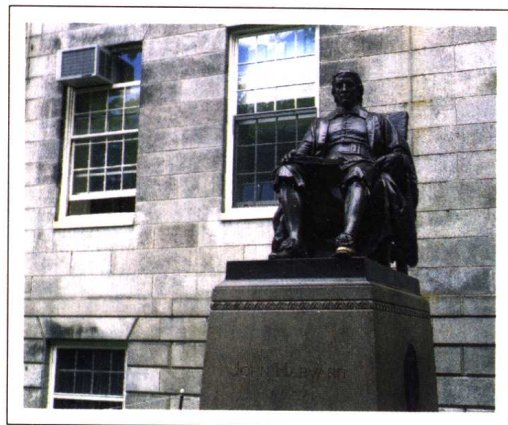


新东方学校出国考试丛书



# GRE GMAT 数学

吴强 编著



世界知识出版社

# GRE & GMAT 数学

吴 强 著

世界·心·城 出版社

图书在版编目(CIP)数据

GRE&GMAT 数学/吴强著. - 北京:世界知识出版社,2001.9

ISBN 7-5012-1605-3

I. G... II. 吴... III. ①研究生-入学考试-美国-自学参考资料②高等数学-解题  
IV. H310.41

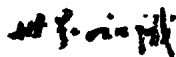
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057417 号

责任编辑 / 孟淑贤 刘 岩

封面设计 / 文 敏

责任出版 / 尧 阳

责任校对 / 秦 丹

出版发行 /  出版社

地址电话 / 北京市东城区干面胡同 51 号 (010)65265933

E-mail: gcgjz@public.bta.net.cn

邮政编码 / 100010

经 销 / 新华书店

排 版 / 华东印刷厂照排中心

印 刷 / 北京科技印刷厂

开本印张 / 787×1092 毫米 16 开本 14.5 印张 344 千字

版 次 / 2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷

印 数 / 1—11000

书 号 / ISBN 7-5012-1605-3/G·541

定 价 / 27.00 元

版权所有 翻印必究

## 新东方丛书策划委员会

主 任 俞敏洪

副主任 王 强 王文成

委 员 (按姓氏笔划为序)

王 强 王文成 包凡一 杜子华

何庆权 胡 敏 俞敏洪 徐小平

## 新东方出国考试丛书编委会

主 编 俞敏洪

副主编 杜子华 包凡一

编 委 王 强 徐小平 王文成 何庆权

钱向阳 张红岩 钱永强 胡 敏

## 前 言

对于中国学生来说，在 GRE 和 GMAT 考试中最有把握拿分的部分就要算数学了，因为数学考查的内容大部分是中国学生在小学和中学就已经学过的，而诸如微积分等高等数学的知识在考试中绝对不会出现。尽管数学是如此简单，但当我们仔细统计时却发现考满分的人并不多。这里面存在三个共同的原因：

- 第一、考试时不可避免地会出现粗心，一是读题的粗心，二是计算的粗心，三是选择答案的粗心。
- 第二、GRE 和 GMAT 数学考试强调的是数学知识在日常生活中的应用，是以英文出题，而我们一些同学由于英文水平较差，有时可能连题目的意思都无法完全理解。
- 第三、一些数学概念的中文表达我们非常熟悉，比如周长，等腰三角形，个位数字等，但是当这些概念用英文来表达时，我们却往往不知所云。

如果克服了上面三方面的原因，数学题还做不好，那么就要提高自己的数学知识了。在我担任 GRE 和 GMAT 教师时，深刻地感受到文科同学的数学基础相对来说比较薄弱，数学对他们来讲有一定困难。这种情况对于 GMAT 学员更为突出，因为：

- 第一、GMAT 的同学大多数都是文科出身。
- 第二、许多同学参加工作多年，已经把原有的数学知识忘得差不多了。
- 第三、尽管 GRE 和 GMAT 考试大纲完全一样，但是 GMAT 数学要比 GRE 数学难。

