298375
成都工学院图书館
基本館藏

现代应用数学丛书

常微分方程

〔日〕福原满洲雄　佐藤常三　古屋　茂　著

成都工学院图书館

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

常微分方程

福原满洲雄
〔日〕佐藤常三 著
古屋 茂
張庆芳 張继貞 譯
張 学 銘 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。主要內容包括常微分方程基础定理，一般綫性方程組，以及非綫性方程組三部分。計九章五十九节。系統地介紹了常微分方程最重要的基础理論，突出地論証解之存在与唯一性定理以及解之一般求法。可供大专院校理工科师生参考，对于进一步学习某些常微分方程专門著作也是一本非常有用的参考书。

原书分三册，第 1 章至第 3 章为第一册，第 4 章至第 7 章为第二册，第 8 章至第 9 章为第三册。現合并为一册出版。

現代应用数学丛书

常 微 分 方 程

原 书 名　常微分方程式 I II III

原 著 者　〔日〕稲原滿洲雄　佐藤常三　古屋茂

原出版者　岩波书店，1957，1958

譯 者　張庆芳　張继貞

校 者　張学銘

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32　印張 8 28/32　字数 209,000

1962 年12月第 1 版　1962 年12月第 1 次印刷

印数 1—5,700

統一书号：13119・487

定　价：（十四）1.50 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书主要內容包括常微分方程基础定理，一般綫性方程組，以及非綫性方程組三部分。由福原滿洲雄等三人分别执笔写成。計分九章，五十九节。

第一部分包括前三章。第1章求积法与第3章不变点的存在定理从全书內容結构来看是“自封”的，就是說讀者如果具有微分方程的初等解法知識，可省去第1章不讀；讀者如果不貪求解之存在定理的抽象形式，也可把第3章略去不讀。与此相反，基于某种特殊目的，也可单独地讀第1章或第3章。第2章介紹了解的一般基础理論。

第二部分共四章。首先由第4章介紹一般綫性方程組理論；然后于第5章，第6章分别討論其特殊情况即常系数的与周期系数的方程；第7章叙述 Ляпунов 特征数理論。

第三部分先后于第8，9两章論及周期系数与概周期系数的非綫性方程組的两种特殊情况。

全书突出地論証解之存在与唯一性定理以及解之一般求法；至于定性理論只于奇点，解之估值，特征数，稳定性等很少几处稍略談及，而缺乏 Ляпунов 稳定性理論以及边值問題的定性理論；更未触及如方程之解析理論等其他方面专題。

今将本书內容重点及其特点擇要介紹如下：

第2章基础定理是关于解之定性研究的根本命題。Cauchy 問題解存在定理(实变数)的証明采用了 Picard 逐次逼近法，所得到的結果是“小范圍”的，或者說是“局部性”的。关于 Lipschitz 条件的使用有两点值得提出：其一，条件的給出是“小范圍”的[§18]；

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

其二,逐次逼近之間的估值采用比較精确的形式,即指数級数通項[(15.17)]。

解之唯一性定理是作为 ε-近似解之間的估值公式的推論而得到的。ε-近似解是存在定理的另一个証法,即 Peano 方法的重要手段,作者似乎不愿牵涉过多,但也給出 ε-近似解与解之間的估值公式[§16],它的用处是很大的[§19, §20]。应注意唯一性的这样証明所得到的結果是"大范圍"的[§16]。

关于解之存在区間除通常习見者外[(17.7)],尙給出在某种意义下最大的[(17.8)],即所謂 Lindelöf 注意,由它推出綫性方程組解之存在唯一性定理是很方便的[§17]。

由"小范圍"所定义的解經过类似解析拓展的手續而扩充到"大范圍",进而淺显地給出解之軌迹为曲綫弧的这个命題[§18,定理 6]。

解关于参数的連續性定理証明未用 Picard 逐次逼近法,而技巧地选取一个变量代換将被考虑的方程归結到一个較簡单方程上去而得到的[§19 定理 7]。

为了更多地得出解之性质,如解关于参数的可微性等,照例地須加强假設条件,并且由于采用逐次逼近法未必方便的緣故,本书此处証明还是采用通常的涉及到变分方程的方法[§20]。

Cauchy 問題解存在定理(复变数)本来可采用逐次逼近法証明,并且这样做时解之定义域优于用优函数法所得到的結果。但作者却采用优函数法,其用意似乎一方面保持这一优良傳統方法,一方面也指出不沿"逐次逼近"亦有証明本定理的途徑[§21]。

