代數補充講義

—排列組合級數和或然率—

魏庚人 編

商 務 印 書 館

代數補充講義

——排列組合級數和或然率——

魏庚人 編

商務印書館

代數補充講義

（排列組合級數和或然率）

魏庚人編

商　務　印　書　館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司發行

商務印書館北京廠印刷
㊉（52538）

1952年4月初版　1953年6月3版
印數9,501—16,500　定價￥6,500

編者的話

中學數學教師與高中學生，要想在數學方面，找本參考書看看，是很難滿意的。因爲一般課本，程度大致相近，看了沒有多大的幫助；較高一級的書，常因程度過深，不易看懂，只好知難而退。所以適當的數學參考書籍，是很迫切需要的。我們數學工作者，應當編一套中學數學補充講義，以滿足中學師生的渴望。編者以拋磚引玉的辦法，先編代數補充講義一册，其中包括排列、組合、級數及或然率等。因爲中學生讀過代數以後，對於上述各項，似懂非懂，解題更無把握，教師輔導亦感束手無策。讀過此書，橫的方面，可以擴充推廣，縱的方面，可以略爲提高；對於定理公式，可以正確運用，對於解題推證，可以左右逢源。代數上的這一難關，就可以勝利的闖破，再不感覺困難了。

師範專科學校，選擇課本，也不容易。深的學非所用，淺的於事無補。本書除作高中學生及中學教師參考以外，還可以作爲師範專科學校的課本。惟編者學識淺陋，尙望讀者予以指正。

1951 年 7 月， 魏庚人

目　錄

代數補充講義

——排列組合級數和或然率——

第一章　排列及組合

第一節　排　　列

§1　**定義**　從 n 個物中，任取 r 個，依各種不同的次序，排成一列，可得種種不同的列，每一列稱爲一個排列。

這種排列的數，以 ${}_nP_r$ 或 ${}^nP_r$ 或 P_r^n 表示，也有用 n_r 表示的，如 ${}_5P_2=20$。

從 n 個物中，任取 r 個，不論它們的次序，成爲一組，可得種種不同的組，每一組稱爲一個組合。

這種組合的數，以 ${}_nC_r$ 或 ${}^nC_r$ 或 C_r^n 表示，也有用 $\binom{n}{r}$ 表示的，如 ${}_5C_2=10$。

§2　**基本定理**　若作某事有 m 個方法，已作這事後

更作他事有 n 個方法，則依次作這兩件事共有 mn 個方法。

普遍說，若作第一件事有 m_1 個方法，更作第二件事有 m_2 個方法，以至作第 r 件事有 m_r 個方法，則依次作此 r 件事共有 $m_1m_2\cdots\cdots\cdots m_r$ 個方法。

例 帽 2 頂，衣 4 套，鞋 3 雙，若穿戴齊全，共有 $2\times4\times3=24$ 種裝束。

§ 3 n 個相異物不許重複的 r 元排列($1\leqq r\leqq n$)

公式 ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$。

證 1. 見各教科書，用基本定理。

證 2. 以 a_1 在第一位的有 ${}_{n-1}P_{r-1}$ 種排列，

以 a_2 在第一位的有 ${}_{n-1}P_{r-1}$ 種排列，餘同此。

$\therefore\quad {}_nP_r=n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$，

同理 $\qquad {}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\,{}_{n-2}P_{r-2}$，

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_{n-r+2}P_2=(n-r+2)\,{}_{n-r+1}P_1。$$

諸式相乘，消去兩端的相同項，僅餘 ${}_nP_r$ 及 ${}_{n-r+1}P_1$；又 ${}_{n-r+1}P_1$ 的值顯然為 $n-r+1$。

$\therefore\quad {}_nP_r=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)$。

當 $r=n$ 時，${}_nP_n=n\ (n-1)\ (n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1=n!=\underline{|n}$。$n!$ 或 $\underline{|n}$ 稱為階乘 n 或 n 階乘。

