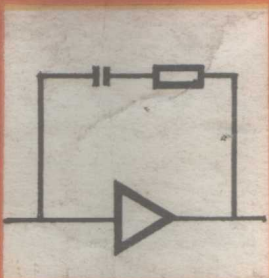
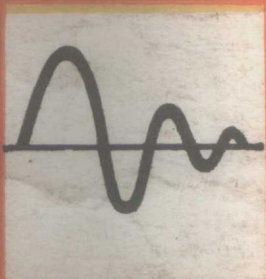
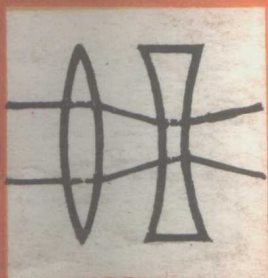
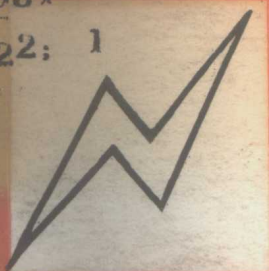


高等学校试用教材

704377

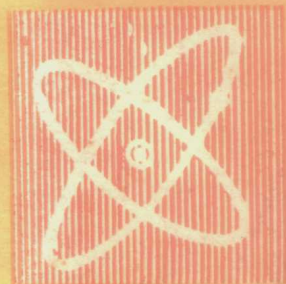
5081

722: 1



现代控制理论

天津大学 刘豹 主编



机械工业出版社

704377

5084

722: 1

高等学校试用教材

现代控制理论

天津大学 刘豹 主编

机械工业出版社

现代控制理论

天津大学 刘 豹 主编

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $22 \frac{1}{4}$ · 字数 546 千字

1983 年 11 月北京第一版·1983 年 11 月北京第一次印刷

印数 00,001—23,000 · 定价 2.80 元

*

统一书号: 15033 · 5614

前 言

本书是工业自动化仪表专业的选修课教材，是根据一九七八年四月一机部在天津召开的高等学校对口专业座谈会制订的教学计划及工业自动化仪表专业教材会议上制订的现代控制理论课程教材编写大纲编写的。

本书由四部分组成：第一部分状态空间分析方法（第一章至第四章）、第二部分确定性最优控制问题（第五章）、第三部分随机过程控制（包括滤波技术，第六章）以及第四部分动态系统辨识（第七章）。作为选修课，我们假设学生们已经学过线性代数、矩阵论、概率论和经典控制理论这几门课。所以，学生是有足够的理论基础来学习这四部分内容的。对少数陌生的理论或概念，本书在各有关章节将作扼要介绍，如在最优控制部分将介绍一些泛函概念，在讲随机控制部分之前，将介绍一些随机过程的预备知识。这四部分也可以分别选修，如学时不够，可以只选第一、二两部分，第一、第二和第三部分，第一、第二和第四部分，或者只选第三和第四部分。它们各部分基本上是相互独立的。按以往的教学经验估计，第一、二部分需要40~50学时，第三部分用30~40学时，第四部分用20学时。

本书有关章节所列的复习性预备知识，可按具体情况取舍。对带有“*”部分则供选用。

本书第一、二、三、五章由卞继仁副教授编写，后来又由田树苞副教授、林俊琦、宗孝英同志协助，第六章由张世英副教授编写。由哈尔滨工业大学邱化元副教授主审；参加审稿的还有上海机械学院何介圭副教授，上海市业余工业大学邬信鹤副教授和陈禹年同志，北京邮电学院梁雄健副教授，上海交通大学王浣尘副教授等。本书由周斌同志担任责任编辑。

