高等学校试用教材

概率论与数理统计

吉林教育出版社

高等学校试用教材

概率论与数理统计

清华大学应用数学系
概率统计教研组　编

吉林教育出版社

高等学校试用教材　**概率论与数理统计**　清华大学应用数学系 概率论统计教研组 编

责任编辑　阙家栋　　封面设计　曲　刚

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米 32开本 29.5印张4插页693,000字

发行：吉林省新华书店　1987年9月第1版　1987年9月第1次印刷

印数：1—2,166册

印刷：长春科技印刷厂　统一书号：7375·584　定价：5.45元

序

本书是根据高等院校理工科数学教材编审委员会审定的教学大纲，结合我校多年来教学实践经验编写的。

随着现代科学技术的飞跃发展，随机模型的方法迅速地渗透到各个科学技术领域，广大工科学生及科技人员迫切需要掌握概率统计方法去处理随机模型问题。

通过多年的教学实践，我们觉得面向广大工科学生与科技人员的教材及参考书的主要内容仍然是：

1．为读者提供必要的基础理论。

2．通过密切联系实际的例题，帮助读者学会分析问题和解决问题的方法。

为此，作者在编写本书时力求通俗易懂、深入浅出，对基本的理论问题除详尽分析外，还提供有关的实际背景，对典型的应用问题尽量做到理论联系实际，阐明如何应用理论解决实际问题。因此书中除收入大量的例题外，还在各章增加了例题分析，用来引导读者如何分析解决问题。为了便于自学，各章后均有习题，书末附有全部习题答案以及有关的概率统计用表。

为了便于读者应用理论解决实际问题，每章涉及的主要问题的解法都附有用 Fortran 语言编制的、可在微型计算机上使用的程序，供读者练习和解决实际问题之用。

本书分别由陈凯（第六章），陈魁（第十一章），李仲莲（第三、九章），陆淑兰（第一章），武继玉（第七章），吴淑敏（第八章），余桂（第二、十章），赵衡秀（第四、五章）编写，最后由马振华、陈凯审校。

本书可作高等院校的教材，也可供科技人员自学参考。

作　　者

1986 年 9 月于北京

目　　录

第一章　概率论的基本概念

引　　言

概率论是数学的一个分支，它研究随机现象的数量规律。在自然界存在着两种不同的现象。有一类现象，在一定的条件下可以预言它是否会出现。例如“在标准大气压下，纯水加热到 100℃时必定沸腾”。“向上抛的石子一定下落”，这些都是在一定条件下一定会出现的现象。而上述现象的对立面，“在标准大气压下，纯水加热到 100℃时不沸腾”，“向上抛的石子不下落”这些都是在一定条件下不会出现的现象。这两类现象统称为确定性现象。在日常生活与自然界中还有另一种现象，它们在一定条件下可能出现，也可能不出现，这种现象称为随机现象。下面举例说明。

例 1　随意投掷一枚质量均匀的硬币。假定硬币掉下时字面朝上或者花面朝上是投掷硬币后仅有的两个可能结果（虽然硬币掉下时不一定字面朝上或花面朝上，它可能滚掉了，也可能是笔直的站着），投掷一次其结果不是字面朝上就是花面朝上，并且在相同的条件下，投掷同一枚硬币，投掷之前都无法预料投掷的结果。

例 2　在某个稳定的加工过程中，制造一批产品，若从这批产品中任意抽取一件测量它的尺寸，其结果不是超过公差范围，就是在公差范围之内，并且在相同条件下任取一件测量，测量之前都无法预料测量的结果。