新东方的老师在课堂上为了要照顾大多数，基本上都是讲解考试中出现的一些难题，根本就没有时间去系统地讲解一些基本知识、列举一些由易到难的题目。市面上也没有一本全面介绍 GRE、GMAT 数学知识的书推荐给考生，曾经有一些同学提出希望我能写一本系统讲述这方面内容的书，但是由于时间原因而迟迟未动笔。

不过由于工作性质所致，我一直都很关注 GRE 和 GMAT 考试最新的发展趋势。不知不觉 GRE 实行机考快两年，GMAT 实行机考已经快三年，关于机考真是众说纷纭，什么题目变难啦，考查范围变广啦等等。作者根据自己的观察以及许多学生问的问题谈两点

体会:

第一点: 题目难度大部分保持不变, 但是有两个方面发生了变化。一. 关于排列、组合、概率、统计、正态分布等方面的知识, 考生需要充电; 二. 题目灵活度在增加, 考生需要了解一些概念的真正含义和如何正确使用。其实这一点非常符合老外的一贯出题原则, 如果去考我们中国人自己出的题目, 往往要记住一大堆公式, 但是老外更讲究的是数学概念在日常生活的灵活应用。就拿正态分布来讲, 光记住概率密度函数的公式而没有真正地消化和理解, 不仅白费力气, 而且也解不出题目; 相反, 如果记住了分布曲线的形状, 理解了公式中一些字母的含义, 那么即使背不出公式, 也能不费吹灰之力地解题。(关于正态分布详见第六章)

第二点: 为什么许多同学感觉题目难度增加了呢? 其实这是由于计算机考试的形式决定的。在笔试中, 考什么题目都已经完全确定, 每个人考的题完全相同。但是在机考中, 尽管机考的评分标准我们无从得知, 但是我们知道在考试中, 数学部分并不是一次性把所有题目全部给出, 考试中心公布的出题方针是: *give you questions that are neither too easy nor too hard for you. When you answer questions correctly, the computer tends to give you harder questions. When you answer incorrectly, it tends to give you easier questions.* 同理, 你的得分也不再是简单的答对一题得多少分, 而是与你所做题目的难易程度密切相关, 你答对的题目越多, 下面的题目也就变得越难, 而你的得分才可能更高。所以归根结底, 计算机考试是考你真正的水平。

作者结合自己多年的教学经验和对机考的深刻认识, 完全参照 GMAT 和 GRE 数学考试大纲编写了本书, 并且对每一个考点的解释都比大纲详细得多, 内容编写基本上是难易结合。本书也是市面上第一本综合阐述 GRE、GMAT 数学知识点的书, 不仅仅适合一般的文科学生备考使用, 理工科学生也能够从中了解到许多知识。书中对于中国考生比较薄弱的章节, 比如排列组合、概率、统计、正态分布、抽屉原理等考点都进行了详尽的叙述。毫不夸张地说, 本书可以在短时间内使考生了解到 GRE、GMAT 数学考试的精髓, 帮助你取得一个满意的分数。

当然由于编写时间较短, 书中一定还存在着不少问题, 欢迎各位读者不吝指正, 来信请发 E-mail 至 [wuqiang@neworiental.org](mailto:wuqiang@neworiental.org)

吴 强

2001 年 7 月 8 日

# 目 录

## PART ONE: GRE & GMAT 数学题型介绍和解题技巧

第一章 GRE 数学题型介绍和解题技巧 .....	3
第一节 比较大小 .....	5
第二章 GMAT 数学题型介绍和解题技巧 .....	12
第一节 Problem Solving .....	12
第二节 Data Sufficiency .....	13