又 $\qquad {}_nP_r$ 可化為 $\dfrac{n!}{(n-r)!}$。

例 1.　numeral 一字中的字母，每次全取的排列，其中

(1) 以子音始，以子音終的有多少？

(2) 母音在偶數位置上的有多少？

(3) e 不在中央的有多少？

解　(1) 選首位字母有 4 法，再選末位字母有 3 法；更選中間各位字母有 5！法，故所求的數爲 $4\cdot3\cdot5!=1440$。

(2) 在偶數位上母音有 3! 種排列法，在奇數位上子音有 4! 種排列法，每一母音排列法可與每一子音排列法結合，故所求的數爲 $3!\times4!=144$。

(3) 總排列數爲 7!，e 在中央的排列數爲 6!，故 e 不在中央的排列數爲 $7!-6!=4230$。

例 2.　a e i o u y 諸字母，每次全取的排列，其中 a e i 不被隔離有多少？

解　將 a、e、i、暫作爲一個字母，連 o、u、y 共四個字母，其排列數爲 4!；但 a、e、i 雖不隔離，然彼此的位置可以改變，故有 3! 個排列；故所求的數爲 $4!\ 3!=144$。

§ 4　n **個相異物許重複的** r **元排列** $(1<r,\ r\gtreqless n)$

公式　　n^r。

例 1.　用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 諸數字，可作成 $9^3=729$ 個三位數。

例 2.　三種獎品分給 7 個學生，若各生皆有得獎的資

格，共有幾種方法？

解　第一獎品可給 7 個學生中的任一個，第二第三獎品也如此，故共有 $7^3=343$ 種方法。

§ 5　**n 個不盡相異物的 n 元排列**　n 個物中，有 p 個各自相同，q 個亦各自相同，其他同此，則其不同的 n 元排列數的公式為

$$ {}_nP_n:p.q\cdots\cdots=\frac{n!}{p!q!\cdots\cdots}。$$

證　設 x 為所求的排列數，將其中 p 個相同物認為各不相同而排列，則有 $p!$ 個排列法。如此共有 $x\cdot p!$ 排列法。同理將 q 個相同物認為各不相同而排列，則有 $q!$ 個排列法。餘同此。故排列總數為 $x\cdot p!\cdot q!\cdots\cdots$，此與 n 個相異物中取 r 個的排列數相同，即　$x\cdot p!\cdot q!\cdots\cdots=n!$,

$$\therefore\quad x=\frac{n!}{p!\ q!\cdots\cdots}。$$

$$即\quad {}_nP_n:p\cdot q\cdots=\frac{n!}{p!\ q!\cdots\cdots}。$$

例 1.　用 Independence 一字中的字母，可有幾種排列法？

此字中共有 12 個字母，其中有 4 個 e，3 個 n，2 個 d，

故所求的結果為 $\frac{12!}{4!\ 3!\ 2!}=1663200$。

例 2.　Σx^3y^2z 及 $\Sigma x^3y^2z^2$ 爲 x、y、z、u、v 五個變數的對稱函數，問各有多少項？

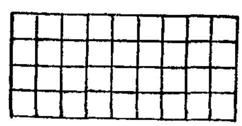
解　若將 Σx^3y^2z 的指數 3、2、1、的位置保持不變，而書 x、y、z、u、v 諸文字各三元排列於其下，即可盡得 Σx^3y^2z 的項，故其項數爲 ${}_5P_3=60$。

若用同法處理 $\Sigma x^3y^2z^2$，則 $x^3y^2z^2$ 一項共計二次，一爲 $x^3y^2z^2$，一爲 $x^3y^2z^2$。同理其中各項皆見二次，故 $\Sigma x^3y^2z^2$ 的項數爲 $\dfrac{{}_5P_3}{2}=30$。

例 3.　用二角輔幣 5 枚，一角輔幣 6 枚，一分輔幣 4 枚，分給 15 個童子，令各得一枚，則共有 $\dfrac{15!}{5!\,6!\,4!}=630630$ 種方法。

例 4.　某市區共有南北道十條，東西道五條，有人從市區的西南隅行向東北隅，經最短路程，共有幾種行法？

解　如圖由 A 至 B，須經南北路四段，東西路 9 段，設以 a 表示南北路的一段，b 表示東西路的一段，這問題的算法，與由 13 個字母 a a a a b b b b b b b b b 中每次全取的排列數相同。