由于编写时间较短，错误或不当之处在所难免，期望广大读者批评指正。

刘 豹

1982年11月于天津

目 录

绪论	1	§ 4-3 李雅普诺夫方法在非线性系统中 的应用	126
§ 0-1 控制理论的发展	1	第五章 最优控制	143
§ 0-2 现代控制理论的基本内容	2	§ 5-1 概述	143
§ 0-3 本书内容简介	6	§ 5-2 最优控制问题的一般提法	144
第一章 状态空间表达式	8	§ 5-3 一般函数的极值	146
§ 1-1 状态变量、状态空间表达式	8	§ 5-4 离散时间系统的最优控制	150
§ 1-2 模拟计算机的模拟结构图	12	§ 5-5 连续时间系统的最优控制	153
§ 1-3 状态空间表达式的建立 (一)	14	§ 5-6 变分法	154
§ 1-4 状态空间表达式的建立 (二)	20	§ 5-7 用变分法求解最优控制问题—— 条件极值的变分问题	165
§ 1-5 从差分方程建立状态空间表达式	33	§ 5-8 极小值原理	171
§ 1-6 时变系统和非线性系统的状态空 间表达式	34	§ 5-9 极小值原理的应用——最小时间 控制	175
§ 1-7 线性变换 (坐标变换)	37	§ 5-10 动态规划	178
§ 1-8 从状态空间表达式求传递函数阵	53	§ 5-11 线性二次型最优控制问题——具有 状态反馈的线性最优控制系统	187
§ 1-9 具有串联调节器的系统及其解耦	57	§ 5-12 线性二次型次优控制问题——具 有输出反馈的次优控制系统	202
第二章 状态空间表达式的解	62	§ 5-13 极点配置问题	205
§ 2-1 线性时不变系统的齐次解 (自由 解)	62	§ 5-14 状态观测器	208
§ 2-2 矩阵指数函数——状态转移矩阵	63	第六章 随机控制	217
§ 2-3 线性时不变系统的非齐次解	71	§ 6-1 预备知识	217
§ 2-4 线性时变系统的解	73	§ 6-2 线性动态系统和量测系统	237
§ 2-5 离散时间状态方程的解	77	§ 6-3 卡尔曼滤波	240
§ 2-6 连续时间状态空间表达式的离散 化	82	§ 6-4 卡尔曼滤波模型的推广	254
第三章 能控性与能观性	88	§ 6-5 连续时间系统的线性滤波	265
§ 3-1 能控性的定义	88	* § 6-6 滤波的稳定性	268
§ 3-2 从 $T^{-1}AT$ 与 $T^{-1}B$ 确定系统的能 控性——能控性判据之一	89	§ 6-7 最小方差控制	274
§ 3-3 直接从 A 与 B 确定系统的能控性 ——能控性判据之二	95	§ 6-8 线性二次型高斯控制问题	283
§ 3-4 能观性问题	99	第七章 动态系统辨识	294
§ 3-5 能控性与能观性的对偶关系	102	§ 7-1 动态系统辨识的非参数方法	294
§ 3-6 离散时间系统的能控性与能观性	103	§ 7-2 动态系统数学模型的类别	307
§ 3-7 时变系统的能控性与能观性	107	§ 7-3 单输入单输出线性动态系统的辨 识(一)——最小二乘法估计方法	313
第四章 稳定性与李雅普诺夫方法	113	§ 7-4 单输入单输出线性动态系统的辨 识(二)——其它估计方法	330
§ 4-1 基本定义和李雅普诺夫方法	113	§ 7-5 实际辨识方法中的一些问题	336
§ 4-2 李雅普诺夫方法在线性系统中的 应用	117	索引	346

绪 论

§ 0-1 控制理论的发展

控制理论包括经典控制理论和现代控制理论两大部分。所谓经典控制理论，一般是指以单变量系统为主，用频率法研究控制系统动态特性的理论。在特定输入下研究系统输出的运动规律称为系统分析，而按一定动态性能要求(系统的稳定性、误差精度和各种动态指标——飞升时间、带宽、超调量和误差系数……等等)来改变这种运动规律称为系统综合。当然，在经典控制理论发展过程中，开始和后来都曾用过时域方法(微分方程、差分方程和积分方程)但频域法还是主导的(即使是随机过程中的维纳——霍甫积分方程也用频率法来解)。在发展过程中，某些指标的优化问题、多变量问题、采样系统问题逐步被提到日程上来，并得到了在当时认为是较好的解决。

现代控制理论是在经典控制理论基础上逐步发展起来的。它是以时域法，特别是以状态空间方法为主，研究系统状态的运动规律，并按所要求的各种指标最优为目标来改变这种运动规律。现代控制理论的发展和计算机的普遍应用分不开，经典控制理论中以图表、特制曲线(奈奎斯特曲线、伯德图、尼柯尔斯图、根轨迹等等)和特制计算尺为主要计算、分析、设计工具，而现代控制理论中用各种语言设计计算程序为主要设计手段。现代控制理论中不少方法是适应这种计算和特点形成的，例如叠代算法和递推算法。前者解决了原来无法解决的多变量复杂关系的数值解问题，最优化技术——控制理论、滤波技术、数学规划等一系列学科的根本技术之所以在目前应用得如此普遍，和叠代算法的推广是分不开的。后者则更是一切计算机在线控制系统(在线最优控制、卡尔曼滤波、在线动态系统辨识、自适应滤波和自适应控制等等)的基础。

现代控制理论本身在深度上和广度上也是不断发展的，现在已很难严格地为它指定一个范围，况且愈来愈多的经典控制理论中用之有效的方法已渗透到现代控制理论内部，如零极点配置和频域方法，“现代”两字再加在控制理论的前面已不太能作为一个含意明确的定语了。