类似的例子还可以举出很多，例如用同一种仪器多次测量同一物体的重量，所得的结果一定会有差异。再如同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，弹落点会各不相同等。所有这些观察或测试到的结果在观察测试之前都无法预料，其原因是有许多不可控制的因素在起作用。诸如投掷硬币时的初速度；加工产品时操作工人的疲劳程度；测试者生理上或心理上的变化；发射炮弹时，天气条件的微小变化等等都是一些不可控制的因素，这些不可控制的因素使我们对这些现象的观察或测试事先无法做出肯定回答。所以称这种现象为随机现象。其共同的特点是：在基本条件不变的情况下，每一次试验或观察，会得到不同的结果。它具有不确定性，但是这种随机现象在大量重复试验或观察下它的结果常具有某种规律性。例如多次随意的投掷同一枚硬币，虽然我们不能预料各次投掷的结果，但是只要硬币确实是均匀的，在多次投掷之后我们就会发现，出现字面与出现花面的机会几乎是相等的。历史上许多学者对此进行过多次试验，并观察到了这一规律性。他们的试验结果如下：

实　验　者	掷硬币次数（n）	出现字面次数（m）	出现字面的频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
蒲　　丰	4040	2048	0.5069
皮　尔　逊	12000	6019	0.5016
皮　尔　逊	24000	12012	0.5005

由表可知，出现字面的频率在数 0.5 附近波动。

随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中这种结果的出现是有一定规律性的，这种规律性称之为统计规律性，概率论就是研究随机现象统计规律性的学科。

§1 随 机 事 件

一、随机试验

我们这里所说的试验包括各种科学实验，也包括对某一事物的某一特征的观察或测量。

如果一个试验具有以下三个特点，则称此试验为随机试验，即

1. 试验可以在相同条件下重复地进行。
2. 在给定的条件下试验结果不止一个。
3. 每次试验事先不能准确地预料它出现哪一个结果，但知道可能出现哪些结果。

随机试验又简称试验并记作 E。今后在概率论中所讨论的试验都是随机试验。下面举例说明。

E_1：抛掷一枚硬币，观察字面，花面出现的情况。

E_2：抛掷一枚骰子，观察出现的点数。

E_3：从一批产品中，依次任选三件；记录出现正品与次品的件数。

E_4：记录某公共汽车站某日上午某时刻的等车人数。

E_5：考察某地区 10 月份的平均气温。

E_6：从一批日光灯管中任取一只，测试其寿命。

以上各个试验都具有上述三个特点，所以都是随机试验。我们通过随机试验对随机现象进行研究。

二、随机事件与样本空间

1. **随机事件**　随机试验中，在一次试验中每一个可能出现也可能不出现的结果称为**随机事件**。例如上节的试验E_2，骰子“出现 1 点”是试验 E_2的一个结果，在一次试验中它可能出现，也可能不出现，这是一个随机事件。同样，“出现 2 点”，“出现 3 点”，…，“出现 6 点”都是试验 E_2的随机事件。

基本事件　如 E_2中的六个随机事件都是试验 E_2 中不能再分解的结果，我们称这样的结果为基本事件。它是随机试验中最简单的随机事件。例如试验 E_1 的基本事件有两个，“出现字面”与“出现花面”。一般常用字母 e 表示基本事件，如用 e_1表示“出现字面”，e_2 表示“出现花面”则E_1的基本事件为e_1与e_2。试验E_2的基本事件是 6 个：“出现 1 点”，“出现 2 点”，…，“出现 6 点”。可分别表示为e_1，e_2，…，e_6。其中e_i为“出现 i 点”这一基本事件，$i=1, 2, \cdots, 6$。

复合事件　随机试验中除基本事件外还有其它随机事件，例如在E_2中“点数小于 3”也是一个随机事件，它由“出现 1 点”与“出现 2 点”组合而成，只要这两个基本事件中有一个

在试验中出现，"点数小于 3"这一随机事件就出现了。又如"点数为奇数"也是随机事件，它由"出现 1 点"，"出现 3 点"，"出现 5 点"这三个基本事件组合而成，只要这三个基本事件中有一个在试验中出现，则"出现奇数点"这一随机事件就出现了。这种由基本事件组合而成的随机事件称为**复合事件**。

