高师函授教材

高等代数

GAODENGDAISHUGAODENGDAISHU

刘清祥
贺昌亭

（上）

吉林教育出版社

高师函授教材

高等代数

（第二版）

（上 册）

刘清祥 贺昌亭

吉林教育出版社

高师函授教材　高等代数　上册　　　刘清祥　贺昌亭　编

责任编辑　王铁义　　　　封面设计　郭春芳

出版：吉林教育出版社　787×1092毫米32开本 12.5印张 2插页 273,000字
发行：吉林省新华书店　1987年9月第1版　　1987年9月第1次印刷
印数：1—1,379册
印刷：长春科技印刷厂　统一书号：7375·572　　定价：2.20元

说　明

本书第一版是作为东北三省高师函授教材于1981年由吉林人民出版社出版。现在这第二版是在第一版的基础上，以国家教委颁发的中学教师进修高等师范数学专业《高等代数》教学大纲为依据，参考兄弟院校使用的意见并结合我们几年来的实践修改而成的。

这次修改变动较大，改写了上册，重写了下册。在写法上充分注意了函授特点，我们做了以下几点尝试：

1．每章开头明确写明本章要讨论的几个问题，使读者心中有数；每节的内容明确分段并冠以标题，使读者阅读时条理清楚，易于掌握；章后有小结，归纳知识的内在联系，总结主要概念，基本结果和重要思想方法。

2．考虑到函授学员主要靠自学，对内容理解的深度会受到一定的局限性，我们把教师讲课时的体会写进了教材的相应部分，以使学员加深对教材内容的理解。

3．考虑到函授学员不能象日校学生在教师示范例题和指导下作习题的实际情况，我们在每节末尾一般都写上了几个例题，一方面示范一下如何综合应用本节的知识解题；另一方面，为学员作节后的练习奠定了基础。在章后写了习题选解。一方面，示范一下如何综合应用本章的知识解题；另一方面，为学员作章后习题奠定基础。这些题的大多数在证明之前都做了解题分析，以培养学员的解题能力。

4．学习高等代数日校学生感到抽象难学，函授学员更

感到抽象难学。为此，在本书中写了足够的实例作为背景。比如，对难懂的概念，一般都是先举几个例子，分析它们的个性，找出它们的共性，进而来给出定义。在充分注意科学性和严密性的前提下，力求做到由浅入深，通俗易懂，详尽透彻。在知识的阐述上，我们也特别注意了揭示规律，总结规律，交待要领。

5. 每节后配的练习题、章后配的习题既注意了数量适当，也注意了难易程度适宜。

本书是高师函授教材。可作为教育学院、教师进修学院、师资合格培训、高师院校的教材或参考书，也可作为电视大学、职工大学相应专业的参考书及自学用书。

本书是在集体讨论的基础上分工编写的，上册是刘清祥同志负责修改的，下册是迟志敏同志负责修改的，最后由迟志敏同志统一全书。限于编者水平，这第二版不当之处在所难免，衷心希望批评指正。

编　者

1986年12月

目　　录

第一章　数的基础知识

在本章里我们把过去学过的集合、数的知识进行归纳整理，着重介绍一些最基本的概念、基本的方法以及一些基本性质。这些概念、方法和性质都为以后的学习做了必要的准备，故也可以说本章是预备知识。具体讲以下四个问题：

1　集合；

2　自然数与数学归纳法；

3　整数的整除性与因数分解；

4　数域，复数的比较大小问题。

§1　集　　合

本节先从集合的概念谈起，然后介绍集合的运算。

一　集合的概念

1　集合与元素

集合是数学里最基本、最原始的概念。所谓集合就是指表示一定事物的集体，例如一个班的全体同学就组成一个集合；一个教室里的全部桌椅也组成一个集合；一些自然数如$\{1, 2, 3, 4\}$也组成一个集合；一个固定线段上的所有点也组成一个集合。组成集合的每一个事物都叫做这个集合的元素．

我们经常用大写拉丁字母 A，B，C，… 表示集合，用

小写拉丁字母a，b，c，…表示集合中的元素。

如果 a 是集合A中的元素时，就说a属于A或者说A包含a，用符号$a\in A$或$A\ni a$ 表示。

如果a不是集合A中的元素， 就说a不属于A或者说A不包含a，用符号$a\overline{\in} A$或$A\overline{\ni} a$表示。

一个集合只含有有限多个元素时， 称这个集合为**有限集**。例如由自然数1，2组成的集合就是一个有限集。如果一个集合含有无限多个元素时，称这个集合为**无限集**。例如全体自然数组成的集合就是一个无限集。

