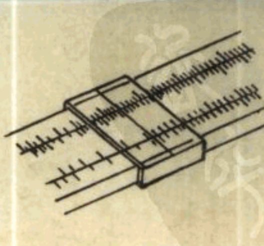
科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數學

(廿一至廿四冊合訂本)

湯元吉 主編



徐氏基金會出版

科學圖書大庫

自然科學叢書之一

數　學

(廿一至廿四冊合訂本)

湯元吉　主編

徐氏基金會出版

編 輯 要 旨

一・本叢書包括數學、物理、化學、生物等四種。

二・本叢書物理、化學、生物等三種，均係採用德國魯斯汀(Rustin)函授學校之課本；數學一種，則係採用德國馬特休斯(Mathesius)函授學校之課本，分別遴請專家迻譯。

三・本叢書之供應對象，主要爲中等以上學校之學生、自行進修人士及從事教授各該有關課業之教師，故其內容亦以適合上述各界人士之需要爲主旨。

四・原書內於每一相當節段，均附有習題、複習題、試題及論文作業等，可使在學者增加反覆研討之機，自修者亦易得無師自通之樂。本叢書對於前三者均已予以保留，俾利讀者之研習。至於論文作業題目，本係該函授學校對於所屬學生之另一種教學措施，學生於作成論文後，校方尚需負修改之責，與本叢書旨趣未盡相同，故均於正文內予以省略，惟爲存眞起見，一俟本叢書出齊後，當彙印單行本，以供讀者參考。

五・本叢書因係依據原書格式譯輯而成，故未能於每一學科之首册中編列總目，擬俟全書出齊後，另行編印專册，以供讀者檢閱。

六・本叢書數學原文，每講約爲六萬字，而其餘各書字數自二萬餘字至四萬餘字不等，且各講自成段落，不能分割，故爲便利讀者及減輕讀者負擔，只能將其每二講或三講合印爲一册，字數遂在七萬餘字至九萬餘字之間。

七・本叢書所有各種科學名詞，一律採用國立編譯館輯譯，教育部審

定公布之名詞；但主編者認爲必要時，亦偶用其他譯名代替之，其爲上述公布名詞中所無者，則出於主編者或譯者之創擬。該項替代或創擬之名詞，是否妥善無疵，未敢自是，倘冀海內專家學者不吝賜教。

八・本叢書之迻譯工作係由多人執筆，行文屬辭，難免各具風格，主編者能力時間，均屬有限，故雖竭智盡慮，勉爲整理，亦僅能使其小異而大同，尚祈讀者諒之。

九・本叢書原文篇帙浩繁，約近五百萬字，出版須依一定進度，編者勢難將譯文與原文逐一核對，倘有未盡妥洽之處，亦請讀者隨時指教，俾於再版時更正，幸甚幸甚！

主編者謹識

序

居今日而欲致國家於富强之林，登斯民於康樂之境，其道無他，要在教育、文化、經濟諸方面力求進步而已。自然科學之研究與發展，屬於文化領域之一環，同時亦爲國防建設之主動力，其在教育設施方面，實佔有甚大之比重，久爲識者所共喻

