普通高等工科院校基础课规划教材

高等数学

（经济类）

蒋兴国　吴延东　主　编
张义清　副主编

机械工业出版社
China Machine Press

906

普通高等工科院校基础课规划教材

高 等 数 学

（经 济 类）

主　编　蒋兴国　吴延东
副主编　张义清
参　编　周秀珍　钱　林　孟国明　翟高岭
主　审　罗庆来

机 械 工 业 出 版 社

本书系普通高等工科院校基础课规划教材之一，供高等院校经济类各专业选用，亦可供其他相关专业选用。

本书系统并有重点地介绍了有关微积分的知识，选编了相当数量的典型例题。为了提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力，介绍了一定数量的经济应用例题。

考虑到中学数学教材的变化，本书预备知识中增加了被中学删去的但高等数学所必需的知识点，另有一章介绍了微积分数学模型，供选修用。

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详尽，通俗浅显，例题较多，便于教与学，并将编者多年的教学经验有机地融于教材中。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/蒋兴国，吴延东主编. —北京：机械工业出版社，2002.8

普通高等工科院校基础课规划教材. 经济类

ISBN 7-111-10489-7

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①蒋…②吴…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 044245 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：郑　丹　版式设计：霍永明　责任校对：姚培新

封面设计：陈　沛　责任印制：何全君

北京第二外国语学院印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5 · 13.375 印张 · 447 千字

0001—6000 册

定价：28.00 元

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪。这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德，明确的历史责任感和社会使命感，较强的创新精神、创新能力和实践能力，宽广的知识面和扎实的基础。基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力，关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力。由于基础学科本身的特点，以及某些短期功利思想的影响，不少人对大学基础教育的认识相当偏颇，我们有必要在历史的回眸中求前车之鉴，在未来的展望中创革新之路。我们必须认真转变教育思想，坚持以邓小平同志提出的“三个面向”和江泽民同志提出的“三个代表”为指导，以培养新世纪高素质人才为宗旨，以提高人才培养质量为主线，以转变教育思想观念为先导，以深化教学改革为动力，以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点，以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心，努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才。

基于上述考虑，中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅（原江苏省教委）和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会，组织编写了大学基础课程系列教材，作为加强教学基本建设的一种努力。

这套教材力求具有以下特点：

(1) 科学定位。本套教材主要用于应用性本科人才的培养。

(2) 综合考虑、整体优化，体现“适、宽、精、新、用”。

所谓“适”，就是要深浅适度；所谓“宽”，就是知识面要宽些；所谓“精”，就是要少而精；所谓“新”，就是要跟踪应用学科前沿，推陈出新，反映时代要求；所谓“用”，就是要理论联系实际，学以致用。

(3) 强调特色。就是要体现一般工科院校的特点，符合一般工科院校基础课教学的实际要求。

(4) 以学生为本。本套教材应尽量体现以学生为本，以学生为中心的教育思想，不为教而教。注重培养学生自学能力和扩展、发展知识能力，为学生今后持续创造性学习打好基础。

尽管本套教材想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前，但由于是一种新的探索，难免有这样那样的缺点甚至错误，敬请广大读者不吝指教，以便再版时修正和完善。

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合，在此，一并表示衷心感谢。

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任　殷翔文

2002年3月

前　言

20 世纪 80 年代初，为适应改革开放和市场经济发展的需要，我国高校在经济类专业教学中，增加了经济类高等数学的教学内容。此举无疑对培养合格的高级经济人才起了很大作用。步入新的世纪，高等教育形势发生了很大的变化，计算机技术的发展和普及，高等教育的大众化，中学数学教材内容较大幅度的删减，数学建模与数学实验课的设置等，都要求编写一本适应时代要求、有特色、高质量、切合实际的经济类高等数学教材。本书系普通高等工科院校基础课规划教材，就是为适应新形势而编写的。本书适用于经济类本科各专业，亦可供相关专业选用。

本书第 1 章增加了中学数学中删去的而高等数学所必需的知识点（如幂函数，积化和差，极坐标等）。第 8 章为微积分数学模型，供选修。

本书在编写时注重数学思想的渗透，重视对数学概念的产生及发展的分析。每章末附有阅读材料，介绍有关数学发展史及相关数学大师，以期调动读者学习数学的欲望。

本书力求结构严谨，说理浅显，叙述详尽，例题较多，便于自学。

参加本书编写的有：张义清（第 1、2 章），钱林（第 3 章），吴延东（第 4 章），孟国明（第 5 章），蒋兴国（第 6 章），翟高岭（第 7 章），周秀珍（第 8 章）。