为了研究方便，我们将随机试验中必然会出现的结果称为**必然事件**，不可能出现的结果称为**不可能事件**。例如在试验E_2中，"点数不大于 6"是一个必然事件，因为在试验中不论哪一个基本事件出现，均导致"点数不大于 6"这一结果出现，因而它是试验中必然出现的结果，所以是必然事件。由此例还可以知道，必然事件也是由基本事件组合而成的复合事件，而且是由全体基本事件组合而成的复合事件。而"点数大于 6"是E_2中不可能出现的结果，我们称这种结果为不可能事件。

显然，必然事件的对立面是不可能事件，不可能事件的对立面是必然事件，它们互称为对立事件。

在今后的研究中，常将随机事件简称为事件，并以大写英文字母A，B，C，…，来表示事件。例如在E_2中，可以设A为"点数小于 3"这一事件，设B为"点数为奇数"这一事件，等等。

综上所述，可知事件这一概念是和随机试验以及它的所有可能出现的结果联系在一起的，它是概率论中最基本的概念，因此明确所做的随机试验及其全部可能结果，对我们研究随机现象的统计规律性是十分重要的。

2. **样本空间** 随机试验中的基本事件又称样本点，而样本点的全体所构成的集合则称为此试验的**样本空间**。记作Ω。

下面写出前面所述的各个试验的样本空间。

$\Omega_1=\{W, F\}$　　W——字面朝上，F——花面朝上。

$\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_3=\{NNN, NDN, DNN, NND, DDN, DND, NDD, DDD\}$ N——正品，D——次品。

$\Omega_4=\{0, 1, 2, \cdots\}$

$\Omega_5=\{t \mid T_1<t<T_2\}$　其中 t 为平均温度。

$\Omega_6=\{t \mid 0\leqslant t\leqslant T\}$　其中 t 为日光灯管的寿命。

前面三个样本空间只包含了有限个样本点，所以是比较简单的样本空间，Ω_4可以认为是由无穷多个（可列个）样本点构成的样本空间，Ω_5与Ω_6这两个样本空间中都包含了无穷多个（不可列个）样本点，而且充满了一个区间。

由上可知，试验不同，对应的样本空间也不同。而建立样本空间事实上就是建立随机现象的数学模型。因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题，例如Ω_1是只包含两个样本点的样本空间，但是它既可以做为掷硬币出现字面或出现花面的模型，也可以做为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于公共事业排队现象中有人排队与无人排队的模型等等。所以在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间。

3. **样本空间与事件** 对于每一个随机试验相应地有一个样本空间，样本空间的某些子集就是随机事件。以E_2为例：这一试验的样本空间由 6 个样本点组成，即$\Omega_2=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$。其中$e_i$表示"出现 i 点"这一基本事件。

设A_1为“出现1点”这一事件，我们用集合$\{e_1\}$来描述它，即$A_1=\{e_1\}$。

设A_2为“出现偶数点”这一事件，它是一个复合事件，我们用集合$\{e_2, e_4, e_6\}$来描述它，即$A_2=\{e_2, e_4, e_6\}$。

设A_3为“出现点数小于5”这一事件，这也是一个复合事件，我们用集合$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$来描述它，即$A_3=\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$。

设A_4为“出现点数至少是3”这一事件，我们用集合$\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$来描述它，即$A_4=\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$。

设A_5为“出现点数不大于3”这一事件，我们用集合$\{e_1, e_2, e_3\}$来描述它，即$A_5=\{e_1, e_2, e_3\}$。

总之，任意一个事件总可以用样本空间的一个子集来描述它。

除此而外，我们已知E_2中“点数不大于6”是一个必然事件，此事件就是样本空间本身。记作$\Omega=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$。相反，“点数大于6”是$E_2$的不可能事件，对于这样一个事件，我们可以用空集来表示，它也是样本空间的一个子集，记作ϕ。