## PART TWO: GRE & GMAT 数学综合知识

第一章 数论 .....	21
第一节 数的概念 .....	21
第二节 整数的正负性、奇偶性和质合性 .....	28
第三节 因子和质因子 .....	32
第四节 连续数及其性质 .....	37
第五节 数的开方和乘方 .....	39
第六节 数的除法和整除问题 .....	43
第七节 最大公约数和最小公倍数 .....	50
第八节 同余 .....	51
第二章 比率和百分比 .....	54
第三章 集合 .....	60
第四章 排列组合和概率 .....	68
第一节 计数 .....	68
第二节 加法原理和乘法原理 .....	70
第三节 排列 .....	74
第四节 组合 .....	76
第五节 概率 .....	81
第五章 描述统计 .....	92
第六章 正态分布 .....	100
第七章 抽屉原理 .....	104
第八章 代数 .....	107
第一节 表达式和方程 .....	107
第二节 一元二次方程 .....	111

第三节 二元一次方程组 .....	113
第四节 不等式 .....	114
第五节 函数和运算自定义 .....	117
<b>第九章 数列</b> .....	119
第一节 等差数列 .....	119
第二节 等比数列 .....	122
第三节 一般数列 .....	124
<b>第十章 几何</b> .....	127
第一节 平面几何 .....	127
第二节 立体几何 .....	137
第三节 平面直角坐标系 .....	141
<b>第十一章 文字应用题</b> .....	147
第一节 行程问题 .....	147
第二节 工程问题 .....	148
第三节 混合问题 .....	150
第四节 利息问题 .....	151
第五节 利润和折扣 .....	152
第六节 文字几何题 .....	153
第七节 一般常识 .....	154
<b>第十二章 最大值最小值问题</b> .....	156

### PART THREE: GRE & GMAT 数学模拟练习

Problem Solving Test One .....	163
Problem Solving Test One—Answer .....	168
Problem Solving Test Two .....	172
Problem Solving Test Two—Answer .....	178
Problem Solving Test Three .....	183
Problem Solving Test Three—Answer .....	189
Quantitative Comparison Exercise .....	193
Data Sufficiency Exercise .....	203
Data Sufficiency Exercise—Answer .....	207

<b>附 录: GRE &amp; GMAT 数学分类术语表</b> .....	212
数论部分 .....	212
代数部分 (algebra) .....	214
几何部分 (geometry) .....	217
单位表达 .....	220
文字应用 .....	221



# **PART ONE**

## **GRE & GMAT 数学题型介绍**

### **和解题技巧**



## 第一章

# GRE 数学题型介绍和解题技巧

GRE 计算机考试共有三个部分：

- 一、Verbal 部分，共 30 分钟，30 道题；
- 二、数学部分，共 45 分钟，28 道题；
- 三、逻辑分析部分，共 60 分钟，35 道题；

另外还会出现一个部分的加试题，可能是 Verbal、Quantitative 或 Analytical 中的任一种，但是你无法分辨哪一个是加试题。也有可能还会出现一个 research section，也就是明确告诉你不算分的 section。如果那样的话，你就可以随便选择一些答案，没有必要在这个 section 浪费时间。

GRE General Test 数学部分考查四方面的内容：

- ◆ 算术 (*arithmetic*)
- ◆ 基本的几何 (*basic geometry*)
- ◆ 基本的代数 (*elementary algebra*)
- ◆ 数据分析 (*Data Analysis*)

GRE 数学测试学生以下几个方面能力：

- ◆ 掌握基本的算术技巧 (*basic mathematical skill*)
- ◆ 理解基本的数学概念 (*understanding of elementary math concept*)
- ◆ 熟悉数量推理 (*ability to reason quantitatively*)
- ◆ 数学背景下解决问题的能力 (*solve problems in quantitative setting*)

GRE 数学考试中关于数字和图形的一些基本信息我们需要有所了解：

**Numbers:** All numbers used are real numbers; no imaginary numbers are used or implied.

(考试中出现的数都是实数，绝对不会有虚数出现)

**Figures:** 1. Angle measures can be assumed to be positive.

(角度测量被假设为正角)

2. Figures can be assumed to lie in a plane unless otherwise indicated.

(除非专门指出，否则图形被假设为在一个平面内。)

3. Figures that accompany questions are intended to provide information useful

in answering the questions. However, unless a note states that a figure is drawn to scale, you should solve these problems not by estimating sizes by sight or by measurement, but by using your knowledge of mathematics.