本书承蒙东南大学罗庆来教授主审，对他的辛勤劳动，在此谨致谢忱。他的宝贵意见，为本书增色不少。

值得一提的是，机械工业出版社教材编辑室的郑丹和刘小

慧两位编辑，为本书的顺利出版做了大量细致艰巨的工作。值此付梓之际，对她们的劳动谨此致谢。

感谢扬州大学、淮阴工学院、南通工学院各级领导对本书的支持，在此一并深表谢意。

主观上编者力求编好此书，并数易其稿，囿于水平，加之时间仓促，仍不尽如人意，讹漏粗疏之处，恳请教学同仁及广大读者批评指教，俟修订时再臻完善。

编　者

2002年1月

目　　录

第1章 预备知识

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学研究的主要是变量之间的依赖关系。函数正是这种依赖关系的体现。函数是高等数学中最重要的基本概念。本章将在复习中学有关函数内容的基础上，进一步研究函数的性质、分析初等函数的结构。

1.1 函数概念

1.1.1 区间与邻域

1．实数概述

“函数”是整个高等数学中最基本的研究对象，本课程是在实数范围内研究函数，实数由有理数和无理数两大类组成，它有如下一些主要特性：

(1) 每一个有理数都可用分数形式$\frac{p}{q}$(p，q 为整数，$q\neq0$)表示，也可表示为整数，有限小数或无限循环小数。我们把无限不循环小数称为无理数。

(2) 实数是有序的，即任意两个实数 a、b，必满足下述三个关系式之一：

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

(3) 实数对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的，即对任意两个实数施行加、减、乘、除（除数不为 0）运算后仍是实数。

(4) 实数集具有稠密性，即任意两个不相等的实数之间有有理数，也有无理数。实数集与数轴上的点一一对应。

2．实数的绝对值

实数的绝对值有如下性质：

(1) 对于任意的 $x\in R$，有$|x|\geqslant0$。当且仅当 $x=0$ 时，才有$|x|=0$。

(2) 对于任意的 $x\in R$，有$|-x|=|x|$。

(3) 对于任意的 $x\in R$，有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$。

关于实数四则运算的绝对值，有以下的结论：

对任意的 x，$y \in R$，恒有

(1) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$（三角不等式）

(2) $|x-y| \geqslant ||x|-|y|| \geqslant |x|-|y|$

(3) $|xy| = |x||y|$

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

3. 区间与邻域

区间是高等数学中常用的实数集，包括四种有限区间和五种无限区间。

闭区间　$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$

开区间　$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

半开区间　$(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}$, $[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}$

无限区间　$(a, +\infty) = \{x | a < x\}$, $[a, +\infty) = \{x | a \leqslant x\}$, $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x | x \in R\}$

其中，a、b 为确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点。闭区间 $[a, b]$，半开区间 $[a, b)$ 及 $(a, b]$，开区间 (a, b) 为有限区间。有限区间的左、右端点之间的距离 $b-a$ 称为区间长度。$+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是记号。

区间在数轴上可表示为图 1-1：

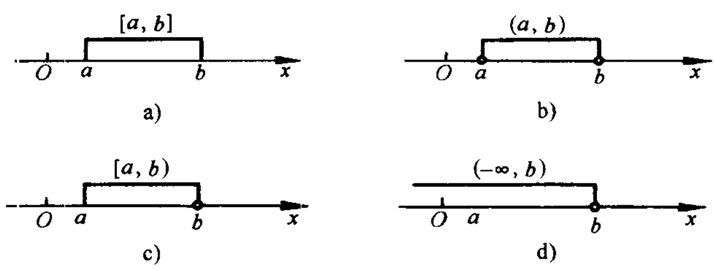

图 1-1

领域也是在高等数学中常用的概念。

称实数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\}$$

为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。由邻域的定义知

$$U(a, \delta)=(a-\delta, a+\delta)$$

表示分别以 $a-\delta$，$a+\delta$ 为左、右端点区间长度为 2δ 的开区间。（见图 1-2a）

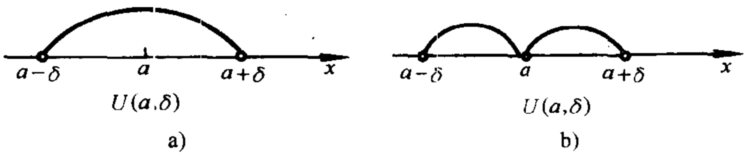

图 1-2

在 $U(a, \delta)$ 中去掉中心 a，实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$。显然，去心邻域 $\mathring{U}(a, b)$ 是两个开区间 $(a-\delta, a)$ 与 $(a, a+\delta)$ 的并集，即 $\mathring{U}(a, \delta)=(a-\delta, a) \cup(a, a+\delta)$（见图 1-2b）。