理论归根结底是从实践发展来的，它来之于实践，但又反过来指导实践。控制理论的发展又一次说明了这一真理。远在经典控制理论形成之前，就有蒸汽机的飞轮调速器、鱼雷的航向控制系统、航海罗径的稳定器、放大电路的镇定器等自动化系统和装置出现。这些都是不自觉地应用了反馈控制概念而构成的自动控制器件和系统的成功例子。但是我们何尝知道在控制理论形成之前的漫长岁月中，由于缺乏理论指导而失败的无数次的实践和尝试呢？直到本世纪二十年代至四十年代，马诺尔斯基^[1]、奈奎斯特^[2]、海任^[3]、伯德^[4]等，当然也包括维纳的工作^[5]为经典控制理论奠定了基础，促进了二次大战中的许多武器和通信自动化系统的研制工作。大战后，更多地总结了武器系统研制和设计方面的实践经验，陆续出版了麦克考尔^[6]、詹姆斯、尼柯尔斯和菲利普斯^[7]等许多著作。这些理论对战后的许多实际自动控制工程起了良好的指导作用，为人类在较短时间内征服宇宙空间作出了贡献。事物

是不停地发展的,二次大战后到五十年代中,控制理论中又添加了根轨迹法、非线性系统的谐波近似法(描述函数法)、采样控制系统、自寻最优问题和部分最优控制、多变量控制、系统灵敏度分析和系统动态测试等新篇幅。但最具有决定性意义的是状态空间方法的应用、极大值原理和卡尔曼滤波技术的提出。有人就曾把这三件事,或再加上贝尔曼的动态规划方法,作为现代控制理论的起点。

当然,从六十年代以来的二十年中,现代控制理论各方面都有明显进展,而且已形成了几个分支学科:线性系统理论、最优控制理论、自适应控制、动态系统辨识、大系统理论。有些分支学科也还渗透到相邻学科中去,如滤波技术和适应滤波,自学习理论和人工智能、系统辨识和建模理论、大系统理论和系统工程等等。

§ 0-2 现代控制理论的基本内容

精炼些说,现代控制理论的基本内容可以用下列五个问题概括。

一、如何按一定目标来确定一个控制函数(最优控制)

假设图 0-1 中系统,有一组输入函数(控制函数) $u(t)$ 作用在受控系统上,其相应状态变量是 $x(t)$,通过量测系统可得到这些状态的某种组合为 $y(t)$ 。



图 0-1

从实际需要出发,可以为受控系统指定一些目标。例如一个飞行器的飞行时间最短、燃料耗费

最少、能量损失最小和指定轨线的偏离或偏离均方最小……等等,可以提出一系列目标函数

$$J = f(x(t), u(t), t) \quad (0-1)$$

当然,受控系统本身的输入和输出或和其状态变量间有一定动态关系,称之为受控系统的状态方程,如

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (0-2)$$

当式(0-1)和(0-2)已知,则找到一个控制函数 $u^*(t)$ 满足条件(0-2),并使 J 为极值(最小或最大)的问题,就是现代控制理论中最普遍的课题之一,称之为最优控制问题。

如果所选用的目标函数 J 是一种二次型函数,则式(0-1)变成

$$J = x^T(t_f)Q_0x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t)]dt \quad (0-3)$$

式中 t_0, t_f ——分别为控制过程的开始和结束时间;

Q_0, Q_1, Q_2 ——要加以确定的权矩阵。

这就是最优控制问题中最成熟的线性二次型最优控制问题。

更普遍的问题是受控系统本身状态方程也是非线性的,即

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (0-4)$$

如果将 $x(t), u(t)$ 离散化,则得离散时间方程如下式

$$x(k+1) = \phi(k+1, k)x(k) + H(k)u(k) \quad (0-5)$$

$$J = x^T(l)Q_0(l)x(l) + \sum_{k=0}^{l-1} [x^T(k)Q_1(k)x(k) + u^T(k)Q_2(k)u(k)] \quad (0-6)$$

由于目前控制理论的应用都离不开计算机,实际系统的最优控制也往往要依靠计算机,故研

究这种离散时间系统是有其实际意义的。

控制理论的根本是反馈控制，上面提到的都是开环控制，因而最优控制问题中自然包含如何构成最优反馈控制律的问题。当然，可以模仿经典控制理论那样，构成以输出 $y(t)$ 反馈的最优控制律，这就是输出最优控制。由于输出中不可能包含系统状态的全部信息，因此，理论上就不能从输出反馈控制得到最优控制，最多也只能叫作次优控制。理论上的最优控制应当来自状态反馈，所以就有最优状态反馈。对于线性二次型最优控制问题，这种最优状态反馈控制规律是

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (0-7)$$

式中 $K(t)$ ——增益矩阵

$$K(t) = Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) \quad (0-8)$$

而 $P(t)$ 这个线性变换阵则为下列黎加蒂矩阵微分方程的解

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)Q_2^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q_1(t) \quad (0-9)$$

并不是在所有系统中都能够直接观测到状态 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ 的，所以在得到式 (0-7) 最优控制律之前，就要设法从输出向量 $y(t)$ 找到系统的全部状态 $x(t)$ 。这就是所谓观测器设计问题。这种在确定性系统中估计状态的问题是比较成熟的问题。

