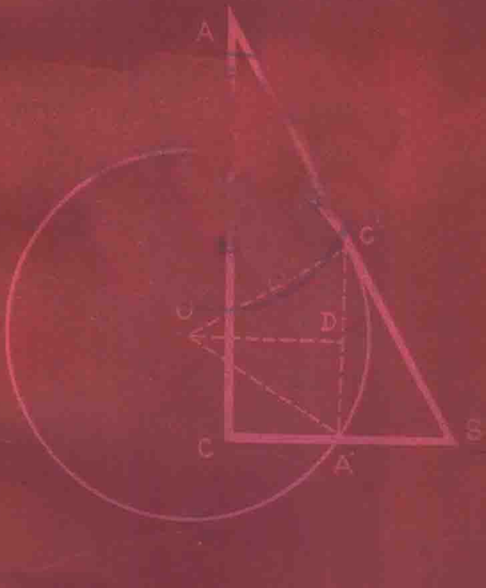
QUANGUOLIJIEGAOKAOSHITIJIJIEDA

1949—1979

全国历届高考试题及解答

（数学）



新 蕾 出 版 社

1949——1979

全国历届高考试题及解答

（数　　学）

新蕾出版社

1949——1979
全国历届高考试题及解答
（数　学）

＊

新蕾出版社编辑、出版
天津新华印刷二厂印刷
天 津 市 新 华 书店发行
开本787×1092毫米　1/32　印张 6.875
1980年1月第1版　　　　1980年1月第1次印刷
统一书号：13213·1　　　定价：0.57元

说　　明

为了满足广大中学生的需要，我社编辑出版建国三十年来历届高考数学、物理、化学三科的试题及解答，以供广大考生及一般中学生自学、参考之用。

《数学》一册，汇集了1949～1979年各届高考的统一试题，及部分地区、部分院校的试题。书中对这些试题都一一作了详尽的解答。

本书承天津一中张士瑛老师作了详细的审核校订，在此表示谢意。

虽经反复加工整理，错漏之处仍然难免，请读者指正。

目　录

一九四九年（清华大学）

一、证明若$(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$为含x的整平方式，则$9p^2-14pq+9q^2=0$.并证若$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$为含$x$的整平方式，则$a=b=c$.

证明 ① $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$

$=2x^2+3(p+q)x+4pq$

二次三项式ax^2+bx+c为完全平方式的充要条件是

$\triangle=b^2-4ac=0$

∴ 由$9(p+q)^2-32pq=0$得$9p^2-14pq+9q^2=0$

② $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=3x^2+2(a+b+c)x+ab+ac+bc$

由 $4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)=0$得$4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc=0$

∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$

∴ $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$

∴ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$，∵$a,b,c$均为实数.

∴ $a-b=0$，$a-c=0$，$b-c=0$

故 $a=b=c$.

注：原题应说明a,b,c均为实数这一点.

二、求1的三次根（实根及虚根）并证明任一虚根的平

方等于另一虚根且：

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1$$（式中 n 可为任意整数，但不是 3 的倍数）

解 令 $x^3=1$

$$\therefore \quad x=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{cos0+isin0}=cos\frac{2k\pi}{3}+isin\frac{2k\pi}{3}$$

$(k=0，1，2)$。

故 1 的三次根为：1，

$$cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},$$

$$cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

由 $De'Movre$ 定理，

$$\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right)^2=cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)^2=cos\frac{8\pi}{3}+isin\frac{8\pi}{3}$$

$$=cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}.$$

故任一虚根等于另一虚根，

因而 1 的三次根可写为 $1,\omega,\omega^2$，其中 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

因 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+1}$

$=\omega^{3k+1}+(\omega^2)^{3k+1}=\omega+\omega^2$

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{3k+2}$

$=\omega^{3k+2}+(\omega^2)^{3k+2}=\omega^2+\omega$

但显然，$\omega+\omega^2=1$.

故当 n 为不是 3 的倍数的整数时，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1.$$

三、1．求适合下列方程的比例值：

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \end{cases}$$

解 是齐次方程组，故可消去一元而立即得其它二元之比．例如，消去 x，立即得到

$y-2z=0$ 即 $y:z=2:1$；消去 y 立即得 $x-z=0$.

即 $x:z=1:1$，由此，$x:y:z=1:2:1$.

2．求下列方程组的解

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \\ 4x^3+3y^3+z^3-xyz=216 & ③ \end{cases}$$

解 由①②，$x=z$，$y=2z$， ④

④代入③得 $27z^3=216$.

即 $z^3=8$； $z^3-8=0$.

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0.$$

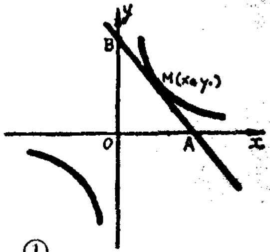
$\therefore\quad z_1=2,\qquad z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}\,i.\qquad$ 代入④.