值得注意的是 §22 定理 12,借助于它,甚易建立复变数綫性方程解之解析性定理,以及含参数解之解析拓展定理[§23 定理 15]——Poincar'e 注意。

第 3 章主要介紹两个存在定理,即 Schauder 型定理[§30]与

24 7/62

Leray-Schauder 定理[§32]。它們分别为欧氏 n 維空間的 Brower 不变点定理以及欧氏 n 維空間映射度存在定理在范空間的推广。当然，这幷非是这两个定理的最抽象形式，因为它們还可移植于綫性拓扑空間，而范空間为其特殊形式——但証明方法基本上是一致的。邏輯上它們是分别建立的，但于 §31 也指出：Schauder 型定理为 Leray-Schauder 定理之推論。更重要的是——也是第一部分之目的——于 §30 把方程解之存在定理从 Schauder 型定理推导出来。

在第 4 章照例地給出有关綫性齐次方程的基础解組的 Wronskian 理論 [§36] 与在綫性方程組理論有用的共軛組[§37]，以及关于綫性非齐次方程求解之常数变易法[§38]，但須提出以下几点注意。

§34 給出所謂本书的基本不等式，它时常于綫性方程組解之估値有界性的考慮中是所謂 Bellman 不等式❶的一个推广。又綫性方程組求解公式是借助于核矩陣法而建立的 [§35]。在 §39 的 ε–近似解的論述中触及到几乎常系数綫性方程組的这一概念，但未明确提出。

第 5 章討論綫性齐次方程組的特殊情况——常系数。先于 §40 利用矩陣論 Jordan 分解定理給出綫性齐次方程組的基础解組的表現形式。其次于 §41，論述两个常系数綫性方程的方程組的奇点分类，兼涉及稳定性問題。該节作用有二：其一，給予前节理論一个具体說明；其二，有助于行使分析–拓扑方法对于非綫性方程組解之稳定性的討論——惟本书不談。在 §40 未曾談及稳定性

---

❶ 所謂 Bellman 不等式就是下述命題：

$$u\leqslant c_1+\int_0^t uv\,dt_1,\ \text{此处}\ u(t),\ v(t)\geqslant 0,\ c_1\geqslant 0,\ u\leqslant c_1 e^{\int_0^t v\,dt_1}.$$

可参見 R. Bellman，微分方程的解的稳定性理論，中譯本 132 頁。

一詞，更未論及其判斷法則，是以此两节內容的联系似不易发現。

第 6 章討論綫性齐次方程組的另个特殊情况——周期系数，从寻常事例，可知周期系数綫性齐次方程組未必有非零之周期解，由此即引出所謂 Floquet 理論，同时又有所謂周期系数組可簡化为常系数組的这个 Ляпунов 定理。二者事虽各异，其理則一，本书只强調后者，而忽視前者[§42, §43]。作为前述理論应用，于 §44 对于周期系数二阶方程論述极詳，这里有对于著名的 Mathien 型方程的討論[§44]。

关于方程組解之有界性的判断是很困难的，而解之漸近理論却能給予补助，Ляпунов 特征数理論是研究漸近性理論的重要途徑。第 7 章首先給出特征数演算之基本性质，其后将特征数应用于齐次方程上而得出所謂特征数理論——主要是特征数的估值以及利用系数对于特征数的計算[§45]。

最后两章分别考虑所謂拟綫性方程組的特殊类型的周期解与概周期解的存在問題与逼近問題，此两章內容的邏輯結构是相仿的，都是建基于綫性方程組的 [§46, §53]——参見本书各章邏輯关系表。

非綫性方程的 Lindstedt 解法于 §49 中提及，Van der Pol 方程虽然缺少，而类型与之相近的方程則于例題中出現[§49,例]，但如 Emden-Fonler 方程这样重要的二阶非綫性方程本书未曾提及。

