教育部师范教育司组织编写

中学教师进修高等师范本科(专科起点)教材

常微分方程

魏俊杰　潘家齐　蒋达清　编

高等教育出版社

第一章　初等积分法

§1.1　基本概念(微分方程与解)

1°　什么是微分方程？为此我们先复习一下关于方程的一些基本概念.

所谓**方程**,是指那些含有未知量的等式,它表达了未知量所必须满足的某种条件.我们曾经讨论过几种类型.在代数中讨论过高次方程和线性方程组,它们都是**代数方程**.在学习初等函数时,我们还讨论过像 $\sin x+\cos x=1$, $e^x=x^2-1$ 这样的**超越方程**.

微分方程与上述方程不同,它的未知量是未知函数,而方程中含有导数或微分运算.一般说来,所谓**微分方程**是指联系自变量和未知函数及其导数(或微分)的关系式.如

$y'=xy$　(其中 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$x$ 为自变量,y 为未知函数);

$x\mathrm{d}t+t\mathrm{d}x=0$　(t,x 哪一个为自变量均可);

$y''+2y'-3y=e^x$　(x 为自变量,y 为未知函数);

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y$　(x,y 为自变量,z 为未知函数);

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$　(x,y,z 为自变量,u 为未知函数).

微分方程包括常微分方程与偏微分方程.常微分方程中的未知函数都是一元函数,未知函数的导数自然就是对仅有的自变量的导数.如上列方程中的前三个就是常微分方程.在偏微分方程中的未知函数是多元函数,方程中要出现未知函数的偏导数.如上列

方程中后两个方程是偏微分方程.本书只讨论常微分方程.以后若不特别说明,凡说到微分方程均指常微分方程.

下面通过一些具体例子,来说明这种方程的实际应用.

例 1 镭的衰变.

根据实验知道,放射性元素镭会不断地放出射线而逐渐减少其质量(这种现象叫衰变), t 时刻衰变的速率与 t 时刻剩余的质量成正比.如果已知镭在 $t = t_0$ 时为 R_0 ,试确定这块镭在时刻 t 的质量 R .

解 时刻 t 时镭的剩余量 R 是 t 的函数.由于 R 将随时间的增加而减少,故镭的衰变速率 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 应为负值.于是,按照衰变规律,可列出方程

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -kR, \tag{1.1}$$

其中 $k > 0$ 为比例常数.

为求上述常微分方程中未知数 $R = R(t)$,将(1.1)变形为

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} = -k\mathrm{d}t,$$

然后两端积分,得到

$$\ln R = -kt + C_0 \quad (C_0\text{ 为一积分常数}),$$

或者

$$R = C\mathrm{e}^{-kt} \quad (C = \mathrm{e}^{C_0}).$$

由于在 $t = t_0$ 时 $R = R_0$,代入上式得 $R_0 = C\mathrm{e}^{-kt_0}$,或者 $C = R_0\mathrm{e}^{kt_0}$,于是在时刻 t 镭的质量为

$$R = R_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}.$$

镭等放射性物质的质量所满足的这个规律在考古与地质学中很有意义.例如,从这个关系式出发,可以利用放射性物质来测定某种物体的绝对年龄.

在生态学中,简单的人口增长模型(马尔萨斯(Malthus)模型)

就类似(1.1). 马尔萨斯假定:在任何时刻 t,人口的增长率 $\frac{dN(t)}{dt}$ 始终与该时刻的人口数 $N(t)$ 成正比,记比例常数为 $r(r>0)$. 于是得到所谓的马尔萨斯模型

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t).$$

假设初始时刻 $t=0$ 时 $N=N_0>0$,则类似上述方法可解得

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

这表明人口按指数函数速率增长. 从实际统计数据来看,当时间 t 不很长时,它是比较符合实际的. 如果考虑到有限的资源对种群规模的影响及制约,则可对方程进行修改,从而更客观地描述人口增长规律. 请参见本章最后一节中的经典逻辑斯谛(Logistic)模型.

例 2 受到空气阻力的自由落体.

设质量为 m 的物体,在时间 $t=0$ 时自由下落,在空气中受到的阻力与物体下落速度成正比,求物体下落距离与时间的关系.

如图 1.1建立坐标系. 设 x 为物体下落的距离,于是物体下落的速度为 $\frac{dx}{dt}$,加速度为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

根据牛顿第二定律 $F = ma$,可列出方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} + mg, \tag{1.2}$$

其中 k 为一正比例常数,右端第一项的负号表示阻力与运动的方向相反.