得原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=4\\z_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1+\sqrt{3}\,i\\y_2=-2+2\sqrt{3}\,i\\z_2=-1+\sqrt{3}\,i\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-1-\sqrt{3}\,i\\y_3=-2-2\sqrt{3}\,i\\z_3=-1-\sqrt{3}\,i\end{cases}$$

四、曲线$xy=a^2$上一切线与坐标轴成一个三角形，求此三角形的面积.

解 令$M\left(x_0,\dfrac{a^2}{x_0}\right)$为$xy=a^2$上的任意一点，则过此点的切线的斜率为



$$k=y'\Big|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^{\,2}}$$

$\therefore$ 过M点的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^{\,2}}(x-x_0)$$

可化简为 $\quad y=-\dfrac{a^2}{x_0^{\,2}}x+\dfrac{2a^2}{x_0}\quad$ ①

在①中 令$y=0$，得切线和x轴交点A的坐标为$(2x_0,0)$

在①中 令$x=0$，得切线和y轴交点B的坐标为$\left(0,\dfrac{2a^2}{x_0}\right)$

$$\therefore\quad S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|OA|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2a^2$$

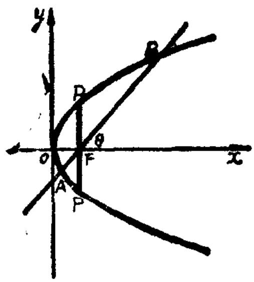
五、经过抛物线焦点的弦与抛物线的轴成θ角.证此弦在抛物线内的截线等于$L/\sin^2\theta$. 其中 L 为正焦弦的长.（经过焦点而又垂直于轴的弦称为正焦弦）

证　如图选取坐标系

如θ为直角，则此弦即为正焦弦.显然，结论是对的，故以下计算可设θ为锐角或钝角.

设抛物线方程为$y^2=2px$.

则焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，正焦弦方程为 $x=\frac{p}{2}$.



解联立方程 $\begin{cases} x=\frac{p}{2} \\ y^2=2px \end{cases}$

得正焦弦与抛物线的交点为

$P\left(\frac{p}{2},\ p\right)$，$P'\left(\frac{p}{2},-p\right)$

故$L=|PP'|=2p$

设直线 AB 的方程为

$y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)$

它与抛物线的交点A、B的坐标为

$$\begin{cases} y^2=2px & ① \\ y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right) & ② \end{cases}$$ 的公共解.

以下为其解法：

将②代入①，得$(tg^2\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$

$$x^2(tg^2\theta)-xp(tg^2\theta+2)+\frac{p^2tg^2\theta}{4}=0$$

$$\therefore\quad x_{1,2}=\frac{p(2+tg^2\theta)\pm\sqrt{p^2(tg^2\theta+2)^2-p^2tg^4\theta}}{2tg^2\theta}$$

$$=\frac{2+tg^2\theta\pm 2sec\theta}{2tg^2\theta}p$$

即 $y_1=(tg\theta)\left(x_1-\frac{p}{2}\right)=\frac{1+sec\theta}{tg\theta}p$

$$y_2=tg\theta\left(x_2-\frac{p}{2}\right)=\frac{1-sec\theta}{tg\theta}p$$

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{2sec\theta}{tg^2\theta}p\right)^2+\left(\frac{2sec\theta}{tg\theta}p\right)^2}$$

$$=2p\cdot\frac{sec^2\theta}{tg^2\theta}=\frac{2p}{sin^2\theta}=\frac{L}{sin^2\theta}$$

θ为钝角时计算上与锐角时完全一样．

（因此时同样有$sec\theta>0$）．

六、求证1． $3+4cos\theta+cos2\theta\geqslant 0$

证明 $3+4cos\theta+cos2\theta$

$$=3+4cos\theta+2cos^2\theta-1$$

$$=2(cos\theta+1)^2\geqslant 0$$

求证2． $\frac{sin(2^Nx)}{2^Nsinx}=cosx\cdot cos2x\cdots cos(2^{N-1}x)$．

证 方法一 右端$=\frac{2^Nsinxcosxcos2x\cdots cos(2^{N-1}x)}{2^Nsinx}$

$$=\frac{2^{N-1}sin2xcos2xcos2x\cdots cos(2^{N-1}x)}{2^N sinx}$$

$$=\cdots\cdots。$$

$$=\frac{sin(2^N x)}{2^N sinx}$$

$$=左端$$

方法二 由倍角公式，得

$$sin2x=2sinx\cdot cosx,$$

$$sin2^2x=2sin2x\cdot cos2x,$$

$$sin2^3x=2sin2^2x\cdot cos2^2x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$sin(2^{N-1}x)=2sin(2^{N-2}x)\cdot cos(2^{N-2}x),$$

$$sin(2^N x)=2sin(2^{N-1}x)\cdot cos(2^{N-1}x),$$

这 n 个等式两边相乘并约去共同因式，得

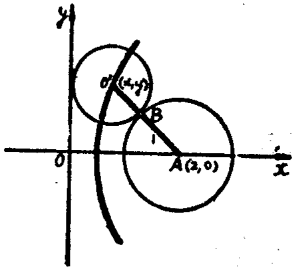
$$sin(2^N x)=2^N sinx\cdot cosx\cdot cos2x\cdots cos(2^{N-1}x)$$

