

大 學 用 書

推 理 統 計 學

張 碧 波 著

三 民 書 局 印 行

推 理 統 計 學

張 碧 波 著

學歷：國立臺灣師範大學畢業

美國南加州大學研究

現職：陸軍財務經理學校專任副教授

銘傳商專兼任副教授

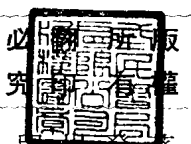
三 民 書 局 印 行

行政院新聞局登記證 局版業字第二〇〇號

中華民國六十五年十一月
中華民國六十七年十二月
中華民國七十二年十月
增訂初版
增訂再版

推理統計學

基本定價伍元叁角叁分



作者 張 碧
發行人 劉 振
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司

臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九八號

增訂版序

余對統計學素有興趣，前曾著「統計學」一書，于民國五十八年由台灣商務印書館出版；嗣又不斷研究，于六十五年秋出版「推理統計學」一書（自印）。今承三民書局之雅意，爰將「推理統計學」加以增補修訂，即將由該書局出版。

拙著「推理統計學」經此次增修後，除將原版疏漏處加以訂正補外，其重要之增修部分有三：（一）將第八章標題改名為「簡單迴歸分析」，並新增 8-8 節「迴歸分析中之變異數分析」、8-9 節「線型之 F 檢定」與 8-12 節「簡單迴歸分析之矩陣方法」三節。8-8 節係討論簡單迴歸分析中應變數之自由度與總變異之分割，及變異數分析對迴歸係數所提供之檢定等有關問題；8-9 節係討論有關所設迴歸模式之線型性質之檢定問題；8-12 節則介紹以矩陣代數方法，用簡明扼要之符號，來代表迴歸模式及變異數分析之基本形態。又因應用線型統計模式時，往往需要大量且廣泛之計算，故 8-12 節特將應用電腦協助執行計算之實例報表列出，以供讀者對照參考。至於原版之 8-8 及 8-9 兩節則依次改為 8-10 及 8-11 節。（二）增加了第九章「複迴歸分析」，討論幾種重要之複迴歸模式及有關的問題，並介紹複迴歸模式用矩陣符號表示之基本形態與複迴歸模式中之諸種推定公式及其應用。（三）原版第九、第十兩章依次改為第十及第十一章。

此書增修時，承楊淑貞教授于百忙中協助提供電腦計算報表，在此，謹申由衷之謝忱。

張碧波 民國六十七年九月于台北

自序

余於大專學校講授統計學、已逾十年；五十八年間、曾出版「統計學」一書，乃入門性質；今撰著此書——「推理統計學」，其主旨則在進一步介紹現代統計學之推理部分。

本書除着重基本觀念之闡明外，對各種公式之來源、詳加引證，用力尤多，每章並附習題，使讀者於熟諳原理之後，得以充分應用。全書所敘所述，力求明確，而理論與實用兼籌並顧，則其特點也。

本書共分十章：第一章介紹機率之基本概念及定理；第二章介紹隨機變數與機率分配；第三、四兩章介紹幾種重要之離散機率分配及連續機率分配；第五章介紹抽樣原理；第六、七兩章介紹估計原理及假設檢定，此乃統計推論之主要部分；第八章簡介簡單迴歸分析；第九章簡介一、二因子變異數分析；第十章介紹無母數統計方法。

著者夙好研習統計之學，孜孜兀兀，不敢稍怠，然以才力所限，此書自不免有其疏漏錯誤之處，敬希先進方家多多指正，幸甚感甚。

張 碧 波

民國六十五年九月

內 容 簡 介

本書主旨在介紹現代統計學之推理部分，計分十一章，包括機率概論、機率分配、抽樣原理、估計原理、假設檢定、迴歸分析、變異數分析及無母數統計方法等。其內容除着重基本觀念之闡明外，對各種公式之來源，詳加引證，用力尤多。全書所敘所述，力求明確，而理論與實用兼籌並顧，亦其特色。