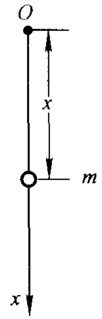

图 1.1

我们现在只考虑无阻力,即 $k=0$ 情形. 这时,(1.2)变成

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

为求 $x(t)$,对上式积分两次,得到

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1,$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

其中 C_1 及 C_2 为两个常数.考虑自由落体的初始状态.由于选取物体的初始位置为坐标原点,故有 $x(0) = 0$;又由于物体为自由下落,即初始速度 $v_0 = x'(0) = 0$.将此两条件代入上述二式,可确定 C_1,C_2 分别为

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 0.$$

于是,自由下落物体的距离公式为

$$x = \frac{1}{2}gt^2.$$

例 3 单摆.

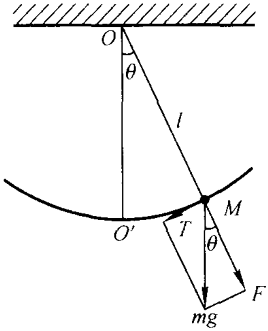

图 1.2

图 1.2为一单摆,上端固定在 O 点,M 为一质量为 m 的质点,摆杆 OM 长为 l,质量可以忽略,单摆的平衡位置为铅垂线 OO'.现将质点 M 拉离 OO' 一个角度 θ_0,然后松开任其自由运动.试求摆杆 OM 和铅垂线 OO' 的夹角 θ 与时间 t 的关系.

将重力 mg 分解为径向力 F 与切向力 T,$T = mg\sin\theta$.M 的切向加速度为 $a = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.于是,由牛顿第二定律可列出方程

$$ma = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad 或 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{1.3}$$

如令初始时刻 $t = 0$,摆杆的初始位置为 θ_0,初始角速度为 0.从

而上述问题归结为求解满足方程(1.3)及条件 $\theta(0)=\theta_0,\theta'(0)=0$ 的函数 $\theta=\theta(t)$ 的问题了.

从以上几个例子我们看到,从实际问题中提出来的常微分方程是各式各样的.以后将会看到各种类型微分方程都有其自身的特点.

常微分方程中**未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶**.例如,方程(1.1)为一阶方程,(1.2)与(1.3)是二阶方程,以后我们还会见到更高阶的方程.

一阶常微分方程一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0. \tag{1.4}$$

如果(1.4)能解出 y',则得到

$$y'=f(x,y), \tag{1.5}$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0. \tag{1.6}$$

(1.4)称为**一阶隐式方程**;(1.5)称为**一阶显式方程**;(1.6)称为**微分形式**的一阶方程.

一般地,n **阶显式方程**具有形式

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{1.7}$$

n **阶隐式方程**一般形式记为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{1.8}$$

2° 微分方程最重要的概念是"解"的概念.对于代数方程的解,我们已比较熟悉,在微分方程中,解的概念是与之相似的.

定义 1.1 如果把函数 $y=y(x)$ 代入方程(1.8)中,能使方程在区间 $I\subset\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 上变为恒等式,则称 $y=y(x)$ 为方程(1.8)在区间 I 上的一个解.

易验证函数 $y=x^2+C$ 为微分方程 $y'=2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解;函数 $x=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ (C_1,C_2 为任意常数)为微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}=g$ 的解.

例 4 验证函数

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x \qquad (C_1,C_2\text{ 为任意常数})$$

为方程 $y''+y=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解.

解 事实上,在 $(-\infty,+\infty)$ 上有

$$y''=-(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

所以在 $(-\infty,+\infty)$ 上有 $y''+y\equiv 0$,从而所设函数为方程的解.

定义 1.2 n 阶常微分方程的含有 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 称为该方程的**通解**.由隐式表出的通解称为**通积分**.给通解中的任意常数以定值,所得到的解称为**特解**.

例如,$y=Ce^x$ 为一阶方程 $y'=y$ 的通解;$y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 为二阶方程 $y''+y=0$ 的通解;$x^2+y^2=C$ 为方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ 的通积分.

为了确定微分方程的特解,我们通常给出这个解所必需满足的条件是初始条件.如例 1 中 $t=t_0$ 时 $R=R_0$;例 2 中的 $x(0)=0,x'(0)=0$;例 3 中的 $\theta(0)=\theta_0,\theta'(0)=0$ 就是初始条件.