三、事件间的关系与事件的运算

设随机试验E的样本空间为Ω。A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$，Ω，ϕ是E的事件。

1．**B包含A**　若事件A出现，必然导致事件B出现，则称事件B包含事件A，记作$B\supset A$，或$A\subset B$。

例如“长度不合格”必然导致“产品不合格”，所以“产品不合格”包含“长度不合格”。这一关系可用图1—1说明，这里矩形表示样本空间Ω，⊙A与⊙B分别表示事件A，B。图示事件B包含事件A。

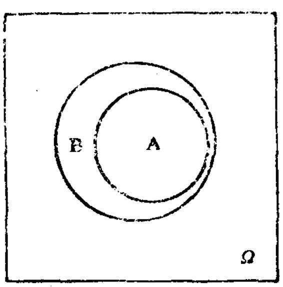

图　1—1

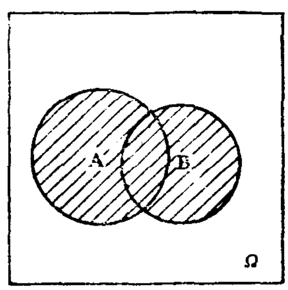

图　1—2

2．**A等于B**　若事件A包含事件B，而且事件B包含事件A，则称事件A与事件B相等，记作$A=B$。

3．事件A与B的**并**　事件A与B中至少有一个出现所组成的事件称为事件A与B的并，记作$A\cup B$。

例如，某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，因此“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并，它们中至少有一个出现就是“产品不合格”这一事件出现。

这种关系用图1—2说明，图中阴影部分表示事件$A\cup B$。

类似地，事件 A_1， $A_2\cdots$， A_n 中至少有一个出现所组成的事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$。

4．**事件A与B的交** 事件A与B同时出现所组成的事件称为事件A与B的交。记作$A \cap B$，或$A \cdot B$或AB。

如上例，"产品合格"是"长度合格"与"直径合格"的交。这种关系用图1—3说明，阴影部分表示$A \cap B$。

类似地，事件A_1，A_2，…，A_n同时出现所组成的事件称为A_1，A_2，…，A_n的交，记作$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n$。

此外，由并与交的定义有

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \phi = A, \quad A \cap \phi = \phi$$

5．**事件A与B互不相容(互斥)** 若事件A的出现必然导致事件B不出现，B出现也必然导致A不出现，则称事件A与B互不相容，即$A \cap B = \phi$。

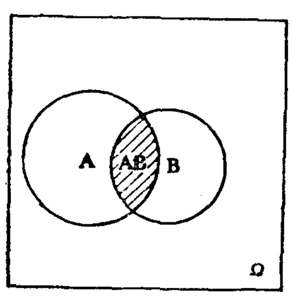

图 1—3

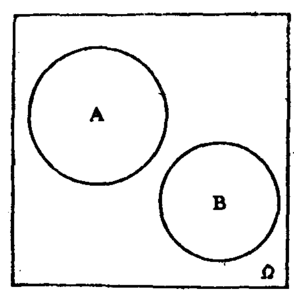

图 1—4

例如，掷一枚硬币，"出现字面"与"出现花面"是互不相容的两个事件，这种关系用图1—4表示。

6．**事件A与B的差** 由事件A出现而事件B不出现所组成的事件称为事件A与B的差。记作$A-B$。

例如，"直径合格但长度不合格"是"直径合格"与"长度合格"的差。

这关系用图1—5表示，阴影部分为事件$A-B$。

7．**事件A的对立事件** 设A表示"事件A出现"，则"事件A不出现"称为事件A的对立事件。记作$\overline{A}$。

例如，"骰子出现1点"与"骰子不出现1点"是对立事件。

显然，对立事件满足下列条件

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A\cap\overline{A}=\phi$$

这种关系用图1—6表示，阴影部分表示$\overline{A}$。应用对立事件的定义，可将事件差$A-B$通过事件A与$\overline{B}$的交表示出来，即