(伴随问题的图形是为解题提供有用信息。但除非图形被指出“drawn to scale”，即按比例画出，否则不能通过目测或者估计图形中的尺寸，而是应该根据相关的数学知识来答题。)

对于上面第三点的正确理解在考试中非常重要。我们通过几个例子来说明：



图 (1)

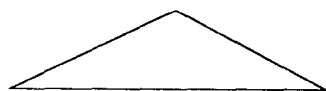


图 (2)

图 (1) 中是一个三角形。但是你绝对不能说它一定就是直角三角形。尽管其中有一个角看起来像直角，但是由于图中没有标明，我们不能根据目测认为它是直角。

**对于 GRE 中的图形来说，图中画的是什么就是什么**(比如图中画的是三角形，就绝对不能认为它是四边形)；**但是我们不能够根据自己的主观意愿去估计图形中的尺寸、角度等数量的大小，除非图中已经明确标明“Drawn to Scale”。**

例如图 (2) 中的三角形由于未给出判断信息，我们不能盲目地说它是钝角三角形，锐角、直角和钝角三角形三种情况都有可能。但是如果图 (2) 中明确标明“Drawn to Scale”，那么这个三角形一定是钝角三角形。

再例如下图 (3) 的平面直角坐标系中：

我们从图中读出点 A 落在第一象限内，那么点 A 就绝对不可能在 x 轴上或在 y 轴上，更不可能到其他象限中去。至于点 A 的横坐标和纵坐标我们无法知道其具体值。我们也无法判断点 A 的横坐标和纵坐标谁大谁小。

对于角度  $x$ ，我们能够得到其范围  $0 < x < 90$ ，但是具体值是多少我们无法度量。

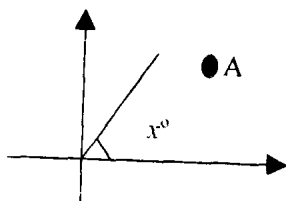


图 (3)

GRE 数学考试包括三类题型：

- ◆ 问题求解 (*Problem Solving*)
- ◆ 比较大小 (*Quantitative Comparison*)
- ◆ 图表问题

这三类题型所考查的知识点我们将会在第二部分详细阐述。比较大小题由于其考试形式的特殊性，我们将在下面一节专门介绍。

## 第一节 比较大小

A quantitative comparison question is a special type of math question in which you are asked to compare the relative values of two quantities. 我们首先来看一下比较大小题的形式：

---

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
	$m, n, p$ are positive integers and $2mn = p$	
例 1.	$m$	$p$

考试中的 Directions 把这类题目描述的非常清楚：

**Directions:** Each of the following questions consists of two quantities, one in Column A and one in Column B. You are to compare the two quantities and decide whether:

- the quantity in Column A is greater.
- the quantity in Column B is greater.
- the two quantities are equal.
- the relationship cannot be determined from the information given.

**Common Information:** In a question, information concerning one or both of the quantities to be compared is centered above the two columns. A symbol that appears in both columns represents the same thing in Column A as it does in Column B.

例如例 1 中的 *common information* 指的就是 ( $m, n, p$  are positive integers and  $2mn = p$ )，那么 Column A 中的  $m$  和 Column B 中的  $p$  都满足上面的 *common information*。

在笔试中四个选项分别用 A, B, C, D 来表示，我们在讲解的时候使用这四个字母来表示答案。

*Quantitative Comparison Answers*

Answer A (Column A 大于 Column B)

Answer B (Column B 大于 Column A)

Answer C (Column A 等于 Column B)

Answer D (Column A、Column B 两者无法比较)

比如例 1 中, 由于  $2mn = p$ , 并且  $m, n, p$  都是正整数, 那么  $p > mn$ ,  $p$  也一定大于  $m$ , 即 Column B 大于 Column A, 选择 (B)