一阶方程(1.5)及(1.6)的初始条件为

$$y(x_0)=y_0.$$

求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**.方程(1.5)的初值问题常记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases} \tag{1.9}$$

初值问题也常称为**柯西(Cauchy)问题**.

为了便于研究方程解的性质,我们通常考虑解的图象,并且称之为微分方程的**积分曲线**.因此初值问题(1.9)的几何意义是在 xOy 平面上求经过点 (x_0,y_0) 的积分曲线.以后,为叙述方便,我

们对解和积分曲线这两个名词在很多情形都不加以区别.

例 5 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 2x, \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

解 前面已知函数 $y = x^2 + C$(C 为任意常数)是 $y' = 2x$ 的解.为使 $y(1) = 4$,将其代入 $y = x^2 + C$ 中即有 $C = 3$,于是,$y = x^2 + 3$ 为所求初值问题的解.

如果已求得某微分方程的通解,而欲求满足某个初始条件的特解,往往可以用初始条件去确定通解中的任意常数而得到.

例 6 求方程 $y'' + y = 0$ 的满足

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

的解.

解 方程的通解为

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

求导数后得

$$y' = C_1 \cos x - C_2 \sin x.$$

将初始条件代入,得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_2 = 1, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} C_2 = -1. \end{cases}$$

由此解得 $C_1 = 0, C_2 = \sqrt{2}$,故所求特解为

$$y = \sqrt{2} \cos x.$$

这一节主要介绍了常微分方程的一些最基本的概念,本章其余几节将要讨论某些具体类型的常微分方程的**初等解法**.初等解法也称为**初等积分法**.其所以称为初等积分法,是因为这种解法最后都把求解问题化成求积分,并将方程的通解用初等函数或它的积分表示出来.凡是能做到这一点的常微分方程,称为**可积的方**

程.下面几节就是介绍某些可积方程的解法.

习 题 1.1

1.指出下列方程的阶数：

1) $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$；　　2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$；

3) $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2}+1=0$；　　4) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=4$；

5) $y^{(4)}-2y'''+y''=0$.

2.验证给出的函数是否为相应微分方程的解：

1) $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y$, $p(x)$ 连续，　　$y=Ce^{\int p(x)dx}$；

2) $(x+y)dx+xdy=0$，　　$y=\dfrac{C^2-x^2}{2x}$；

3) $y''+\omega^2y=0$，　　$y=A\sin(\omega x+B)$；

4) $y''=x^2+y^2$，　　$y=\dfrac{1}{x}$.

§1.2 变量可分离方程

本节要介绍一类最简单的一阶方程,即**变量可分离方程**

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y),$$

或

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0.$$

1° 首先研究方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y) \tag{1.10}$$

的解法.我们总假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.

先讨论 $\varphi(y)\neq 0$ 的情形.

假设 $y(x)$ 为(1.10)在 $[a,b]$ 上任意一个解,根据解的定义,

应有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x)\varphi(y(x)), \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

因 $\varphi(y) \neq 0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))} \equiv f(x)\mathrm{d}x, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

设 $y(x_0) = y_0, a < x_0 < b, c < y_0 < d$，将上式从 x_0 到 x 积分得到

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))} \equiv \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

于是(1.10)任意适合初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解 $y = y(x)$ 必须满足方程

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

记

$$\Phi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}, \qquad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$$

(1.11)就可以写成方程

$$\Phi(y) = F(x). \tag{1.11$'$}$$

下面证明：在所设条件下，方程(1.11)′(即(1.11))存在隐函数 $y = y(x)$，满足 $y(x_0) = y_0$，且它是微分方程(1.10)的解.

事实上，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续，$\Phi(y_0) = F(x_0)$，以及 $\Phi'(y) = \dfrac{1}{\varphi(y)} \neq 0$，故(1.11)′满足隐函数存在定理的全部条件. 所以，(1.11)′确定了唯一的隐函数 $y = y(x)$ 满足 $y(x_0) = y_0$，且连续可微. 在 x_0 的邻域上有

$$\Phi(y(x)) \equiv F(x),$$

即

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))} \equiv \int_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x,$$

两端对 x 求导数,即

$$\frac{y'(x)}{\varphi(y(x))} \equiv f(x) \quad 或 \quad y'(x) \equiv f(x)\varphi(y(x)).$$

这表明 $y = y(x)$ 为方程(1.10)在 x_0 的邻域上满足 $y(x_0) = y_0$ 的解.所以,在所设条件下,(1.10)的满足 $y(x_0) = y_0$ 的解在 x_0 的邻域上是存在且唯一的.