1.1.2 函数概念

1. 变量与常量

在生产实践和科学研究中，会经常遇到各种各样的量。例如温度、时间、路程、重量、体积、速度、压力、物价、利率等。在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量。例如，在伽利略所研究的自由落体运动中，在同一地点，重力加速度 g 就是常量，而时间 t 和路程 s 就是变量。又如在研究圆的面积与半径的关系时，半径 R 与圆的面积 S 就是变量，而周长与直径的比率 π 就是常量。常量常用字母 a、b、c、d 等来表示，变量常用字母 x、y、z、t 等来表示。

常量与变量是相对的，不是绝对的。例如，重力加速度 g 在同一地点来考虑，是常量，在不同地点来考虑，是变量。又如，在一定时间间隔内，某种商品的价格，在计划经济模式中是常量，在市场经济模式中是变量。

2. 函数的概念

在同一过程中，往往有几个变量同时存在，变量与变量之间的依赖关系正是高等数学研究的主要问题。本章只讨论两个变量的情况。先看下面的例子。

例 1-1 自由落体运动。设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的依赖关系由下式给定：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 是重力加速度，假定物体着地时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任取一值时，由上式就可以确定相应的 s 值。

例 1-2 运输公司对所运的物品分段进行记费。设距离为 x，则计算运费时打折的情况为：

$x<250$	没有折扣
$250\leqslant x<500$	2% 折扣
$500\leqslant x<1000$	5% 折扣
$1000\leqslant x<2000$	8% 折扣
$2000\leqslant x<3000$	10% 折扣
$3000\leqslant x$	15% 折扣

设每公里每吨的基本运费为 a，货物的重量为 b，折扣为 $c\%$，则总的运费 y 的计算公式为：

$$y=abx(1-c\%)$$

上面两个例子均表达了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应一个法则，根据各自的法则，当其中一个变量在某一数集内任取一值时，另一变量就有确定值与之对应。两个变量之间的这种依赖关系称为函数关系。

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。称 D 为该函数的定义域，称 x 为自变量，y 为因变量。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$。当 x 取遍 D 的各个值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域。

在函数 $y=f(x)$ 中记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系，f 也可改用其他字母如 F、ϕ、f_1、f_2 等。

在实际问题中，函数的定义域是由实际意义确定的，如例 1-1 中的定义域为 $[0, T]$，例 1-2 中的定义域为 $[0, +\infty)$。在研究由公式表达的函数时，我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的数集。例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 定义域是 $[-1, 1]$，

函数$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是 $(-1, 1)$。

例 1-3 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$的定义域。

解 要使函数 y 有定义，必须使

$$\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

所求函数的定义域为：$[-2, 1) \cup (1, +\infty)$。

例 1-4 设有函数$f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$。它们是否为同一个函数?

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，而$g(x)$ 在$x=-1$ 点无定义，其定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$。由于$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同，所以它们不是同一个函数。

注意，两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则分别相同（从而值域也相同)。

如果自变量在定义域内任选一个值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数。以后凡是没有特别说明，本书讨论的都是单值函数。

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，在平面直角坐标系 xOy 中，对于任意的 $x \in D$，通过函数$y=f(x)$ 都可确定一个点 $M(x, y)$，当 x 取遍定义域 D 中的所有值时，点$M(x,y)$ 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的图形。一个函数的图形通常是一条曲线，（见图 1-3)。因此，又称函数 $y=f(x)$ 的图形为曲线$y=f(x)$。

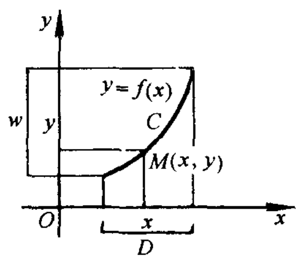

图 1-3

1.1.3 函数的表示法

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数。为了能很好地研究函数关系，就应该采用适当的方法把它表示出来。函数的表示法通常有三种：解析法、图示法、表格法。