巴西華僑徐君銘信，身繫異邦，心縈祖國，鑒於自然科學之發展與夫建國前途所關之鉅，嘗思盡一己之力，爲邦人士格物致知之助。比年以來，其慨捐於國內學術機構者，固已爲數不貲。前歲之冬，復搜購德國著名函授學校之數學、物理、化學、生物等優良課本約五百萬言寄臺，經東海大學吳校長德耀與溫院長步頤之介紹，欲以迻譯刋行，嘉惠學子之任，委諸元吉，自維學殖荒落，本不敢承，惟感於徐君所見者大，所志者遠，殊不宜過拂其意，爰勉受義務主編及統籌出版之命。嗣經先後約請江鴻（數學總執筆人）、宋洌、李煥槃、南登岐、孫蔭年（物理學總執筆人）、張壽彭、陳喜棠、許巍文、黃友訓、傅貽椿、熊俊（生物學總執筆人）、廖可奇、劉泰庠、鐘恩寵、關德懋（以姓氏筆劃爲序）諸君分任迻譯，復承臺灣新生報謝總社長然之、王社長嘯生及顏副總經理伯勤慨允由該社擔任印刷及發行工作，其事遂舉。顧以個人精力時間，均屬有限，一年以還，竭知盡能，時以能否符合信達雅之準則爲慮，幸賴各方碩彥陳力就列，各自靖獻，得如預期出書，以餉讀者，實爲元吉精神上莫大之收穫。今後倘蒙文敎先進及讀者不吝匡翼，俾在吾國科學發展史上日呈緝熙光明之象，遂徐君之初願於萬一，並使其今後仍就此途徑邁進之志事，（徐君近復精選英文本初級科學百科全書，交由科學勵進中心* 譯印。）永感吾道不孤，邪許同聲，則尤元吉一瓣心香，朝夕禱祝者也。玆值本書出版伊始，謹誌涯略，並向協助譯印諸君子敬致感謝之忱。

湯元吉序於臺北

---

* 該中心爲一不以營利爲目的之財團法人，其宗旨在於促進科學教育、發展科學研究及介紹科學新知。現任董事爲李熙謀、錢思亮、趙連芳、林致平、徐銘信、李先聞、戴運軌、鄒堃厚、湯元吉等九人。

數學第二十一册目錄

上册　微積分學

頁數

下册　解析幾何學

上冊　微積分學

指數函數與對數函數（續）

$\mathbf{y=a^x}$ 319

在上面我們講到指數函數和對數函數的微積分理論時，是由一般熟知的函數　　$y=2^x$ 及 $y=3^x$
出發（參閱第二十冊中之〔287〕至〔289〕節），但還沒有學到如何使這些函數微分，而祇不過將一般函數 $y=a^x$ 中最重要的特殊情形（即 $y=e^x$）之如何微分及積分特別提出來研究了一番而已。

一般函數 $y=a^x$ 以及特殊函數 $y=2^x$ 等等的微分，現在便可還元於 $y=e^x$ 之微分，只要我們在 a^x 與 e^x 兩者之間建立起計算的關係。

在第二十冊中之〔296〕節，我們曾經寫出一條了解乘冪意義之人一看就會明白的方程式：

$$p=b^{{}^{b}\log p}$$

好比方程式 $2=10^{{}^{10}\log 2}$ 是說，假如我們先在以 10 爲底的常用對數表上查出屬於2的對數 0.3010——各位如此不知做過多少次了——，然後只要將底數 10 自乘 0.3010，便可得到整數 2；那麼一般方程式 $p=b^{{}^{b}\log p}$ 也就是說，假如我們將底數 b 以其所屬 p 的指數（即對數）自乘，就可得到乘冪 p。因此，我們可將 a^x 乘冪的底數寫成：

$$a=b^{{}^{b}\log a};$$

尤其若將 e 選爲底數 b，亦可寫成：

$$a=e^{{}^{e}\log a}$$

因爲我們已將 ${}^{e}\log$ 簡書爲 ln（參閱第二十冊中之〔295〕節），使到底數 e 並非本身出現，卻賴 ln 符號以形成，故上式又可寫成：

$$\boxed{a=e^{\ln a}}$$

以文字說明：**設將底數 e 以任何一數 a 的自然對數自乘，卽得該數 a 作爲底數e的乘冪。**

我們對於這點有所認識之後，便可對函數 $y=a^x$ 進行微分：

$$y=a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\cdot\ln a}$$ （參看第六册中之〔593〕節）

因 $\ln a$ 沒有包含變數，其本身乃是一個常數，所以函數$y=e^{x\cdot\ln a}$ 的微分與函數 $y=e^{x\cdot m}$ 的微分相同，如果 $m=\ln a$ 的話。依據第二十册〔292〕節第二習題，我們知道：

$$\frac{d\,e^{x\cdot m}}{dx}=e^{x\cdot m}\cdot m\,;$$

同理：

$$\frac{de^{x\cdot\ln a}}{dx}=e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a$$