故有 $\dfrac{13!}{4!\,9!}=715$ 種行法。

§6　n 個相異物取一個或多個的排列總數

公式：　${}_nP_1+{}_nP_2+{}_nP_3+\cdots\cdots+{}_nP_n$。

例　顏色不同的 4 個旗，或單出，或數旗縱列，共可做成幾種不同的信號？

解　所求的數為 ${}_4P_1+{}_4P_2+{}_4P_3+{}_4P_4=64$。

§7　環形排列

(一)　(1)　n 個相異物的 n 元環形排列，公式為 $(n-1)!$。

(2)　有時環形的方向不論，即順時針與反時針的方向皆視為一種，則排列數為

$$\frac{1}{2}(n-1)!。$$

(二)　(1)　n 個相異物的 r 元環形排列 $(1\leqq r\leqq n)$

公式：　$$\frac{{}_nP_r}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r}。$$

(2)　不論方向時，則排列數為

$$\frac{{}_nP_r}{2r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{2r}。$$

(一)項中的公式，實(二)項中公式的特例。

例 1.　8 人圍圓桌而坐，有 $7!=5040$ 種排列法。

例 2.　4 男 4 女圍圓桌而坐，男女相間，共有幾種坐法？

解　4 女先坐有 $3!$ 種方法，4 男後坐有 $4!$ 種方法。

$\therefore$　共有 $3!\ 4!=144$ 種方法。

例 3.　顏色不同的 n 個珠子，可穿成 $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 種不同的項圈。

習　題　一

1. 在 3000 與 8000 之間，數字不重的奇數有多少？其中能被 5 除盡的又有多少？　答 1232，224。

2. 若變數爲十個，$\Sigma x^4 y^3 z^2 u$，$\Sigma x^2 y^2 z^2 u$，$\Sigma x^3 y^3 z^2 u^2 v$ 諸對稱函數各有幾項？　答 5040，840，7560。

3. 用 1、2、3、4、5 五個數字，作大於 23000 的數，共有幾個？　答 90。

4. 學生 30 人，候選獎額三名，數學第一名，國文第一名，俄文第一名，皆可得獎，問有幾種獎法？若三名獎額爲數學第一名，數學第二名，數學第三名，則獎法又有幾種？

答 27000，24360。

5. 一主七客圍圓桌而坐，最上坐在主人右旁，次上客坐在主人左旁，問有幾種坐法？　答 120。

6. 今有 5 男 6 女，欲舉行雙打網球比賽，兩方須各爲一男一女，共有幾種分配法？　答 300。

7. 用 2、3、0、3、4、2、3 諸數字，可作成多少大於

1000000 的數？ 答 360。

8. 許重複使用 1、2、3、0、4、5、6、7 諸文字，可作成多少小於 10000 的數？ 答 4095。

9. 用 1、2、3、4、3、2、1 諸數字，可作成多少數？但單數數字必佔單數位置。 答 18。

10. 用 triangle 中的字母，可作成多少字？又以 t 始以 e 終的有多少字？ 答 40320， 720。

11. 用 draught 中的字母，母音不許分開，可作成多少字？ 答 1440。

12. 十份試卷，排列成行，不令最優者與最劣者相鄰，問有多少排法？ 答 2903040。

13. 有數學第一名及第二名，國文第一名及第二名，俄文第一名，物理第一名六種獎品分給 20 個學生中，問有幾種分法？ 答 57760000。

14. n 個物分給 P 個人，每人得多少毫無限制，有幾種分法？ 答 P^n。

15. ${}_{56}P_{r+6}:{}_{54}P_{r+3}=30800:1$，求 r。 答 41。

16. 解聯立方程 $\begin{cases} {}_nP_r=120, \\ {}_{n+1}P_r=360。\end{cases}$ 答 $\begin{cases} n=5, \\ r=4。\end{cases}$

第二節 組 合

§ 8 n 個相異物不許重複的 r 元組合 $(1\leqq r\leqq n)$

015－$_{12}C_2$

公式：$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}。$$

又　$${}_nC_r={}_nC_{n-r}。$$

例　有 12 個點，其中無 4 點在一平面上的，則此諸點能決定 ${}_{12}C_3=\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=220$ 個平面。