故 $$\frac{sin(2^N x)}{2^N sinx}=cosx\cdot cos2x\cdots cos(2^{N-1}x).$$

一九四九年（北京大学）

一、一动圆与$(x-2)^2+y^2=1$及y轴皆相切．求动圆的圆心的轨迹方程．

解 定圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心为$A(2,0)$，半径为$r=1$．



设动圆圆心为$O'(x,y)$，

$|O'A|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

而 $\odot O'$与y轴相切于C．

设 $\odot O'$的半径为r'，则

$r'=CO'=x$，

$|O'A|=r'+r=x+1$．

故 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+1$

化简得$y^2-6x+3=0$，即为一抛物线

二、若$kxy-8x+9y-12=0$表示两条直线，求k之值及两直线的夹角．

解 二次曲线$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

当 $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$时表示的是退化曲线．

$$\therefore \text{由} \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{2} & -4 \\ \frac{k}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ -4 & \frac{9}{2} & -12 \end{vmatrix} = 0$$

展开后，得$k^2-6k=0$.

$k(k-6)=0$.

$\therefore\quad k_1=0,\qquad k_2=6$.

k不能为0，否则，原方程将成为二元一次方程，它只表示一条直线，而不表示两条直线了，故舍去.

当 $k=6$时，

由 $6xy-8x+9y-12=0$.

$(2x+3)(3y-4)=0$.

$\therefore\quad 2x+3=0,\quad 3y-4=0$.

这是两条分别与y轴，x轴平行的直线. 故两条直线互相垂直，夹角为90°.

三、若$A+B+C=n\pi$（n为整数）. 证明$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=(-1)^{n-1}4\sin A\sin B\sin C$.

证 $\because\quad A+B+C=n\pi$.（n为整数）.

$\therefore\quad A+B=n\pi-C$.

今先证 $\sin(n\pi-C)=(-1)^{n-1}\sin C$.

事实上

若n为奇数，即$n=2k+1$，

则 $\sin(n\pi-C)=\sin(2k\pi+\pi-C)=\sin C$

$= (-1)^{n-1}\sin C.$

若n为偶数，即$n=2k$.

则　$\sin(n\pi - C) = \sin(2k\pi - C) = -\sin C$

$= (-1)^{n-1}\sin C.$

故　$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B)$

$+ \sin[2n\pi - 2(A+B)]$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - \sin 2(A+B)$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - 2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$= 2\sin(A+B)[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$= 2\sin(A+B)[-2\sin A\sin(-B)]$

$= 4\sin(A+B)\sin A\sin B$

$= 4\sin(n\pi - C)\sin A\sin B$

$= (-1)^{n-1}4\sin A\sin B\sin C.$

四、在1、2、3、4、……99、100 这一百个数中，任选51个．证明在此51个数内恒可找到两数，其中一个为另一个的倍数．

证　设选出的51个数为a_1、a_2、a_3、……a_{51} 每一个数a_i都可以写成$a_i = 2^{zi}t_i$（zi是0或自然数）其中 t_i 是奇数

∵　在100内具有50个奇数，因而t_i之中必有重复的，设$t_i = t_j = t\ (i \neq j)$

∴　$a_i = 2^{zi}t$　　$a_j = 2^{zj}t$.

又∵　$a_i \neq a_j$　∴$zi \neq zj$

不妨令　$zi > zj$

则　$a_i = 2^{zi}t$　必是$a_j = 2^{zj}t$的倍数.

五、证明$(x^{2^0}+1)(x^{2^1}+1)(x^{2^2}+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$

$$=\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$$

证　左端乘以$(x-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$

$$=(x^2-1)(x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=(x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1)$$

$$=x^{2^{n+1}}-1$$

命题得证.

六、在$\triangle ABC$的边AB、AC上各取一点D、E，且$AD=\frac{1}{3}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$，连接BE、CD相交于F，试证$\triangle FCB$的面积为$\triangle ABC$面积的一半.

证明　方法一：连接DE，并过F作$MP\parallel CB$

$\because\quad AD=\frac{1}{3}AB\quad AE=\frac{1}{3}AC$

$\therefore\quad DE\parallel CB$（截三角形两边成比例的直线平行于三角形的第三边）

$DE=\frac{1}{3}BC\qquad \therefore EF=\frac{1}{3}BF=\frac{1}{4}BE$

又$\because\quad MP\parallel BC\quad \therefore EM=\frac{1}{4}CE=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}AC=\frac{1}{6}AC$