因剛才已證明 $e^{x\cdot\ln a}=a^x$，故可求得：

$$\boxed{\frac{da^x}{dx}=a^x\cdot\ln a}$$

茲擧數例如下：

試求函數 $y=2^x$ 的微分係數！

按照上面所講的微分公式，$y=2^x$ 之微分係數應爲

$$y'=\frac{d2^x}{dx}=2^x\cdot\ln 2=2^x\cdot 0.6931$$

($\ln 2=0.6931$ 在第二十册〔295〕節已予註明，或在自然對數表中亦可查出)。——我們現在對於幾個固定之 x 值計算 y'，例如對於 $x=0$：

$$y=2^0=1\,;\qquad y'=2^0\cdot\ln 2=0.6931$$

請各位試求於 P 點 $\{x=0;\quad y=1\}$ 沿曲線 $y=2^x$ 所作切線的傾斜度 τ（參看第二十册中之〔288a〕圖）！結果求得 $\tau\approx35°$ 此值相當於由計算而得的微分係數：

$$\frac{dy}{dx}=tg\tau=0.6931\,; \qquad \sphericalangle\tau\approx34.7°$$

習　題：

試仿照上述各公式微分下列各函數，並求其傾斜度：

1) $y=2^x$，設 $x=1$；

2) $y=2^x$，設 $x=2$；

3) $y=3^x$，設 $x=0$；

4) $y=3^x$，設 $x=1$；

5) $y=3^x$，設 $x=2$

對數之計算　　320

在第二十册〔295〕節中，各位僅看見少數幾個自然對數；而我們並沒有在任何地方介紹過這些對數的詳細用表。（本書第五册中雖有過普通對數表，但它們是以 10 爲底的，所以也叫做十進位的常用對數。）因此，如何由常用對數換算爲自然對數，或是顚倒過來，由自然對數換算成常用對數，似此學習對各位頗屬重要。

a) **由常用對數換算自然對數，** $ln\,a=f(lg\,a)$

我們得首先尋求一個方程式，其左邊爲 $ln\,a$，而在其右邊之 $lg\,a$ 則與任何常數發生計算上之聯繫，玆擧例說明之：

(α) $ln\,2=f(lg\,2)$

本題之答案暫以 x 表示之：

(β) $ln\,2=x$，或　$x=ln\,2$

在 (β) 式內並沒有如 (α) 式內所要求之 $lg\,2$，故須使 (β) 式變形，使到其中除了 $ln\,2$ 之外，也含有 $lg\,2$ 。如用下述的迂迴方法，便易於達此目的：

(β) 式（即 $x=ln\,2$）說明 x 是對數（或稱指數），我們可以此對數使底數 e 自乘而求得乘羃等於 2；那麼 (β)式一如下式，二者之涵義並無二致：

(γ) $e^x=2$

〔各位對此式應該一看就明白，其意義是：

$$x=lg\,2=0.3010$$

意卽 x 是底數 10 用以自乘的指數，這樣才能求出乘冪爲 2；因此方程式 $x=lg\,2$ 的涵義實與方程式 $10^x=2$ 相同。〕

爲了要使 (γ) 和 (β) 二式都能接受我們所需要的 $lg\,2$，應將 (γ) 式左右兩邊都化成對數，且須注意以 10 爲底（參看第五册中之〔452〕節及第六册中之〔602〕節）：

$$(\delta)\quad lg(e^x)=lg\,2;\quad x\cdot lg\,e=lg\,2;\quad x=\frac{lg2}{lge}$$

如將求得之 x 值代入 (β) 式內，則得（參看第二十册中之〔290〕節）：

$$(\varepsilon)\quad ln2=\frac{lg2}{lge}=\frac{0.3010}{0.4343}=0.6931$$

$$\begin{aligned} lg0.3010&=1.4786-2\\ lg0.4343&=\underline{0.6378-1}\\ &0.8408-1 \end{aligned}$$