综上所述,求微方程(1.10)的满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的解的问题,就化为求(1.11)的两端的积分,并从(1.11)′中求解 y 的问题了.

在具体求解方程(1.10)时,往往把(1.11)写成不定积分的形式,即

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{1.11}''$$

由(1.11)″解出 $y = \varphi(x, C)$,就是(1.10)的通解.所以(1.11)″是(1.10)的隐式通解,即通积分.

再来讨论若存在 y_0 使 $\varphi(y_0) = 0$ 的情形.

易证 $y = y_0$ 为(1.10)的一个解.事实上,以 $y = y_0$ 代入(1.10)两端全为零.

于是,方程(1.10)除了通积分(1.11)″之外,还可能有一些常数解 $y = y_k$,它们满足 $\varphi(y_k) = 0$.

2° 变量可分离的以微分形式出现的方程

$$M(x)N(y)\mathrm{d}x + P(x)Q(y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.12}$$

这时,x 和 y 的地位是“平等的”,即 x 与 y 都可以被选为自变量或函数.

当 $N(y)P(x) \neq 0$ 时,用它去除(1.12)两端,方程变成

$$\frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x + \frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = 0.$$

这时,变量已分离了,两端积分即得通积分

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = C. \tag{1.13}$$

再进一步考虑 $N(y)=0,P(x)=0$ 的情形.求方程 $N(y)=0,P(x)=0$ 的实根,可得(1.12)的常数解.

例 1 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}.$$

解 当 $y\neq 0$ 时分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分,即得通积分

$$\ln|y|=\ln|x|+C_1$$

或

$$\ln|y|=\ln|Cx| \qquad (C=\mathrm{e}^{C_1}\neq 0).$$

解出 y,得到通解

$$y=Cx \qquad (C\neq 0).$$

另外 $y=0$ 是方程常数解.所以,在通解 $y=Cx$ 中,任意常数 C 也可以为零.

例 2 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解 当 $y\neq\pm 1$ 时,方程的通积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+C,$$

即

$$\arcsin y=\arcsin x+C.$$

解出 y,得到通解

$$y=\sin(\arcsin x+C).$$

另外,还有常数解 $y=\pm 1$,它们不包括在上述通解中.

例 3 求解方程

$$x(y^2-1)\mathrm{d}x+y(x^2-1)\mathrm{d}y=0.$$

解 首先易见 $y=\pm 1, x=\pm 1$ 为方程常数解.

当 $y\neq\pm 1, x\neq\pm 1$ 时,两端同除以 $(x^2-1)(y^2-1)$ 得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1}+\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=0.$$

积分即得方程通积分

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C| \qquad (C\neq 0),$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=C \qquad (C\neq 0).$$

注意到,当 $C=0$ 时,包括常数解 $x=\pm 1, y=\pm 1$, 因此在通积分中可以允许 $C=0$.

我们还指出,当求得一个方程通积分后,通常认为求解过程已完成,一般来说,并不勉强从中求出解的显式表达式来.

例 4 证明 §1.1 节例 2 中受到空气阻力的自由落体下落速度有限,并求此极限速度.

解 建立坐标系如图1.1,设下落速度为 $v(t)$,则由(1.2)得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv+mg, \tag{1.14}$$

而初始条件为 $v(0)=0$.

将上述方程分离变量,以初始值 $t=0, v=0$ 为积分下限取定积分,得

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g-\frac{k}{m}v}=\int_0^t \mathrm{d}t.$$

积分得

$$\left[-\frac{m}{k}\ln\left|g-\frac{k}{m}v\right|\right]_0^v=t,$$

即

$$\ln\left|g-\frac{k}{m}v\right|-\ln g=-\frac{k}{m}t,$$

$$\left|1-\frac{k}{mg}v\right|=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

由于下落过程中,合外力大于零,即 $mg - kv > 0$,因此我们有

$$1 - \frac{k}{mg}v = e^{-\frac{k}{m}t},$$

或

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

当 $t \to +\infty$ 时, $v(t) \to \frac{mg}{k}$. 可知物体下落过程中下落速度有限,其极限速度为 $\frac{mg}{k}$.