$$A-B=A\overline{B}$$

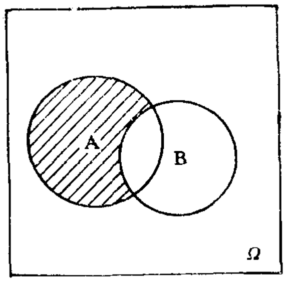

图 1—5

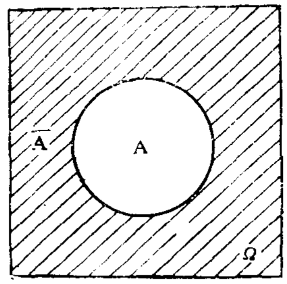

图 1—6

上述事件间的关系与集合论中集合之间的关系是互相对应的。为便于比较，列表如下

表 1.1

记 号	概 率 论	集 合 论
Ω	样本空间，必然事件	空间
ϕ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件A 出现必然导致事件B 出现	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	A集合与B集合相等
$A\cup B$	事件A与B的并	A集合与B集合的并集
AB	事件A与B的交	A与B两集合的交集
$A-B$	事件A与B的差	A与B两集合的差集
$AB=\phi$	事件A与B互不相容	A与B两集合中没有相同的元素

事件间的运算满足下列规律

（1） 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

（2） 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$

（3） 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=AC\cup BC$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cup C)(B\cup C)$

（4） 德莫根（DeMorgan）定律：

$$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$$

$$A_1 \cap A_2 = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$$

§2 随机事件的概率

一、随机事件概率的古典定义及计算

1．**古典模型** 我们所研究的最简单的随机现象具有下列两个特征。

（1）它的全部基本事件（或样本点）只有有限个，它的样本空间是由有限个样本点e_i，（$i=1, 2, \cdots, n$）组成的。即

$$\Omega=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

（2）基本事件* $e_1, e_2, \cdots, e_n$的出现是等可能的。

一般将具有这两个特征的随机现象的数学模型称为古典模型。

古典模型的第二特征"等可能性"指的是各基本事件e_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的出现的可能性是相等的。当然这只是一种抽象，在实际问题中，往往只能近似地认为"等可能"。例如掷硬币，我们认为"出现字面"与"出现花面"是等可能的，但严格说来，由于两面的花纹不同，凸凹的分布也不同，总还是有微小差异的。

由古典模型的特征可以看出，如果试验E有n个基本事件$e_1, e_2, \cdots, e_n$，那末由集合

$$\Omega=\{e_1, \cdots, e_n\}$$

所表示的事件是一个必然事件，它出现的可能性应当是1（也就是百分之百），而每一个基本事件e_i出现的可能性都是相等的，因此每一个基本事件e_i出现的可能性应当用数值$\frac{1}{n}$来表示，我们称$\frac{1}{n}$为基本事件e_i的概率，记作

$$P\{e_i\}=\frac{1}{n} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

这些基本事件e_i的概率有性质

$$P\{e_i\}\geqslant 0 \qquad (i=1, \cdots, n)$$

且

$$P\{e_1\}+\cdots+P\{e_n\}=P\{\Omega\}=1.$$

确定了基本事件的概率之后，就可以给出E中任意事件A的概率。

对于E中任意事件A，总可以用样本空间Ω的一个子集$A=\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}\}$来描述它，（即子集$A$包含有$m(m\leqslant n)$个样本点，其中每一个样本点都是导致事件$A$在试验$E$中出现的可能结果）因此事件$A$的概率即为其对应子集$A$的概率，即

$$\begin{aligned} P\{A\} &= P\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}\} \\ &= \sum_{k=1}^{m} P\{e_{i_k} \mid e_{i_k} \in A\} \end{aligned}$$

---

* 为简单起见，今后我们把由单元素集$\{e_i\}$表示的基本事件就简记为e_i。

现已知此子集中每一个样本点的概率为 $\frac{1}{n}$，故事件A的概率为

$$P\{A\}=P\{e_{i_1}\}+P\{e_{i_2}\}+\cdots+P\{e_{i_m}\}$$

$$=m\cdot\frac{1}{n}$$

因此，E中任意事件A的概率是一个数值，它是由样本空间Ω中样本点的总数，和事件A所对应的子集中包含的样本点数来确定的。一般常将事件A所对应的子集中包含的样本点数称为有利于A的样本点数，于是我们给出任意事件A的概率定义。