在为系统设计一种最优控制律，当系统状态不能全被直接量测到时，为系统设计一个状态观测器，却涉及受控系统是否能够被控制和被观测的问题，这就是系统的能控性和能观性问题。在以研究系统状态运动规律为主的现代控制理论中，状态的能控性和能观性是设计系统最优控制的先决条件。

二、如何从受到随机干扰的输出 $y(t)$ 来求状态向量 $x(t)$ (最优估计)

图 0-1 中系统输出 $y(t)$ 是通过量测系统由状态转换过来的，实际的量测系统却受到噪声 $v(t)$ 干扰，如图 0-2。这时，从 $y(t)$ 尽可能消除干扰 $v(t)$ 的影响反求状态 $x(t)$ 的问题就叫作最优状态估计问题。或更广泛些，在图 0-2 中，我们把整个系统都看成是一个信息传递系统。

输入噪声 $w(t)$ 表示这个信息传递系统的模型误差，或称动态噪声，则从 $y(t)$ ，克服 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的影响来估计 $x(t)$ ，称为最优状态估计。解决这种问题最基本的方法是卡尔曼滤波技术，它在各种信息系统（通信、广播、电视、计算机……等系统），统计数据处理和现代控制理论中都有广泛应用。

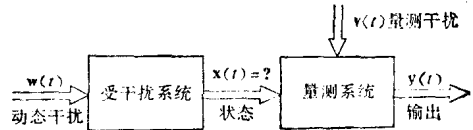


图 0-2

描述受到的噪声 $w(t)$ ， $v(t)$ 干扰的信息状态 $x(t)$ 和量测此状态的输出 $y(t)$ 的方程是

$$x(k+1) = \phi(k+1, k)x(k) + r(k)w(k) \quad (0-10)$$

$$y(k) = c(k)x(k) + v(k) \quad (0-11)$$

如果已知干扰 $\{w(k)\}$ ， $\{v(k)\}$ 的统计特性，则就可以从输出 $\{y(k)\}$ 来估计状态 $x(k)$ 。一般来说，用具有零平均值的高斯分布特性来说明 $\{w(k)\}$ ； $\{v(k)\}$ 是完全可以的。

如果用 $k = 1, 2, \dots$ ，等时的量测数据 $\{y(k)\}$ 来估计 $k = l$ 时的状态 $x(l)$ ，则当 $l > j$ 时，称为预测问题， $l = j + 1$ ，是一步预测问题；

当 $l = j$ 时, 则为滤波问题;

当 $l < j$ 时, 则为平滑问题。

预测是相当多一类最优控制问题的先决条件, 有些叫作一步预测控制的最优控制, 可以达到相当不错的控制效果。滤波的作用更为明显, 可以从被干扰信号中得到真实信号, 用经典滤波技术, 只能对信息和干扰噪声分布在不同频段或少量交叠的情况才有效, 维纳滤波为信息与干扰混杂在相同频段提出了处理办法, 而卡尔曼滤波则将此方法扩大到各种不平稳过程。平滑则为用更多的量测数据, 包括后来的数据来估计以前某一时间点上的信息, 牺牲时间以换取估计精度的作法在有些场合是合适甚至是必要的。

本节公式的时间变量, 有时用 t , 有时用 k , 表示滤波技术和控制一样, 既可在连续时间 t 上进行, 也可在离散时间 k 上进行, 从实际应用来说, 离散时间 k 更占多数。

三、如何为一个承受随机干扰的系统按一定目标确定一个控制函数 (随机最优控制)

实际系统都是受到许多噪声干扰的, 其中主要的是动态噪声 $w(t)$ 和量测噪声 $v(t)$ 。在这种情况下最优控制问题就叫作随机最优控制。由于所处理的都是随机变量, 所以在随机控制中目标函数一般都用统计平均值来表示, 例如受控系统的输出 $y(t)$ 偏离给定值 y^d 的方差最小, $J = E[(y(k) - y^d)^2]$ 。

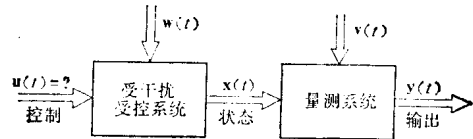


图 0-3

随机最优控制中有一类比较成熟的问题是线性二次型高斯控制 (LQG) 问题。这里, 系统状态方程和量测方程是

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{w}(k) \quad (0-12)$$

$$y(k) = \mathbf{c}\mathbf{x}(k) + v(k) \quad (0-13)$$

而要求的目标函数是

$$E[J(u)] = E[\mathbf{x}^T(l)\mathbf{Q}_0\mathbf{x}(l) + \sum_{k=0}^{l-1} (\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(k) + u^T(k)\mathbf{Q}_2u(k))] \quad (0-14)$$