Quantitative Comparison 题目往往测试考生两方面的能力:

1. reason quickly and accurately about the relative sizes of two quantities

(快速而又准确地推理两个数大小的能力)

2. perceive that not enough information is provided to make such a decision

(感知有没有足够信息判断两个数大小的能力)

在做 Quantitative Comparison 题目的时候, 除了需要具有必备的数学知识外, 还需要了解一些解题技巧和注意事项, 这些在考试中会非常有用, 下面列出了五点:

**第一点:** 考生不要陷于冗长的演算, 应尽量使用简洁的方法, 强调速度和捷径。

因为仅仅是比较大小, 能够分辨出谁大谁小就行, 最终目的不是求出精确的数值。因此考生不要在计算两个数上浪费时间; 许多题目在做进一步计算前, 尽量看一下是否能够进行估算或者使用其他简洁的方法, 使两个数能够比较。

避免冗长计算的方法之一是遇到一个题目, 不要急于下笔计算, 要先把两边的 Column 都认真看一下, 观察两边的数是否会有一定的关系, 从而简化运算。许多同学有这样的坏习惯, 看完左边的 Column, 如果是数字, 就开始拼命计算; 然后再去计算右边的 Column, 从来不考虑两边数的联系。

Column AColumn B

例 2.

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \frac{1}{97} + \frac{1}{96}$$

$$\frac{1}{20}$$

解: 把 Column A 各项进行通分是比较笨的做法。察看两边的数, 发现  $\frac{1}{20} = 5 \times \frac{1}{100}$ , 也就是可以认为  $\frac{1}{20}$  是 5 个  $\frac{1}{100}$  相加, 这样和 Column A 中的各项一一比较。因为  $\frac{1}{99}$ ,  $\frac{1}{98}$ ,  $\frac{1}{97}$ ,  $\frac{1}{96}$  每一项都大于  $\frac{1}{100}$ , 所以 Column A 大于 Column B, (A) is correct.

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
例 3.	$\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}$

解：Column A 是 Column B 的倒数。对于倒数来讲有这么一条原理：

当数  $x > 1$ ,  $x > \frac{1}{x}$ , 比如  $20 > \frac{1}{20}$ ; 当  $0 < x < 1$ , 那么  $x < \frac{1}{x}$ , 比如  $\frac{1}{10} < 10$ ;

如果  $x$  是负数的话则刚好相反,

当  $-1 < x < 0$ , 那么  $x > \frac{1}{x}$ , 比如  $-\frac{1}{10} > -10$ ; 当  $x < -1$ , 那么  $x < \frac{1}{x}$ ,

比如  $-2 < -\frac{1}{2}$ ;

现在 Column A 和 Column B 都是正数, 根据上面的原理, 只要看 Column B 和 1 的比较, 如果 Column B 大于 1, 那么就选择 (B), 否则选择 (A)。

如果把 Column B 中的各项通分, 最后当然能够求出具体的值。但从例 2 中我们知道没必要这么做。因为  $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}) < (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})$ , 也就是说  $0 < (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}) < 1$ , 所以 Column A 要大于 Column B, (A) is correct。

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
例 4.	$\frac{335}{999}$	$\frac{110}{333}$

解：根据估算,  $\frac{335}{999}$  要稍微大于  $\frac{1}{3}$ , 而  $\frac{110}{333}$  要稍微小于  $\frac{1}{3}$ , 所以 (A) is correct。

第二点：某些时候比较大小题可以作为代数不等式来对待

如果有必要, 计算时两边可以同时加减一个数、乘一个正数、对正数进行乘方、开方等运算, 这样做并不影响最后的结果。

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
例 5.	$\frac{4}{5} - \frac{4}{7}$	$\frac{4}{7} - \frac{2}{5}$