1. 解析法

用运算符号将自变量与相关的常量连接成一个式子，来表示函数的方法叫解析法，也叫公式法。如例 1-1、例 1-2 中的函数都是用公式法表示的。解析法的优点在于能具体运算，并利于理论研究，它是表示函

数的基本方法。

有些函数在其定义域上的对应法则不能由一个式子表示，即在定义域的不同区段上由不同的式子来表示，这样的函数叫做分段函数。例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

就是分段函数。

2. 图示法

函数 $y=f(x)$的图形（见图 1-3）直观地表达了自变量 x 与因变量 y 之间的关系。图示法的主要优点是直观性强，函数的主要特征在图上一目了然。例如，因变量的增减情况及因变量增减的快慢等都可以通过曲线的升、降及陡、缓表示出来。

例 1-5 某河道的一个断面如图 1-4 所示，在断面 xOy 上，离岸边距离为 x 处的深度为 y。x，y 之间的函数关系由图 1-4 表示，函数的定义域为 $[0, b]$。

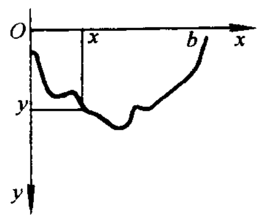

图 1-4

图示法的缺点是不便于作理论上的分析、推导和运算。

3. 表格法

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出。例如，大家熟悉的对数表、开方表和三角函数表等都是用表格法来表示函数的。

表格法表示函数的优点是使用方便，可以直接得到函数值，缺点是数据不全，不便于进行运算和分析。

函数的三种表示法各有优点和缺点，针对不同的问题可以采用不同的表示法，有时为了把函数关系表达清楚，往往同时使用两种以上的表示法。本书一般采用公式法表示函数，为了直观，经常辅之以图示法(即画出函数的图形)。

1.2 函数的几种特性

1.2.1 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，如果存在正数 M，使得对于任意的 $x\in X$，都有不等式

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 x 上有界。

有界函数图像的特点是它夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间（见图1-5）。

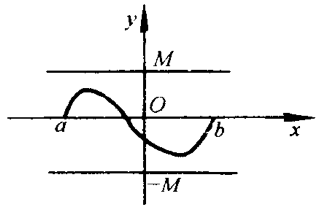

图 1-5

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的。这是因为对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有

$$|\sin x| \leqslant 1$$

如果对于任意一个给定的正数 M，总存在 $x_1 \in D$，使得 $|f(x_1)| > M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界。

应该注意，函数的有界性，与所取数集有关。例如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间（1，2）内是有界的，而在区间（0，2）内无界。

1.2.2 函数的单调性

函数的单调性可定义如下：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $\mathrm{I} \subseteq D$。如果对于任意的 x_1，$x_2 \in \mathrm{I}$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有

(1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间Ⅰ上单调增加，特别当 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立时，则称函数 $y=f(x)$ 在区间Ⅰ上严格单调增加。

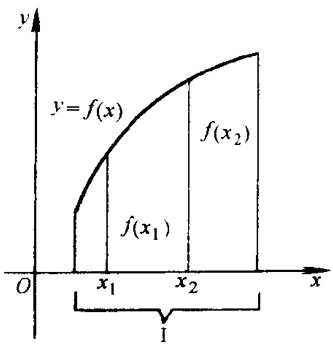

图 1-6

(2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间Ⅰ上单调减少，特别当 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立时，则称函数 $y=f(x)$ 在区间Ⅰ上严格单调减少。

单调增加，单调减少函数，统称为单调函数。对于严格单调增加或严格单调减少的函数统称为严格单调函数。

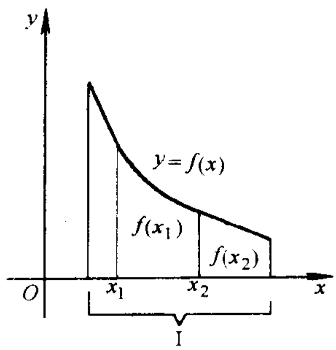

图 1-7

严格单调增加的函数的图形是沿 x 轴正向上升的（见图1-6）；严格单调减少的函数的图形是沿 x 轴正向下降的（见图1-7）。

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$