LQG 问题中主要是应用了分离定理, 就是可以把对随机系统求最优控制的问题分开为两部分: 一是用卡尔曼滤波技术从系统输出 $y(k)$ 求状态 $\mathbf{x}(k)$ 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}(k)$, 另一是按确定性线性二次型最优控制问题, 把 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 当作状态来求状态反馈最优控制律 $u^*(k) = -\mathbf{L}(k) \times \hat{\mathbf{x}}(k)$ 。

四、如何从动态系统输入和输出求系统的方程 (动态系统辨识问题)

前面提到的最优控制和最优状态估计都是在已知系统方程 (或称数学模型) 的基础上进行的, 而在实际设计最优控制系统时, 最根本的是必须先建立系统的数学模型。用图表示, 如图 0-4 中所示的 $u(t)$ 和 $y(t)$, 消除 $w(t)$ 和 $v(t)$ 的影响来找一个最适合于 $u(t)$ 和 $y(t)$ 的数学模型。这一大类问题叫作动态系统辨识问题, 它在实用上和理论上都有重要意义。

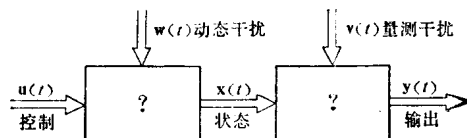


图 0-4

当模型结构已经确定, 用输入输出来确定其参数的, 叫作参数估计问题, 而同时确定模型结构和参数的则泛称系统辨识问题。模型结构问题包括用何种方程、多少阶或什么结构不

变量来逼近输入输出数据。

用输入输出关系（有时也叫系统的外部关系）表达系统动态特性的数学模型有传递函数和自回归滑动平均等多种方式，同样的输入输出关系也可以用全面表示系统内部及外部关系的状态方程来表达。这种由外部关系找系统内部关系的问题叫作实现问题。由状态方程表示输入输出关系是唯一的，但其逆运算却非唯一，即可以有无穷多个状态方程相当于同一个输出输入方程。这无穷多个方程中，有一大类维数最小的方程，由输入输出关系化到这一类相应的最小维状态方程叫作最小实现问题。

求出系统数学模型的目的，在于用它来求解最优控制律。为了尽可能确切地反映输入输出所表达的系统，由此得到系统数学模型往往有一定的复杂程度。但为了便于实际计算和控制，往往希望得到模型的阶次不要太高，许多人就研究了模型的降阶问题。

由于反映事物输入输出关系（或因果关系）的数学模型可以用来分析系统、设计最优控制、预测将来、可以用仿真技术作种种试验。数学模型已广泛地被应用到控制以外的各个领域。如在社会经济系统中，数学模型已被用来作经济预测、建设规划、决策分析和政策评价。所以，系统辨识工作有广泛的实用意义。在上面提到的社会经济系统中，不少时候往往只有以统计数据形式表达的系统的输出数据，而很难找到相应的输入。因而，单以输出数据分析系统的时间序列分析方法得到了广泛应用。当然，这已超出了控制领域。

在不少控制系统上，往往要同时估计系统的参数和状态，由于这两种估计方法是相同的，所以只要把向量增广，很容易把参数和状态合并在一个向量中同时估计。这也是为什么卡尔曼滤波技术在参数估计中能起作用的道理。

五、如何用各种直接或间接辨识系统动态特性的方法随时调整控制律得到最优控制（适应控制问题）

总起来说，自适应控制是指随时辨识系统的数学模型，随时按此模型来调整最优控制律，如图 0-5 就是要按 $w(k)$, $v(k)$, $y(k)$, $x(k)$, $u(k)$ 来确定 $u^*(k+1)$ 。

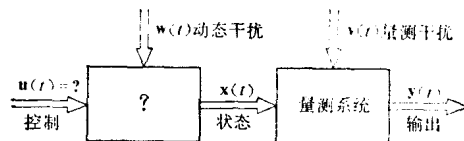


图 0-5

按实际要求不同，自适应控制也有很多种类：

(1) 有些是寻求由于控制过程中实际受控系统特性改变而导致的系统目标的极值漂移，调整系统可调的控制律，以求系统当时可能达到的最优目标。这是一种自寻最优调节器。

(2) 有些是随时测试系统的动态特性，如用伪随机输入信号随时测量全系统的脉冲响应面积比（图 0-6 中脉冲响应曲线和时间轴围成的面积，轴上总面积 ΣA 和轴下总面积 ΣB 之比），随时调整控制律以使比值为最小。

(3) 有的是所谓模型参考适应控制。在此，系统有一理想的参考模型，承受一定输入作用后其输出就是受控系统实际输出应当遵循的最优轨线（用输出实际轨线作为目标，往往比一般二次型目标更为直接）。当实际输出和理想参考模型之输出有偏差时，就改变自适应机构按一定规律去调整控制器，改变控制律，最后使系统输出跟随理想参考模型之输出。以此