由此可見 $x=ln\,2=0.6931$。參閱第二十册中之〔295〕節！

玆爲使此計算的構想一般化起見，應將 2 代以一般數字 a。又爲使讀者一目瞭然計，特將各式併列如下：

(ζ) 相當於 (β) 式： $x=ln\,a$；

(η) 相當於 (γ) 式： $e^x=a$；

(ϑ) 相當於 (δ) 式：

$$lg(e^x)=lg\,a;\quad x\cdot lg\,e=ln\,a;\quad x=\frac{lga}{lge};$$

(ι) 相當於 (ε) 式： $ln\,a=\dfrac{lga}{lge}=\dfrac{1}{lge}\cdot lg\,a$

由於因數 $\dfrac{1}{lge}=\dfrac{1}{0.4343}$ 在此種換算中每次均有出現，讓我們來索性把它一勞永逸地算出來：

$$\frac{1}{0.4343}=2.303；\text{再精確些應爲：}2.3026$$

$$\begin{aligned} lg1&=1.0000-1\\ lg0.4343&=\underline{0.6378-1}\\ &0.3622 \end{aligned}$$

結果：

$$(\kappa)\quad \boxed{\ln a=\frac{\lg a}{\lg e}=\frac{1}{\lg e}\cdot\lg a=2.3026\cdot\lg a}$$

各位在這些計算中倘需要用到 $\lg 2.3026$ 的話，可應用剛才求出之值：

$$\lg 2.3026=0.3622$$

習　題：

試按上式計算（1）$\ln 3$；　（2）$\ln 5$；　（3）$\ln 10$！

並請驗算結果之正確性（參看第二十册中之〔295〕節）。

b）**由自然對數求常用對數**，$\lg a=f(\ln a)$ 321

各位手邊倘有一本自然對數表，並且需要一個常用對數，便須進行這種計算。此外，這種計算在學理上也是有其意義的。

我們可由（ι）式經過簡單的變化導引下式：

$$(\lambda)\quad \boxed{\lg a=\lg e\cdot\ln a=0.4343\cdot\ln a}$$

例題：

$$\lg 2=0.4343\cdot\ln 2$$
$$=0.4343\cdot 0.6931=0.3010$$

由**自然對數**求**常用對數**時每次出現於（λ）式中的“因數” $\lg e=0.4343$，稱爲常用對數的**模數**（*Modul*），普通係用 M_{10} 代表。

因此，求 $\lg a$ 的（λ）式亦可簡寫爲：

$$(\mu)\ \lg a=M_{10}\cdot\ln a；\quad M_{10}=\lg e=0.4343$$

上述各公式對於對數的運算，目前儘够用了。但以後我們還可學到，如何用完全不同的方法來計算對數。

$$\int a^x dx=?$$ 322

我們在此還是要利用 a 和 e 的關係（請看〔319〕節），即：

$$a^x=e^{x\cdot\ln a}$$

由此可將上式寫成：

$$\int a^x dx=\int e^{x\cdot ln\,a}dx=\int e^u dx\;;\quad u=x\cdot ln\,a$$

因 $ln\,a$ 與 x 無關，而是一個常數，故：

$$\frac{du}{dx}=ln\,a\;;\quad \frac{dx}{du}=\frac{1}{ln\,a}$$

我們按照第十九册中之〔256〕節運算如下：

$$\int a^x dx=\frac{1}{ln\,a}\int e^u du=\frac{1}{ln\,a}\cdot e^u+c=\frac{1}{ln\,a}\cdot e^{x\cdot ln\,a}=\frac{a^x}{ln\,a}+c$$