1974.11.16

目 錄

第一章 機率概論

1-1	機率與統計學	1
1-2	集合之意義	1
1-3	集合之種類	2
1-4	集合之運算	4
1-5	集合之運算法則	8
1-6	樣本空間與樣本點	8
1-7	事 件	9
1-8	樣本點之點數	11
1-9	機率之定義	14
1-10	機率論之公理體系與機率運算之基本定理	16
	習題一	26

第二章 隨機變數與機率分配

2-1	隨機變數	29
2-2	機率分配	30
2-3	希望數與動差	51
	習題二	78

第三章 幾種主要離散機率分配

2 推理統計學

3-1	貝奴里試驗	81
3-2	二項試驗、二項分配與多項分配	82
3-3	超幾何試驗與超幾何分配	93
3-4	離散等機率分配	101
3-5	卜瓦松分配	103
3-6	幾何分配	109
3-7	負二項分配	112
	習題三	117

第四章 幾種主要連續分配

4-1	連續等機率分配	119
4-2	常態分配	121
4-3	甘瑪 (Gamma) 分配	138
4-4	指數分配	145
4-5	貝他 (Beta) 分配	148
	習題四	154

第五章 抽樣原理

5-1	樣本與母全體	157
5-2	隨機變數之和	159
5-3	隨機變數線型組合之動差	162
5-4	大數法則	171
5-5	中央極限定理	172
5-6	樣本平均數之抽樣分配	175
5-7	兩樣本平均數和 (或差) 之抽樣分配	177

5-8	卡方分配 1 或 (X^2 分配)	180
5-9	F 分配	189
5-10	t 分配	202
	習題五	214

第六章 估計原理

6-1	賽局理論	217
6-2	統計判定理論	221
6-3	點估計	228
6-4	區間估計	249
	習題六	274

第七章 假設檢定

7-1	假設檢定之意義	277
7-2	虛無假設與對立假設	277
7-3	簡單假設與複合假設	278
7-4	假設檢定之理論	279
7-5	型 I 與型 II 過誤	282
7-6	檢力函數與檢力	286
7-7	最佳危險域	289
7-8	概度比檢定	294
7-9	常態母全體平均數之檢定	299
7-10	兩常態母全體平均數差之檢定	303
7-11	常態母全體變異數之檢定	306
7-12	比率之檢定	310
7-13	配合度檢定	312

4 推理統計學

7-14 逐次檢定	315
習題七	322

第八章 簡單迴歸分析

8-1 迴歸分析之意義	327
8-2 迴歸曲線	329
8-3 母全體迴歸直線	335
8-4 迴歸母數 α 、 β 及 σ^2 之點估計	337
8-5 求 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ 之變異數 $v(\hat{\alpha})$ 及 $v(\hat{\beta})$	344
8-6 迴歸母數 α 和 β 之區間估計與檢定	345
8-7 預測	352
8-8 迴歸分析中之變異數分析	358
8-9 線型之 F 檢定	370
8-10 母全體相關係數 ρ 之估計	378
8-11 母全體相關係數 ρ 之檢定	383
8-12 簡單迴歸分析之矩陣方法	385
習題八	401

第九章 複迴歸分析

9-1 複迴歸模式	405
9-2 一般線型迴歸模式之矩陣表示法	408
9-3 最小平方估計量	409
9-4 變異數分析	414
9-5 迴歸係數之推定	420
9-6 預測	423

9-7 複共線性對迴歸係數及平方和之影響	426
9-8 偏判定係數	434
習題九	437

第十章 變異數分析

10-1 變異數分析之意義	441
10-2 一因子變異數分析	442
10-3 二因子變異數分析	456
習題十	466

第十一章 無母數統計方法

11-1 無母數統計方法之意義	469
11-2 中位數與百分位數之估計與檢定	470
11-3 符號檢定	474
11-4 維而克生符號等級檢定	477
11-5 馬恩、惠特尼檢定或等級和檢定	480
11-6 中位數檢定	483
11-7 連檢定	487
11-8 等級相關檢定法	492
習題十一	496

