s ，而且在加载初期的应力—应变曲线也是非线性的。这些材料也具有塑性强化性质。此时也可用 § 1.2 节介绍的非线性应力—应变曲线的几种数学表达式来描述其塑性强化，例如幂次关系、分数—线性关系、双曲线关系等。

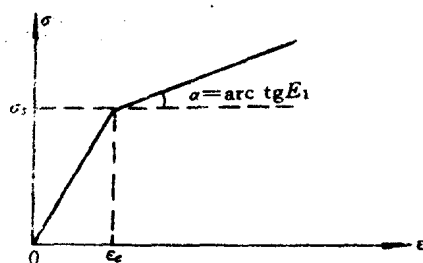


图 1.8 线性强化弹塑性体

§ 1.4 粘 滞 性

物体在应力作用下，内部质点发生相对位移时表现出来的抵抗位移的特性称为粘滞性，又称为内摩擦性。固体材料在一定条件下，即使受恒定外力作用，变形也会随时间逐渐增加，内部质点也会做相对位移，也具有粘滞性。具有一定粘度的液体或气体也具有粘滞性。把粘滞性称为内摩擦性是考虑到物体（固体、液体、气体）内部质点相互位移时，质点相互接触产生的摩擦力，阻碍了质点间的相互位移。它和物理学中讲到的两固体表面间的摩擦有不同之处，