簡寫便為：

$$\boxed{\int a^x dx=\frac{a^x}{ln\,a}+c}$$

習 題：

我們既能由函數 $y=e^x$ 導出一般指數函數的微積分公式，故倒轉過來，$y=e^x$ 實為一般指數函數之普通公式的特殊情形，試證明之！

323 **$y={}^a\log x$**

〔319〕節一開始就說明我們可以微分一般**指數函數**，現在應該讓我們來談一談一般**對數函數** $y={}^a logx$ 的微分法則了。一如我們在〔319〕節曾經運用 a^x 和 e^x 之間的關係，作為輔助方法，那末現在當可利用 $ln\,x$ 和 ${}^a logx$ 之間的關係：即將 x 的數字堆積起來當作乘冪，先以 a 為底，後以 e 為底，再令等值的兩個乘冪彼此相等。假如以屬於 x 的對數使冪底 a 自乘，便可得乘冪 x 如下：

$$(\alpha)\quad x=a^{{}^a logx}$$

假如以屬於 x 的對數使冪底 e 自乘，則得另一乘冪 x：

$$(\beta)\quad x=e^{lnx}$$

由 (α) 及 (β) 二式可得：

$$(\gamma)\quad a^{{}^a logx}=e^{lnx}$$

若將底數 a 也用 e 來表示（看〔319〕節），則：

$$(\delta)\quad a=e^{ln\,a}$$

由 (δ) 及 (γ) 二式可得：

$$(\epsilon)\quad (e^{ln\,a})^{{}^a logx}=e^{lnx}$$

按照第六册中之〔593〕節予以變形後，則：

$$(\zeta)\quad e^{\ln a\cdot {}^{a}\log x}=e^{\ln x}$$

上式中因有相同之底 (e)，而乘冪亦屬相等，故兩邊之指數自然不能不一樣：

$$(\eta)\quad \ln a\cdot {}^{a}\log x=\ln x\text{；變形後則爲}$$

$$(\theta)\quad {}^{a}\log x=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

現在我們可將本節標題所稱一般對數函數寫成 $\ln x$ 的函數如下：

$$\boxed{y={}^{a}\log x=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x}$$

而使之微分。因爲 $\frac{1}{\ln a}$ 是一個常數，又參照第二十册〔296〕節所講，遂得微分式如次：

$$\boxed{\frac{d\,{}^{a}\log x}{dx}=\frac{d\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x}{dx}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}}$$

習　題：

1）　試按第二十册中〔285〕節導引與上式相同之公式！

2）　試由此一般公式導引對 $a=10$ 及 $a=e$ 的公式！

下面尚有許多微分 y 函數和計算積分的習題；其無積分符號者都是微分方面的習題。

3）　$y=a^{mx}$；　4）　$y=(a^{mx}+c)^{n}$；　5）　$y=a^{tgx}$；

6）　$y=lg\,\sin x$；　7）　$y=\frac{e^{x}}{1+x}$；　8）　$y=\frac{1}{\sin^{2}x}$；

9）　$\int\frac{\cos x}{\sin^{2}x}dx$；　10）　$\int arc\,tgx\,dx$；　11）　$\int arc\,\sin x\,dx$；

12）　$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$；　13）　$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^{2}}}$；　14）　$\int\frac{1}{e^{x}}dx$；

15) $\int\frac{e^x}{(e^x-1)^2}dx$； 16) $y=e^{lnx}$； 17) $y=x^n\cdot e^x$；

18) $y=sinx\cdot cosx$； 19) $y=ln(sinx\cdot cosx)$；

20α) $\int e^x\cdot sinx\,dx$； 20β) $\int e^x\cdot cosx\,dx$

以下各題必須應用第十九册〔256〕節所講之代換法，這對於初學者並不十分簡單，有時還得請教數學之能手。因此，我們在下列許多習題中先註明最重要的一個步驟，那就是所謂代換法。

21) $\int tgx\,dx$，$u=cosx$； 22) $\int ctgx\,dx$；

23) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$，$u=\frac{b}{a}\cdot x$； 24) $\int\frac{dx}{a^2+b^2x^2}$，$u=\frac{b}{a}\cdot x$；