附錄 統計表	499
一、平方、平方根	499
二、對數表	500
三、二項機率總和 $\sum_{x=0}^r b(x; n, P)$	502

四、卜瓦松分配總和 $\sum_{x=0}^r P(x; \mu)$	503
五、常態曲線下之面積	506
六、卡方 (χ^2) 分配數值表	507
七、 F 分配數值表	508
八、 t 分配數值表	512
九、 r 與 z 轉換表	513
十、成對觀測維而克生檢定法 ω 之臨界值	514
十一、連檢定中 u 之顯著值	515
參考書目錄	517
索 引	521

第一章 機率概論

1-1 機率與統計學

現代統計方法主要之功能為根據樣本資料以推論其母全體之一般性狀。例如，根據樣本之平均數，推測其母全體之平均數；根據樣本之標準差，推測其母全體之標準差。由於樣本僅為母全體之一部分，根據部分資料而欲對全部資料有正確之了解，事實上是不可能的，因此，根據樣本對母全體所作之判斷及推論亦不可能完全確實。惟吾人可應用機率原理計算樣本統計量（Statistic）與其母數（Parameter）之可能差異之大小及其機率。例如，根據機率原理可計算出樣本之標準差與母全體之標準差之可能差異，亦即可以機率表示不確定推理之可靠程度，因而仍可由樣本推測母全體。故機率原理實為現代統計方法之主要基礎。

1-2 集合之意義

研究及闡明機率原理，須從集合概念着手。所謂集合（Sets）係指具有確定意義之事物之集體。而構成集合之個體稱為集合之元素（Element）或份子（Member）。例如，一所學校的全體學生為一集合，而每一位學生則為此一集合之元素；全部英文字母為一集合，而每一個英文字母則為該集合之元素。

2 推理統計學

爲簡便起見，通常以大寫字母 A, B, X, Y 等作爲集合之代表符號，小寫字母 a, b, x, y 等爲元素之代表符號。若 x 爲集合 A 之元素，則可書爲 $x \in A$ 。若 x 非集合 A 之元素時，可以 $x \notin A$ 表示之。例如，若集合 $A = \{1, 2, 3\}$ ，則 $3 \in A$ 而 $4 \notin A$ 。

說明集合之方法有下列兩種：

1 列舉法：乃對集合中所包含之每一元素一一列舉出來。此法多應用于所含元素有限之集合（即有限集合）。

例（1-2-1） 投擲一枚錢幣之結果可書爲

$$A = \{H, T\}$$

例（1-2-2） 擲一粒骰子之結果可書爲

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2 規則法：乃以規則或述句說明一集合。此法可應用于有限集合，亦可應用于無限集合。

例（1-2-3） 前述集合 B 代表擲一粒骰子之結果，若以 x 爲 B 之任一元素，則可書爲

$$B = \{x \mid x \text{ 爲一整數，且 } 1 \leq x \leq 6\}$$

又如， $C = \{x \mid x \text{ 爲長江中之魚}\}$

或 $D = \{y \mid y^2 + 2y + 1 = 0\}$

1-3 集合之種類

1 相等集合：凡集合 A 之每一元素亦爲集合 B 之元素，而集合 B 之每一元素亦爲集合 A 之元素，則謂集合 A 等於集合 B ，且以 $A = B$ 表示之。但若集合 A 或集合 B 中至少有一元素非彼此所共有時，則此二集合即不相等，並以 $A \neq B$ 表示之。

例（1-3-1） 若 $A = \{a, b, c\}$ ， $B = \{c, b, a\}$ ，

$$C = \{a, b, c, d, e\}, \text{ 則}$$

$$A = B, B = A, A \neq C \text{ 及 } B \neq C$$

2 部份集合 (Subset) : 可分為非真部份集合及真部份集合兩種。

(1) 非真部份集合：若 A 、 B 為兩個集合，且 A 中之每一元素是為 B 中之每一元素，則 A 稱為 B 之非真部份集合，其關係可書為 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ 。易言之，即 $A = B$ 時，則以上兩式成立。由是可見每一集合為其本身之部份集合。

(2) 真部份集合：若集合 A 中之每一元素是為集合 B 中之元素，但 A 中所含之所有元素並未超過 B 中之元素，則 A 被稱為 B 之真部份集合 (Proper Subset)，通常以符號 $A \subset B$ 表示之，但此處 $A \neq B$ 。