在概周期解的結果还不完备的情况下，本书第 9 章是很难得的。

至于本书所使用的工具，除第 3 章外，主要是数学分析，矩陣，(代数的)綫性方程組，行列式等；积分是 Riemann 的。

本书有时論証的邏輯过程长而叙述簡短，以及有时不明确提出所引用的重要(书外)定理与定义，尤其是缺乏指导文献与序言，

这就可能使初学者讀本书时碰到一些困难。

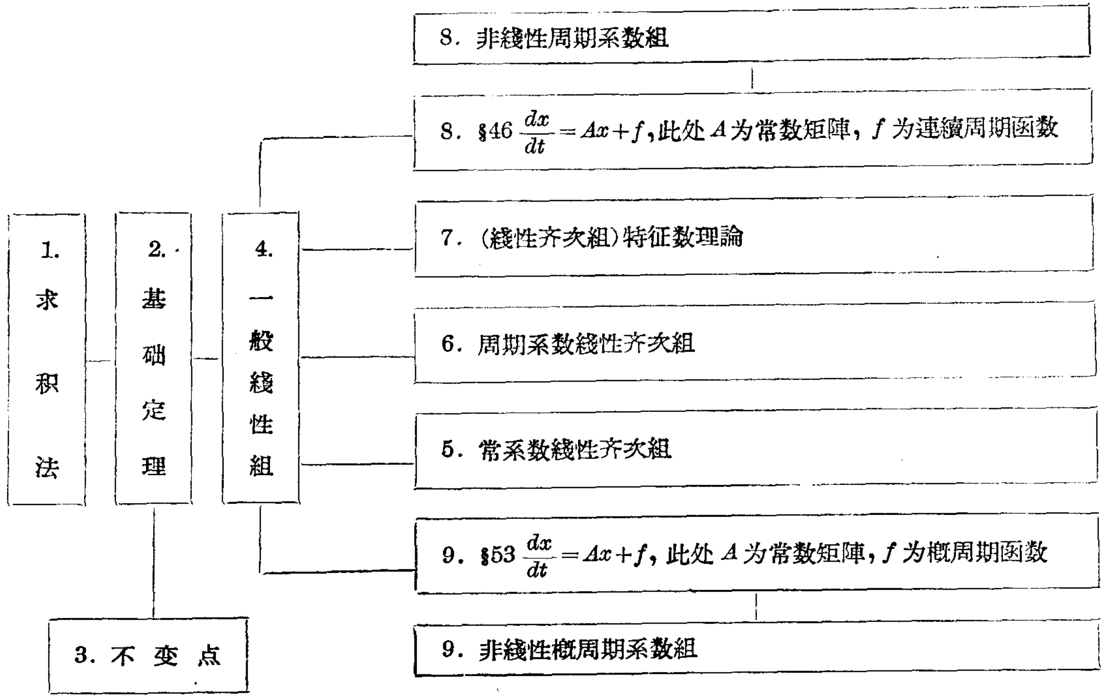
譯者把讀本书所遇到之疑义注于书末，以求正于专家与讀者。

在本书翻譯工作上，譯者难以忘記的而不能不提出的是，业师楊宗磐教授在譯文內容上，文字上給予大量的指示与教正；同事吳振德先生在注解計算工作上給了很多帮助；同学王玉怀先生繕写与整理譯稿达一年之久，譯稿整理完毕的那一天正是他向工作崗位出发的前夕。

本书承張学銘教授对譯文作了仔細校正审察，又加了若干注解，譯者衷心地致以敬意与謝忱。

張庆芳、張继貞 于62年初

本书各章邏輯关系一覽表



本表为譯者所拟,其中阿拉伯数碼表示本书章号。

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第1章[1] 求 积 法

用数学的方法，經过有限次地归并已知函数与作不定积分求出微分方程的解，叫做用**求积法**解微分方程。求积法也叫做初等解法。

可用求积法解的微分方程毕竟是一些特殊的方程，在許多情况下求积法是不适用的。但对于微分方程中常見的类型在什么情况下能用求积法求解，却是一个很重要而具有实际意义的問題。

§1 可分离变数型

凡是一阶常微分方程[2]，不作特别声明时，y 就表示 x 的函数，y' 就表示这一函数的导数。如果 y' 等于仅以 x 为变数的函数与仅以 y 为变数的函数的乘积，则称这种微分方程为**可分离变数型**。設 X 表示仅以 x 为变数的函数，Y 表示仅以 y 为变数的函数，则可分离变数型的微分方程大多可写成形式

$$Y\,dy = X\,dx. \tag{1.1}$$

毫无疑問它与

$$y' = X/Y \tag{1.2}$$

有相同的意义。

用等式

$$\int X\,dx - \int Y\,dy = C \quad (C\text{ 为任意常数}) \tag{1.3}$$

定义一个 x 的函数 y. 关于 x 微分 y 就得到

$$X - Yy' = 0.$$

---

[1] 第1章至第3章由福原执笔。——原书注

[2] 只含有自变数，自变数的函数以及这一函数的导数的关系式叫做一阶常微分方程。以式表之就是 $F(x, y, y') = 0$.——原书注

由这一等式解出 y' 后就得到(1.2)，所以从(1.3)可得(1.2)的解。对于一阶常微分方程，含有一个任意常数的解，如上面所得到的那个解，叫做**通解**❶。