适应不断改变的情况达到最优控制。

(4) 带有可调参考模型的自适应控制系统。这种安置在控制系统中的参考模型，其参数及(或)阶次均可按在线辨识结果加以调整以跟随实际系统的动态特性，再据此计算最优控制律去控制实际系统。在这类系统中，辨识和控制是交替进行的。

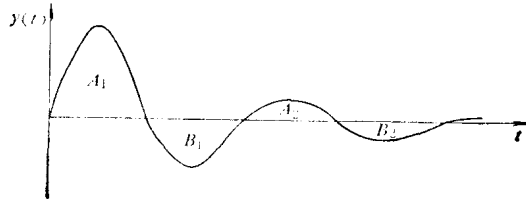


图 0-6

§ 0-3 本书内容简介

本书作为工业自动化仪表及其相邻专业大学生的一门选修课教材，应当包含现代控制理论中最基础的内容。因此，本书分成状态空间分析方法、确定性最优控制、随机过程控制及滤波技术以及动态系统辨识四大部分。

状态空间分析方法不仅是现代控制理论的基础，而且也是现代网络分析和线性系统理论的基础，自动化专业的学生应该熟悉这种基本方法。状态空间分析方法的数学基础是线性代数和矩阵论，这部分数学在工程数学中已讲授过，为了复习，有些部分还在本书中作少量重复。能控性和能观性是状态分析方法的根本问题，在本书中作了适当说明。李雅普诺夫稳定性理论无论对线性或非线性系统的分析和综合都有用处，这是控制理论中若干再生的古老理论之一，本书作了最基础的阐明。

确定性最优控制理论涉及泛函概念，考虑到部分学生可能欠缺这方面的知识，本书对泛函的基本概念和规律作了通俗的说明。本书介绍了最优控制的三种基本方法：变分法、极大值理论和动态规划。具体讨论了状态反馈和输出反馈控制问题。对于观测器问题也作了简述。当然，由于学时限制，对模型简化和最小实现问题，或未能提及或只作一般介绍，有兴趣者可查阅有关文献。

实际系统是承受各种随机噪声的干扰，如何处理随机过程系统是现代控制理论中的另一大问题。概率论和随机过程理论是随机控制的主要数学基础之一。在工程数学中，概率论已有交待，而随机过程则不一定能学得足以应付随机控制的需要。所以在这一部分中提供了一定量的随机过程理论的预备知识。随机控制主要包括两大部分：最优状态估计和随机最优控制。前者常以“卡尔曼滤波技术”名义出现，这部分内容对于工业自动化仪表专业学生来说是非常必要的，因为，如何从被干扰的测量值中得到真实信息不就是仪表工作者主要考虑的问题吗？当然，在控制系统中，所得到的被量测值都包括干扰信号，因此，通过滤波方法尽可能得到逼近实际状态，从而按此作最优控制是必由之路。本书把随机最优控制局限于方差控制和线性二次型最优控制，以此为例，可以向学生展示随机控制的根本方法。

动态系统辨识是为了从系统的实际输入输出推算系统的数学模型，这是古典动态测试的发展。动态系统辨识的范围很广，目前最成熟的是线性时不变系统的辨识。在本书受到学时

限制，局限于单输入单输出线性时不变系统的辨识问题，希望学生通过这类系统辨识问题的学习，能了解系统辨识中最基本的理论和方法。

参 考 文 献

- [1] N. Minorsky Directional Stability of Automatically Steered Bodies J. Am. Soc. Naval Eng. 34 1922.
- [2] H. Nyquist Regenerative Theory Bell System Tech. J. **XI**, 126 1932.
- [3] H. L. Hazen Theory of Servomechanisms J. Franklin Inst. 218 1934.
- [4] H. W. Bode Feedback Amplifier Design Bell System Tech. J. **XIX** 92 1940.
- [5] N. Wiener The Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series NDRC Report Cambridge Mass. 1942.
- [6] L. A. Mac Coll Fundamental Theory of Servomechanisms Van Nostrand Co. Inc. N. Y. 1945.
- [7] H. M. James N. B. Nichols R. S. Philips Theory of Servomechanisms Mc Graw Hill Book Co. Inc. 1947.