§ 9　${}_nC_0$, $0!$, ${}_nP_0$ **的意義**　${}_nC_0$, $0!$ 及 ${}_nP_0$ 本無意義，但爲使以上諸公式恆眞起見，規定 ${}_nC_0=1$, $0!=1$, ${}_nP_0=1$。理由如下：

(1) 在公式 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ 中，令 $r=0$，則 ${}_nC_0={}_nC_n=1$。

(2) 在公式 ${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ 中，令 $r=0$，

得　$${}_nC_0=\frac{n!}{0!n!},\ \therefore\ 1=\frac{1}{0!},\ \therefore\ 0!=1。$$

或在　$n!=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n(n-1)!$ 中，令 $n=1$，

得　$1!=1\cdot 0!$，　由是 $0!=1$。

(3) 由公式 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$ 變爲 ${}_nP_r=r!\,{}_nC_r$，令 $r=0$，

得　$${}_nP_0=0!\,{}_nC_0=1\times1=1。$$

§ 10　${}_nC_r$ **的最大值**　已知 n 的值，問 r 爲何數時 ${}_nC_r$ 的值最大？

$$\because \quad {}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}$$

由此關係式知$\dfrac{n-r+1}{r}\gtreqless 1$，從而 ${}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1}$；

即 $n-r+1\gtreqless r$ 或 $n+1\gtreqless 2r$ 或$\dfrac{1}{2}(n+1)\gtreqless r$，

從而 ${}_nC_r\gtreqless {}_nC_{r-1}$，

故 $r\lesseqgtr \dfrac{1}{2}(n+1)$ 從而 ${}_nC_r\gtreqless {}_nC_{r-1}$。

故 r 若小於$\dfrac{1}{2}(n+1)$，則 ${}_nC_r > {}_nC_{r-1}$。

若 n 爲偶數，則 ${}_nC_r$ 以 $r=\dfrac{1}{2}n$ 時爲最大，即 ${}_nC_{\frac{n}{2}}$ 最大。

若 n 爲奇數，則 ${}_nC_r$ 以 $r=\dfrac{1}{2}(n-1)$ 或 $r=\dfrac{1}{2}(n+1)$ 時爲最大，即 ${}_nC_{\frac{n-1}{2}} = {}_nC_{\frac{n+1}{2}}$ 爲最大的二值。

例 ${}_{12}C_r$ 的最大值爲何？又 ${}_{15}C_r$ 之最大值爲何？

解 當 $r=\dfrac{12}{2}=6$ 時，${}_{12}C_r$ 的值最大，即 ${}_{12}C_6$ 的值最大。

當 $r=\dfrac{15-1}{2}=7$ 及 $r=\dfrac{15+1}{2}=8$ 時，${}_{15}C_r$ 的

值最大，即 ${}_{15}C_7$ 及 ${}_{15}C_8$ 的值最大。

§ 11　n 個相異物許重複的 r 元組合　($1\leqq r$, $r\gtreqqless n$)

公式：
$$ {}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}$$
$$=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}。$$

證　試取以下問題考之：由 1、2、3、4 四個數字中擇取三個如許重複，共有幾種方法?

此種選擇法，可以 111，112，124 爲例，其中有三個數字相同的，有兩個數字相同的，有三個數字全不同的。

若就 111，112，124，依次加 0、1、2 於諸數字，即得 123，124，136 此即三個三元組合，用 1、2、3、4、5、6 諸數字不許重複而組成的。由是可知若將 111，112，124 等選擇法，各依大小順序排列其數字，全數書出，列成一表，然後依各選擇法依次加 0、1、2 於諸數字，即可盡得 1、2、3、4、5、6 諸數字不許重複的三元組合，無遺漏亦無重見的。因數字的數爲 $4+(3-1)$ 即 6，此種組合數爲 ${}_6C_3$，故 ${}_6C_3$ 即所求的數。

n 個數 1、2、3、…、n 許重複的 r 元組合仿此，而 n 個數得與任何種類的 n 個相異物對應，故得定理如下：

n 個相異物許重複的 r 元組合數與 $n+r-1$ 相異物不許重複的 r 元組合數相同，二者皆爲

$$ {}_{n+r-1}C_r=n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)/r!。$$