解：两个数都加上  $(\frac{2}{5} + \frac{4}{7})$ , Column A 变为  $\frac{6}{5}$ , Column B 变为  $\frac{8}{7}$ , 两者继续都减 1, Column A 变为  $\frac{1}{5}$ , Column B 变为  $\frac{1}{7}$ , 当然选择 (A)。

第三点：在做决定前要考虑所有可能的数字，包括正数、负数和零。

负数的乘法和乘方；0到1的数和大于1的数的乘方、开方以及除法之间的区别是考试中常设的陷阱。

比较大小题中经常出现一些变量，有时可以用0, 1或-1等一些简单的数值来代入进行简单计算；当代入不同的数值，得到不同的结果，比如有些情况下是 Column A 大于 Column B，有些情况下 Column B 大于 Column A，有些情况下两者相等，那么答案就必须选择 (D)。

Column AColumn B $n$  is a positive integer

例 6.  $(-1)^{n-1}$  0

解：  $n$  如果为 1，那么 Column A 为零，等于 Column B

$n$  如果为大于 1 的奇数，那么 Column A 为 1，大于 Column B

$n$  如果为大于 1 的偶数，那么 Column A 为 -1，小于 Column B

所以选择 (D) 无法比较。

Column AColumn B $x^2 = 81$ 

例 7.  $x$  8

解：对于这道题目，许多同学想也没想就选择了 (A)，因为  $9 > 8$ ，按下 confirm 后可能才懊悔莫及。所以在做决定前一定要考虑所有的情况。 $x^2 = 81$ ，那么  $x = \pm 9$ ，一个大于 8，一个小于 8，所以无法与 8 比较大小，选择 (D)。

Column AColumn B $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ 

例 8.  $x$   $y$

解：这道题目也有许多同学上当，既然  $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ ，那么  $x = 3$ ， $y = 5$ ，所以选择 (B)，但是这样做显然忘记了  $x, y$  可以为负数，当  $x = -3$ ， $y = -5$  时，结果为 Column A 大于 Column B；所以两者结合起来考虑，得到结果是 (D)。



	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
例 9.	$(-6)^{36}$	$(-6)^{37}$

解：负数的偶数次方是正数，奇数次方是负数，所以 (A) is correct。

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
	$xy < 0, yz < 0$	
例 10.	$xz$	0

解：题目中问的是  $xz$  的乘积和 0 的比较，但是已知是  $xy < 0, yz < 0$ ；如何得到  $xz$  呢？可以通过把两个不等式相乘得到  $xy^2z > 0$ ，由于  $y^2 > 0$ ，所以  $xz > 0$ ，(A) is correct。

有些读者可能会说，我一下子想不起来这么做，我的做法是：从  $xy < 0$  中，只能得到两种情况  $x > 0$  and  $y < 0$  或者  $x < 0$  and  $y > 0$ ；同样道理从  $yz < 0$  也得到两种情况，然后结合起来考虑  $xz$  的情况，这样做远比上面的方法繁琐，该怎么办呢。

我想在这里告诉大家，本书除了阐述一些必考的知识点外，还将就某一知识点的题目或者综合几个知识点的题目进行仔细讲解，读完本书，你就会培养出简便答题的意识。

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
	$\frac{x}{x-1} < 0$	
例 11.	$x$	0

解：原不等式可以简化为两种情况：

1、 $x > 0$  and  $x - 1 < 0$ ，得到  $0 < x < 1$

2、 $x < 0$  and  $x - 1 > 0$ ，得到  $x < 0$  并且  $x > 1$ ，无解

综合 1 和 2 得到  $0 < x < 1$ ，所以 (A) is correct。

	<u>Column A</u>	<u>Column B</u>
	$n > 0$	
例 12.	$\frac{n^3 + 1}{n^2}$	$n + \frac{1}{n}$

解：Column A 可以简化为  $n + \frac{1}{n^2}$ ，两者都减去  $n$  得到  $\frac{1}{n^2}$  和  $\frac{1}{n}$ ，因此只要比较它们的大小

当  $n > 1$ ，显然  $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}$