习 题 1.2

1.求下列可分离变量微分方程的通解:

1) $y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$;

2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ln y$;

3) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-y}$;

4) $\tan y\mathrm{d}x - \cot x\mathrm{d}y = 0$.

2.求下列方程满足所给初始条件的解:

1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(y-1), y(0) = 1$;

2) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$;

3) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0$;

4) $(y^2 + xy^2)\mathrm{d}x - (x^2 + yx^2)\mathrm{d}y = 0, y(1) = -1$.

3.求解方程 $x\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x + y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y = 0$.

4.求一曲线,使其上每一点的切线的斜率为该点横坐标的二倍,且通过点 $P(3,4)$.

5.求曲线,使其具有如下性质:曲线上各点处的切线,切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形(以 x 轴为底),且通过点(1,2).

6.人工繁殖细菌,其增长速度和当时的细菌数成正比.

1) 如果 4 小时的细菌数即为原细菌的 2 倍,那么经过 12 小时应有多少?

2）如在 3 小时的时候，有细菌 10^4 个，在 5 小时的时候有 4×10^4 个，那么在开始时有多少个细菌？

§1.3 齐次方程(可化为变量可分离方程)

1° 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.15}$$

的方程称为**齐次方程**.

该类方程的特点是它的右端是一个以 $\frac{y}{x}$ 为变元的函数，经过下面的变量替换，可把它化为变量可分离方程.

令 $u=\frac{y}{x}$ 或 $y=ux$，

则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入(1.15)得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u) \quad 或 \quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u. \tag{1.16}$$

此为变量可分离方程.当

$$f(u)-u\neq0$$

时，得上述方程通积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C.$$

再讨论 $f(u)-u=0$ 情形.若存在常数 u_0 使 $f(u_0)-u_0=0$，则 $u=u_0$ 是(1.16)的解，代回(1.15)，得到齐次方程(1.15)的解

$$y=u_0x.$$

例 1 求解

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy-y^2.$$

解 将方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

令 $y=xu$，代入上式得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-u^2,$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-u^2.$$

易见 $u=0$ 为这方程一个解，从而 $y=0$ 为原方程一个解. 当 $u\neq 0$ 时，分离变量得

$$-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分得

$$\frac{1}{u}=\ln|x|+C \quad 或 \quad u=\frac{1}{\ln|x|+C}.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入，得原方程的通解

$$y=\frac{x}{\ln|x|+C}.$$

例 2 抛物线的光学性质.

在中学平面解析几何中已经指出，汽车前灯和探照灯的反射镜面为旋转抛物面，即将抛物线绕对称轴旋转一周所形成的曲面，将光源安置在抛物线的焦点处，光线经镜面反映就成为平行光线了. 这个问题在解析几何中已作了证明，现在来说明具有前述性质的曲线只有抛物线.

由于对称性，只考虑在过旋转轴的一个平面上的轮廓线 l. 如图 1.3，以旋转轴为 Ox 轴，光源放在原点 $O(0,0)$，设 l 之方程为 $y=y(x)$. 由 O 点出发之光线经镜面反射后平行于 Ox 轴.

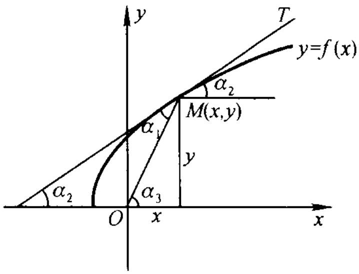

图 1.3

过曲线 $y = y(x) > 0$ 点 $M(x,y)$ 作切线 MT,则由光的反射定律:入射角等于反射角,得到

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2.$$

因 MT 的斜率为 y',则

$$\tan \alpha_2 = y', \qquad \tan \alpha_3 = \frac{y}{x},$$

而

$$\tan \alpha_3 = \tan 2\alpha_2 = \frac{2\tan \alpha_2}{1 - \tan^2 \alpha_2},$$

从而

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1 - y'^2}.$$

解出 y',得到

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}. \qquad (*)$$

我们假设 $0 < \alpha_3 < \frac{\pi}{2}$,即 $0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{4}$,因此 $y' = \tan \alpha_2 > 0$. 这样,只取根号前的正号,即当 $y > 0$ 时, $y = y(x)$ 满足方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

上述方程是齐次方程.令 $\frac{y}{x} = u$,即 $y = ux$,代入上式得

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u},$$

分离变量后得

$$\frac{u\,du}{-(1 + u^2) + \sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

上述方程可以直接积分.