例1 $$y'=-\sqrt{1-y^2}/\sqrt{1-x^2}.$$

将此等式写成(1.1)的形式就得到

$$dy/\sqrt{1-y^2}=-dx/\sqrt{1-x^2}.$$

积分后得到

$$\arcsin y+\arcsin x=C.$$

例2 $$y'=\lambda y/x \quad (\lambda\text{ 是常数}).$$

将此等式写成(1.1)的形式

$$dy/y=\lambda dx/x.$$

积分后得到

$$\log y=\lambda\log x+C. \tag{1}$$

化对数方程为指数方程，得

$$y=Cx^\lambda. \tag{2}$$

注意 (1)，(2)中 C 的值并不相同。将(1)变形后所得到的式子并不是(2)，而是

$$y=x^\lambda e^C. \tag{3}$$

因为 e^C 也表示任意常数，故可改写为 C，从而得到(2)式。

严格一些說，当限定变数取值的范圍为实数时，e^C 的值恒正，因而 e^C 所表示的任意常数也只能是正数。如果只在实数范圍內考慮問題，可将(1)式中的 x, y 分别表为 $|x|$, $|y|$，从而(2)式就是

$$|y|=|x|^\lambda e^C,$$

即
$$y=\pm e^C|x|^\lambda.$$

等号右端的符号依下述規則决定：当 $y>0$ 时，取"+"号；当 $y<0$ 时，取"−"号。在 C 取实数值的条件下，e^C 固然是正数，但是它的前边还有"±"号，所以我們把解写为(2)的形式后，认为式內的 C 可表正值或負值。

如果考虑变数取复数值时，就可以省去这一項繁瑣的注意了。由此也可以理解到把初等函数看成是复变函数的优越性。这項注意对于熟知函数論的讀者是不成問題的，因此今后对类似的情况不再作解釋了。

---

❶ 通解定义，可参看 И. Г. Петровский："常微分方程讲义"一书。——校者注

§2 齐 次 型

經过变数变换而将所給微分方程化为已知的类型来求解，这种方法是求积法中最常用的。齐次型微分方程就是一个簡单的例子。

形如

$$y'=f(y/x) \tag{2.1}$$

的方程，其中 y' 是仅以 y/x 为变数的函数，叫做**齐次型**的微分方程。

令 $y=xu$，則

$$xu'=f(u)-u$$

就是一个可分离变数型的方程。对此式积分卽得

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\log x+C.$$

改写为指数形式后就得到

$$\exp\int\frac{du}{f(u)-u}=Cx.$$

在

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \quad (ab'-a'b\neq 0) ❶ \tag{2.2}$$

---

❶ 当 $ab'-a'b=0$ 时，則 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k$（此处 k 为比例常数）。因而 $a'=ka, b'=bk$，于是(2.2)成为

$$y'=f\left\{\frac{(ax+by)+c}{k(ax+by)+c'}\right\}.$$

再命 $u=ax+by$，則 $\frac{du}{dx}=a+by'$；从而(2.2)成为

$$\left(\frac{du}{dx}-a\right)\frac{1}{b}=f\left(\frac{u+c}{ku+c'}\right),$$

卽

$$\frac{du}{dx}=bf\left(\frac{u+c}{ku+c'}\right)+a.$$

因而(2.2)化为可分离变数型了。

或用本节习題所示之法，也可将(2.2)化为可分离变数型，不管 $ab'-a'b$ 是否等于零。——譯者注

的情况下，設

$$ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$$

的解是 $x=\alpha$, $y=\beta$，并使 $x=\xi+\alpha$, $y=\eta+\beta$. 于是得关于 ξ, η 的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a'\xi+b'\eta}\right),$$

此等式的右端是仅以 η/ξ 为变数的函数，因而这是一个齐次型的微分方程。

例 $$y'=\frac{x+y+1}{x-y-3}.$$

由方程組 $x+y+1=0,\quad x-y-3=0,$

可以解出 $x=1,\quad y=-2.$

于是命 $\xi=x-1,\quad \eta=y+2,$

就得到一个齐次型的方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}.$$

再命 $\eta=\xi u$，就得到可分离变数型的方程

$$\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{1+u}{1-u}-u.$$

积分后即得 $$\operatorname{arc\,tan} u-\frac{1}{2}\log(1+u^2)=\log\xi+C,$$

上式变形之后就是

$$\operatorname{arc\,tan}\frac{y+2}{x-1}=\frac{1}{2}\log\{(x-1)^2+(y+2)^2\}+C.$$

习題 对(2.2)作变换

$$X=a'x+b'y+c',\quad Y=ax+by+c$$

后，也可以得到一个可分离变数型的方程。試以这一方法解前一例題中的方程。

§3 綫性微分方程

形如

$$y'=p(x)y+q(x) \tag{3.1}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com