2. **定义 2.1** 设试验E的样本空间由n个样本点$e_1,e_2,\cdots,e_n$构成，A为任意一个事件，则事件A出现的概率$P\{A\}$

$$P\{A\}=\frac{m}{n}=\frac{\text{对}A\text{有利的样本点个数}}{\text{样本点总数}} \tag{1.2.1}$$

或

$$P\{A\}=\frac{\text{对}A\text{有利的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

公式（1.2.1）称为概率的古典定义。

例 1 设袋中有4个标号为1\#至4\#的白球，2个标号为5\#，6\#的红球，从中任取一球，求此球是白球的概率。

解 设试验的样本空间为Ω，由于将球分别编号，白球是1\#—4\#，红球是5\#，6\#，则此样本空间Ω共有6个样本点，即$e_i=\{i\#\}$，$i=1,2,\cdots,6$，又A为事件“任取一球为白球”，则$A=\{1\#,2\#,3\#,4\#\}$，即有4个对事件A有利的样本点，故$n=6$，$m=4$，由公式（1.2.1）有

$$P\{A\}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

例 2 设有同一型号日光灯管100件，其中95件是一等品，5件是二等品，从中任取三件求恰有二件是一等品，一件是二等品的概率。

解 设样本空间为Ω，事件A为“任取三件恰有二件一等品，一件二等品”。此例中样本空间的样本点较多，因为100件产品中的任何三件产品组合在一起就是一个样本点，由组合运算知道从100件产品中每次取三件就有C_{100}^3种取法，其中对应于每一种取法就得到样本空间的一个样本点。我们不再一一列出每一个样本点，而只算出样本点的总数，及对A有利的样本点数。已知样本点总数是C_{100}^3，即$n=C_{100}^3$，事件A中的每一个样本点都是两件一等品和一件二等品组成的，而从95件一等品中任取二件有C_{95}^2种取法，从5件二等品中任取一件有C_5^1种取法，由组合学的乘法原理知对事件A有利的样本点数为$m=C_{95}^2\cdot C_5^1$，由公式（1.2.1）有

$$P\{A\}=\frac{C_{95}^2\cdot C_5^1}{C_{100}^3}=0.138$$

例 3 设有n个形状相同的球，随机地放入r个外形相同的盒中（$r\leqslant n$），求恰有两个盒子有球的概率。

解 设Ω为此试验的样本空间，它的样本点是置球入盒的“放法”，先求Ω的样本点总数。由于n个球的形状相同，r个盒子的外形也相同，所以每一个球都有相同的机会放入到r个盒子中的任一盒中去，而每一个球放入r个盒子有r种不同的放法，则n个球放入r个盒子就有r^n种不同的放法，故Ω的样本点总数为r^n。

设事件A为“恰有两个盒子有球”，现在求对事件A有利的样本点个数。为此我们将事件A理解为由两个步骤来实现的，第一步是从r个相同的盒中任意选出两个盒子，其选法共有选法C_r^2种，第二步是当盒子选法为其中之一后，n个相同的球放入这选定的两个盒中去，其放法共有（2^n-2）种，（即从2^n种放法中扣除n个球集中到其中任意一盒，而使另一盒无球的可能放法）由组合学的乘法原理知，对事件A有利的样本点个数为$C_r^2(2^n-2)$。由公式(1.2.1)有

$$P\{A\}=\frac{C_r^2(2^n-2)}{r^n}$$

例 4 10个人中包括A，B两人，随机地排成一列，问“A，B之间恰有 4 个人”的概率是多少？

解 Ω为此试验的样本空间，按题意样本点是“排列”，由于“排列”与产生这种排列的“排法”一一对应，所以也可以把样本点理解为“排法”。现在先计算此样本空间中样本点的总数。按题意10人排成一列，是按不同顺序的排列，因此排列的方法共有10！种，所以样本点总数$n=10!$。