第(25)及(26)二題比較容易，也許讀者自己可能找到合適的**代換法**。

25) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$； 26) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$；

27) $y=x^x$， 以 $x=e^{lnx}$ 代替之；

28) $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}$； $u=\sqrt{a^2+x^2}$

29) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$， $u=x+\sqrt{1+x^2}$；

30) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$， $u=x+\sqrt{x^2-a^2}$；

31) $y=\frac{x}{ln\,x}$，此函數在什麼地方有一極大或一極小？

32) $\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ 此題讀者初看似覺不難，爲什麼？各位一定先想到圓的中心方程式： $y=\sqrt{r^2-x^2}$（請看第十八册中之〔231〕節）。因本題中的 $\sqrt{r^2-x^2}$ 是列在積分號之後，讀者可能認爲它是屬於面積計算方面的，尤其各位倘以定積分代替已知之不定積分的話，例如：

$$+\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

似此定積分是要求計算某一定的面積，而這個面積乃是限於 X 軸，曲線 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$，以及屬於 $x=0$ 和 $x=r$ 的縱坐標範圍以內的，應爲四分之一圓，其半徑爲 r。因爲各位從第九册中之〔859〕節已知此面積的內容

，也許以為計算本題的不定積分並無困難之處。但當各位進一步去研究時，就會覺得這種積分實非一件易事。

我們應該將 $y'=\sqrt{r^2-x^2}$ 視為導微函數（用 y' 表示者以此），然後去探求所屬的基本函數。請看下面巧妙的代換方法：

$x=r\cdot\cos u$；$\frac{dx}{du}=-r\cdot\sin u$（參閱第十九册中之〔250〕節）；

$x^2=r^2\cos^2 u$； $\cos^2 u=\frac{x^2}{r^2}$； $\cos u=\frac{x}{r}$； $u=\text{arc}\cos\frac{x}{r}$（參看第廿册中之〔280〕節）；按照第十六册中之〔140〕節可知：

$$\sin u=\sqrt{1-\cos^2 u}=\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}=\frac{1}{r}\sqrt{r^2-x^2}\text{；}$$

$$\therefore\ y'=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2-r^2\cos^2 u}=\sqrt{r^2(1-\cos^2 u)}$$
$$=\sqrt{r^2\cdot\sin^2 u}=r\cdot\sin u$$

此外讀者可再依據第十九册〔225〕節之第五習題預備好我們後面要用的積分式：

$$\int\sin^2 u\,du=0.5(u-\sin u\cdot\cos u)+c$$

（我們要用這些輔助方法以解答當前的問題，各位事先當然無法知曉；可是各位對數學專家所表演的這種廣泛而精彩的手法，却更應因此加以欣賞。）按照第十九册〔256〕節所講可將下式列成：

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int\frac{dx}{du}\cdot y'du=\int-r\cdot\sin u\cdot r\cdot\sin u\,du$$ （參看十九册中之〔245〕節）；

$$=-r^2\int\sin^2 u\,du=\frac{-r^2}{2}(u-\sin u\cdot\cos u)+c$$

$$=\frac{+r^2}{2}(\sin u\cdot\cos u-u)+c=\frac{r^2}{2}\sin u\cdot\cos u-\frac{r^2 u}{2}+c$$

現在我們將所有 u 值代以 x 值，則得：

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{x}{r}-\frac{r^2}{2}\cdot\text{arc}\cos\frac{x}{r}+c$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}-\frac{r^2}{2}\text{arc}\cos\frac{x}{r}+c$$

似此積分公式的準確性，我們可拿本習題一開始就提到的四分之一圓的面積積分來驗證：

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} - \frac{r^2}{2} arc\cos\frac{x}{r}\Big|_0^r$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{r^2-r^2} - \frac{r^2}{2} arc\cos 1 - \left(\frac{0}{2}\sqrt{r^2-0} - \frac{r^2}{2} arc\cos 0\right)$$

$$= \frac{r}{2}\cdot 0 - \frac{r^2}{2}\cdot 0 - 0 + \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$ 不錯！