例 (1-3-2) 若 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

則 $A \subset S, B \subset S, B \subset A; S \subseteq S, A \subseteq A, B \subseteq B$

3 全集合 (Universal Set) : 凡所有集合為一特殊集合之部份集合，則此特殊集合稱為全集合，常以 U (或 S) 表之。

例 (1-3-3) 將平面上所有之點稱為一個全集合，而將構成線段之點，構成三角形之點，構成其他平面上圖形之點等稱為此全集合中之部份集合。用規則表之即為：

$$A_1 = \{x_1 \mid x_1 \text{ 為構成線段之點}\}$$

$$A_2 = \{x_2 \mid x_2 \text{ 為構成三角形之點}\}$$

⋮

$$A_k = \{x_k \mid x_k \text{ 為構成其他平面上圖形之點}\}$$

則代表平面上所有點之全集合可書為

$$U = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$$

4 推理統計學

一個含有 n 個元素之集合之所有部份集合之總數目為 2^n 個。

例(1-3-4) 全集合 $U = \{a, b, c\}$ ，共含三個元素，即 $n = 3$ ，故可能組成 $2^3 = 8$ 個部份集合，列舉之則為：

$\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}$

與 ϕ 。

4 空集合 (Null set)：不包含任何元素之集合稱空集合，或稱零集合，常以符號 ϕ 表之。

例(1-3-5) 若 $A = \{y \mid y \text{ 爲 } 7 \text{ 之非質數因數}\}$ ，則 A 為空集合。

集合原理要求空集合的概念，就如普通數學上需要“0”一般。空集合為每個集合之部份集合。

5 有限集合與無限集合

(1) 有限集合：凡一集合所含之元素數目為有限個數者稱有限集合。

例(1-3-6) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

因集合 A 僅包含四個元素，故為一有限集合。

(2) 凡一集合所含之元素數目為無限者稱無限集合。

例(1-3-7) $B = \{x \mid x \text{ 爲一正整數}\}$

因正整數之個數多至無法計數，故 B 所含元素乃無限。

1-4 集合之運算

就如數目字之運算產生新數目一般，集合之運算，亦導致新的集合之產生。若集合 A, B, C 等為全集合 U 之部份集合，則這些部份集合經過運算，形成新的集合，但仍為 U 之部份集合。

1 聯集 (Union)：集合 A 與集合 B 之聯集成為另一新集合，

其所包含之元素屬於 A 或屬於 B ，或屬於 A 與 B 所共有。此一運算所採用之符號為 $A \cup B$ ，且可書為

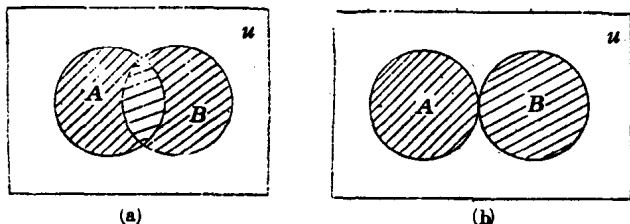
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \text{ 或 } x \text{ 屬於 } A、B \text{ 兩者}\}$$

例(1-4-1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

則 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u\}$

為簡明易解起見，可採用樊英 (Venn) 圖表示。在圖(1-4-1)(a)(b)中，兩圓斜線陰影部分即為聯集 $A \cup B$ 。



圖(1-4-1) A 與 B 之聯集合圖

2 交集 (Intersection)：集合 A 與集合 B 之交集為一新集合，其所包含之元素為 $A、B$ 所共有，以符號 $A \cap B$ 表之，且可書為

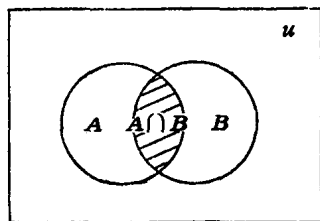
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例(1-4-2) 若 $A = \{a, b, c, d, e\}$

$$\text{與 } B = \{d, e, f, g\}$$

則 $A \cap B = \{d, e\}$

圖(1-4-2)中，兩圓相交部分即為交集 $A \cap B$ 。



圖(1-4-2) A 與 B 之交集合圖