第一章 状态空间表达式

在经典控制理论中, 对于一个线性时不变动态系统, 是用一个高阶微分方程或传递函数加以描述的。它们将某个单变量作为输出, 直接和输入联系起来。系统的动态特性仅仅由该单变量对给定输入的响应来表征。实际上系统除了输出这个变量之外, 还包含有其他相互独立的变量, 关于它们对给定输入的响应如何? 则有待另行逐一计算。因此, 从能否完全揭示系统的全部运动状态来说, 用一个高阶微分方程来描述一个线性时不变动态系统显然有其不足之处。

在用状态空间法分析系统时, 系统的动态特性是由状态变量构成的一阶微分方程组来描述的。在数字计算机上求解一阶微分方程组比求解与之相应的高阶微分方程要容易得多, 而且能同时给出系统的全部独立变量的响应, 因而能同时确定系统的全部内部运动状态。此外, 状态空间法还可以方便地处理初始条件; 可以应用于非线性系统、时变系统、随机过程和采样数据系统等; 这些都是状态空间法的显著优点。

§ 1-1 状态变量、状态空间表达式

状态变量 所谓“状态”, 是指系统的运动状态。状态变量, 就是指足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统, 就有 n 个独立变量, 当这 n 个独立变量的时间响应都求得时, 那末, 系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此, 可以说系统的状态变量就是 n 阶系统的 n 个独立变量。

同一个系统, 究竟选取哪些变量作为状态变量, 这不是唯一的, 要紧的是这些变量应该是相互独立的, 且其个数应等于微分方程的阶数; 又由于微分方程的阶数是唯一取决于系统中独立储能元件的个数, 因此状态变量的个数就应等于系统独立储能元件的个数 \ominus 。

众所周知, n 阶微分方程要有唯一确定解, 必须知道 n 个独立的初始条件。很明显, 此 n 个独立的初始条件就是一组状态变量在初始时刻 t_0 的值。

综上所述, 可知状态变量是既足以完全确定系统运动状态而个数又是最小的一组变量, 当其在 $t = t_0$ 时刻的值已知时, 则在给定 $t \geq t_0$ 时间的输入作用下, 便能完全确定系统在任何 $t \geq t_0$ 时间的行为。

状态向量 如果 n 个状态变量用 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 \dots 、 $x_n(t)$ 表示, 并把这些状态变量看作是向量 $\mathbf{x}(t)$ 的分量, 则 $\mathbf{x}(t)$ 就称为状态向量。记作:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

\ominus 对于一般物理系统可以这样说, 但由于状态方程可以描述比物理系统广泛得多的各类系统, 如社会经济系统, 所以对更广泛的一般系统就不一定这样说。

状态空间 以状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 为坐标轴所构成的 n 维空间, 称为状态空间。在特定时刻 t , 状态向量 $x(t)$ 在状态空间中是一点。已知初始时刻 t_0 的 $x(t_0)$, 就得到状态空间中的一个初始点; 随着时间的推移, $x(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹, 称为状态轨线。状态向量的状态空间表示, 将向量的代数结构和几何概念联系起来。

状态方程 由系统的状态变量构成的一阶微分方程组, 称为系统的状态方程。

用图 1-1 所示的 $R-L-C$ 网络说明如何用状态变量描述这一系统。

此系统有两个独立储能元件: 电容 C 和电感 L , 所以应有两个状态变量。

状态变量的选取原则上是任意的, 但考虑电容的储能与其两端的电压 v_c 、电感的储能与流经它的电流 i 直接相关, 故通常就以 v_c 和 i 作为此系统的两个状态变量。

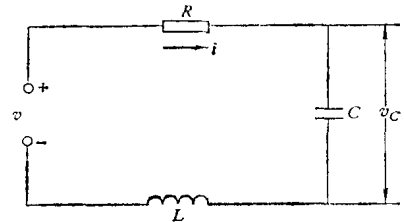


图 1-1

根据电学原理, 容易写出两个含有状态变量的一阶微分方程组:

$$C \frac{dv_c}{dt} = i$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_c = v$$

亦即

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C} i \quad (1-1)$$

$$i = -\frac{1}{L} v_c - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} v$$

式 (1-1) 就是图 1-1 系统的状态方程, 式中若将状态变量用一般符号 x_i 表示, 即令 $v_c = x_1$, $i = x_2$; 并写成向量矩阵形式, 则状态方程变为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} v \quad (1-2)$$

或

$$\dot{x} = Ax + bv$$

输出方程 在指定系统输出的情况下, 该输出与状态变量间的函数关系式, 称为系统的输出方程。如在图 1-1 系统中, 指定 $x_1 = v_c$ 作为输出, 当输出一般规定用 y 表示时, 则有:

$$y = v_c \quad (1-3)$$

或

$$y = x_1$$

式 (1-3) 就是图 1-1 系统的输出方程。它的向量矩阵表示形式为:

$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

或

$$y = c^T x$$

状态空间表达式 状态方程和输出方程总合起来, 构成对一个系统动态的完整描述, 称为系统的状态空间表达式。如式 (1-1) 和式 (1-3), 或式 (1-2) 和式 (1-4) 就是图 1-1 系

统的状态空间表达式。

在经典控制理论中，系统的动态方程是在指定某个输出量时的高阶微方程。如图 1-1 的系统，在以 v_c 作输出时，从式 (1-1) 消去中间变量 i ，得到二阶微分方程为：

$$\ddot{v}_c + \frac{R}{L} \dot{v}_c + \frac{1}{LC} v_c = \frac{1}{LC} v \quad (1-5)$$