设事件C为“A，B间恰有 4 人”。计算有利于事件C的样本点数。按题意仅要求A，B之间恰有 4 人，但未限定A，B的前后次序，因此一种情况是A排在前，B在后，另一种情况是B排在前，A在后。先讨论A在前B在后的情况。若A在前，则A仅能占有第一到第五个位置，故A在前B在后的排法共有五种。同理，B在前A在后也有五种排法，所以A，B的排法共有10种，当A，B的位置确定为10种中的一种后，余下的 8 人分别排在其它的 8 个位置上，共有8！种排法，于是A，B间恰有 4 人的排法为$10\times 8!$种排法，即有利于事件C的样本点数为$10\times 8!$个，由公式（1.2.1）有

$$P\{C\}=\frac{10\times 8!}{10!}=\frac{1}{9}$$

$\frac{C_8^4\cdot 5!\cdot 2!\cdot 4!}{10!}=$ [illegible]

例 5 设有N张卡片，每张卡片上标有号码i（$i=1, 2, \cdots, N$,），随机地取一张卡片，记录其号码后放回，随机地再取一张，记录号码后再放回，…共取m次，问其中记录的最大号码恰是r的概率是多少？（$0<r<N$）。

解 由于每一张卡片被取到的机会相同，又是有放回的随机抽取，因此每次去取，都有N种取法，故样本空间Ω的样本点总数为$n=N^m$。

设事件A为“记录的最大号码恰为r”。下面计算有利于A的样本点数。由于记录的号码中

最大为r，因此所记录的m个号码中至少有一个是r，其余号码均小于r。又因为是有放回的随机抽取，所以从1到r的r个数中每次取一个，抽取m次的取法共有r^m种，但其中包括“m个数中最大数比r小”的那些取法，而这些取法共有$(r-1)^m$种（即将最大数r除外，尚有$r-1$个数，在这$(r-1)$个数中有放回的抽取m次），所以对事件A有利的样本点数应为：$r^m-(r-1)^m$。则

$$P\{A\}=\frac{r^m-(r-1)^m}{N^m}$$

3．古典概率的基本性质

（1）对于任意事件A有

$$0\leqslant P\{A\}\leqslant 1$$

（2）对必然事件Ω有

$$P\{\Omega\}=1$$

（3）若事件A_1，A_2，…，$A_m(m\leqslant n)$互不相容，则

$$P\{\bigcup_{i=1}^{m}A_i\}=\sum_{i=1}^{m}P\{A_i\} \tag{1.2.2}$$

证

（1）因为$0\leqslant m\leqslant n$所以结论成立。

（2）因为Ω为样本空间，设Ω有n个样本点由古典模型的特性知：

$$P\{\Omega\}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

（3）设A_i含有k_i个不同的样本点，记作

$$A_i=\{e_1{}^{(i)},\ e_2{}^{(i)},\ \cdots,\ e_{k_i}{}^{(i)}\}$$

$$P\{A_i\}=\frac{k_i}{n}$$

由事件并的定义。

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$$

$$=\{e_1{}^{(1)},\ e_2{}^{(1)},\ \cdots,\ e_{k_1}^{(1)},e_1{}^{(2)},\ e_2{}^{(2)},\ \cdots,\ e_{k_2}{}^{(2)},\cdots e_1{}^{(m)},\ e_2{}^{(m)},\ \cdots,\ e_{km}{}^{(m)}\}。$$

即此并集中共有$\sum_{i=1}^{m}k_i$个样本点，而且A_1，A_2，…，A_m是互不相容的事件，所以其中没有相同的样本点，因此由公式（1.2.1）有

$$P\{\bigcup_{i=1}^{m}A_i\}=\frac{\sum_{i=1}^{m}k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m}P\{A_i\} \qquad ■$$