324 $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln\, f(x) + c$$

假如在積分號與 dx 之間有一分數，而此分數的分子是分母的微分係數時，便可應用這一積分規則。此規則可證明之如下：

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{\frac{dy}{dx}dx}{y} = \int \frac{dy}{y} = ln\, y + c = ln\, f(x) + c$$

上式中我們根據 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x = \Delta y$ 的寫法，將 $\frac{dy}{dx}dx$ 寫成 dy，乃是有理由的；據此遂可進而求其極限值。茲舉一例以明之：

$$\int \frac{3x^2}{x^3}dx = ln\, y + c = ln\, x^3 + c, \quad 因\ d(x^3+c) = 3x^2$$

習　題：

試依此規則計算下列各式：

1) $\int \frac{2x\,dx}{9+x^2}$；　2) $\int \frac{e^x\,dx}{e^x+a}$；　3) $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

325 **遞加函數 $y = a^x$**

一份財產（或其他任何量）在前後相等的各段時間內，假如每次都增加一相等數額時，這就是我們要討論的所謂直線式的遞增；它相當於函數 $y=ax+b$，各位可在本書第四冊〔376 *b*〕圖中很清楚的看出橫標 x 是表示過去時間段的數字，而縱標 y 則表示財產（躍進式）之大小，所以並不是這一節所說的**指數函數** $y=a^x$。

但我們在第四冊〔345 *a*〕圖中，曾經討論過一項增加的例子，却與函數 $y=2^x$（一般的說，便是 $y=a^x$）相應，雖然只限於整數的 x 值方始有效。這也就是說，在那裡我們所注意的乃是一份財產逐年加倍遞增，而不是它在一年當中如何變化的情形。再用另一說法，就是每個 x 值乃是用以表示

已告完成之時間段（年數）的數目，而每個 y 值則係用以表示一項財產之數值的。

本書第十四册第〔42〕節中曾經提到，一項財產 A（或一項資本）是如何遞增上去，假如存入銀行使之生息，然後又將利息陸續不斷的加進本金而再行息上加息的話。其一般計算本息的公式爲：

$$y=A\cdot q^x$$

式內 x 是表示過去的年數，y 是指最終之金額而言。

此公式顯然是一種指數方程式，狹義言之即是一個遞加函數。

在第十四册〔47〕節中，我們也曾將一年的分數（二分之一和四分之一）作爲時間段。但在同册〔48〕節中則係將一年中的利息打進本金 A，再使利上生息那段時間接近於零，而得到下式：

$$\lim_{n\to\infty} E_1=A\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

這極限值的主要成分是乘冪$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，而 n 則係趨向於無窮大，故：

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\cdots\cdots$$

因之，我們可將適合於這種極限情形的複利公式寫成：

$$\lim_{n\to\infty} E_1=A\cdot e\approx 2.718A$$

拿普通一般放款生息的情形來說，這個極限是不大容易接近的，因爲上式中的 n 值事實上是不會少于半年或四分之一年（即三個月）的。但有一種比較容易接近於此極限之情形，即好比在森林中生長的樹木，除了要受某種限制之外，總是不斷在增長的。

我們現在再拿上面最後一個方程式來研究一下，那爲首的一個數值A經過一年之後（或經過另一時期之後）會增加e倍，即 2.718 倍，假如利息（或其他增量）在那無限小的時間段之內增加了無數次的話。由此可見，這個式子中絕不含有可變值，所以並非函數方程式，亦即非遞加函數。但如列成下式：

$$y=\lim_{n\to\infty} E_x=A\cdot e^x$$

則 x 便表示年的變數（或其他固定時間段的變數），而這個式子就變成函數方程式，或狹義言之，變爲遞加函數了；這對上面已經提到過的有機物體不斷生長的那種情形不啻是一定律，祇不過應用時受有某種限制而已。

更接近於**指數函數**的實例，我們可在自然界的許多現象中（譬如單細