其相应的传递函数则为：

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (1-6)$$

如果要从高阶微分方程或从传递函数变换为状态方程，即分解为多个一阶微分方程组，那末此时的状态方程可以有无穷多种形式，这是由于状态变量的选取可以有无穷多种的缘故；而这种状态变量的非唯一性，归根结底，是由于系统结构的不确定性造成的。关于这个问题，下面还将论及，暂不多述。

回到式 (1-5) 或式 (1-6) 的二阶系统，若改选 v_c 和 \dot{v}_c 作为两个状态变量，即令 $v_c = x_1$ ， $\dot{v}_c = x_2$ ；则得一阶微分方程组为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{LC} v \end{aligned} \quad (1-7)$$

即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} v \quad (1-8)$$

比较式 (1-8) 和式 (1-2)，显而易见，同一系统状态变量选取的不同，状态方程也不同。

从理论上说，并不要求状态变量在物理上一定是可以测量的量，但是在工程实用上，仍以选取那些容易测量的量作为状态变量为宜，因为在最优控制中，往往需要将状态变量作为反馈量。

一般地，对于单输入-单输出系统，状态方程具有如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{aligned}$$

输出方程则有如下形式： $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

用向量矩阵表示时的状态空间表达式则为：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{表示 } n \text{ 维状态向量。}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

表示系统内部状态的联系，
称为系统矩阵；为 $n \times n$ 方阵。

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

表示输入对状态的作用，
称为输入矩阵或控制矩阵；
这里为 $n \times 1$ 的列阵。

对于一个复杂的系统，它可以不只一个输入，而有 r 个；不只一个输出，而为 m 个。此时状态方程变为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \end{aligned}$$

至于输出方程，不仅是状态变量的组合，而且在特殊情况下，还可能有输入向量的直接传递，因而有以下一般形式：

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ &\cdots \cdots \cdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r \end{aligned}$$

因而多输入-多输出系统状态空间表达式的向量矩阵形式为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

(1-10)

式中 x 和 A ——同单输入系统，分别为 n 维状态向量和 $n \times n$ 系统矩阵。

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$$

表示 r 维输入（或控制）向量；

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

表示 m 维输出向量；

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

表示 $n \times r$ 输入（或控制）矩阵；

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{表示 } m \times n \text{ 输出矩阵;}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \quad \text{表示 } m \times r \text{ 直接传递矩阵。}$$

为了简便，下面除特别申明，在输出方程中，均不考虑输入向量的直接传递，即令 $D = 0$ 。

状态空间表达式的系统方块图 和经典控制理论相类似，可以用方块图表示系统信号传递的关系。对于式 (1-9) 和式 (1-10) 所描述的系统，它们的方块图分别表示如图 1-2 a 和 1-2 b。

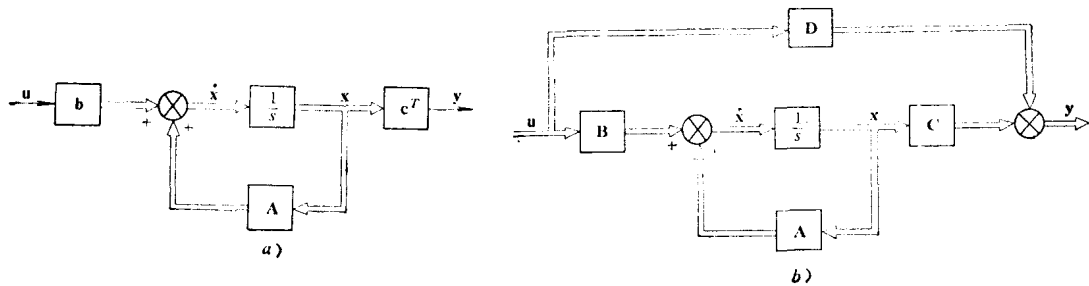


图 1-2

图中用单线箭头表示标量信号，用双线箭头表示向量信号。

从状态空间表达式和系统方块图都能清楚地说明：他们既表征了输入对于系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态对于外部输出的影响，所以状态空间表达式是对系统的一种完全的描述。

§ 1-2 模拟计算机的模拟结构图

在状态空间分析中，利用模拟计算机的模拟结构图，能充分反映状态变量间的相互关系，对建立状态空间表达式很有帮助。

模拟机是由比例器、反相器、加法器、积分器等几个基本部件所组成，它们的表示符号如图 1-3 所示。

对于一阶标量微分方程：

$$\dot{x} = ax + bu$$

它的模拟结构图示如图 1-4 a；为了简化，可不考虑积分器的反相作用，并将它的加法作用用综合符号表示，则它的模拟结构图可简示如图 1-4 b；在不计初始条件（即初始条件为零）