2　集合的表述方法

常用的集合表述法有以下三种：

1）用语言说出集合A是由哪些元素组成的。例如集合A是由小于 5 的自然数组成的。

2）把集合的元素一一列举出来写在大括号内，这种表述集合的方法叫列举法。例如$A=\{1,2,3,4\}$。

3）把集合中元素的共同属性或满足的条件写在大括号内，这种表述集合的方法叫描述法。例如全体偶数组成的集合可以表示为$\{x|\ x=2n$；n为任意整数$\}$。

描述法的一般形式为

$$\{x\ |T(x)\}$$

其中x表示集合的元素，$T(x)$表示集合中元素的共同属性。

3　集合的包含与相等

设 A，B 是两个集合， 如果A中的每一个元素都是B中的元素，则称A含于B中或B包含 A，记 作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$。这时称A是B的**子集**，B 是A的**扩集**。根据这个定义，若A是B的子集必要而且只要对于每一个元素x， 如果 $x\in A$， 则 有$x\in B$。

例如自然数集是整数集的子集，整数集又是有理数集的子集。

为了简捷清晰地表示数学中的结果以及集合间的包含关系，我们引用如下符号。

用“$A\Rightarrow B$”表示“若A则B”

用“$A\Longleftrightarrow B$”表示“A成立的充分必要条件是B成立”。

还引用符号“$\forall$”表示“对于任意的”或对于每一个”。例如“对于每一个x”可记作“$\forall x$”；用符号“$\exists$”表示“至少存在一个”。例如“至少存在一个x”记作“$\exists x$”。

这样“A是B的子集”可表示为

$A\subseteq B\Longleftrightarrow\forall x$、$x\in A\Rightarrow x\in B$

如果$A\subseteq B$，并且B中至少存在一个元素不属于A，则称A是B的**真子集**。记作$A\subset B$。于是有

$A\subset B\Longleftrightarrow A\subseteq B$且$\exists x\in B$ 但$x\notin A$

如果集合A与B是由完全相同的元素组成的，即凡属于A的元素都属于B，同时凡属于B的元素也都属于A，则称A与B**相等**，记作$A=B$，我们有

$A=B\Longleftrightarrow\forall x, x\in A\Longleftrightarrow x\in B$

也容易看出

$A=B\Longleftrightarrow A\subseteq B$且$B\subseteq A$

4　空集

不含任何元素的集合叫做**空集**，记作ϕ，例如$\phi=\{k|k$为$x^2+1=0$的实根$\}$。因为一元二次方程$x^2+1=0$没有实根，所以集合中不含有任何元素，故为空集ϕ。

我们规定空集是任一集合的子集。对于这一规定可理解为：$A\subseteq B$表示集合A的元素都是集合B的元素，换句话说$A\subseteq B$表示不属于集合B的元素都不属于A，进而对于任何

集合X而言，显然不属于X的元素都不属于ϕ。因此，对于任何集合X，恒有

$$\phi \subseteq X$$

二　集合的运算

1　集合的并和交

设A，B是两个集合，由A的一切元素和B的一切元素所组成的集合，叫做A与B的并集，记作$A \cup B$，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

求并集的法则称为并运算。

例如，$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{3, 4, 5\}$，求A与B的并集。由定义，有$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$。又如$A$是一切有理数集合，$B$是一切无理数集合，则$A \cup B$是一切实数集合。

根据并集定义，有

$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A 或 x \in B$

$x \overline{\in} A \cup B \Longleftrightarrow x \overline{\in} A 且 x \overline{\in} B$

A与B的并集可用图1·1表示，阴影部分为$A \cup B$。

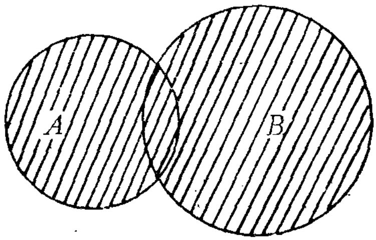

图　1·1

由一切既属于集合A又属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的交集，记作$A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

求交集的法则叫做交运算。

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{c, d, f\}$，显然$A \cap B = \{c, d\}$。

根据交集的定义，有

$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$且$x \in B$

$x \overline{\in} A \cap B \Longleftrightarrow x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$

A与B的交集可用图1·2表示，阴影部分为$A \cap B$。

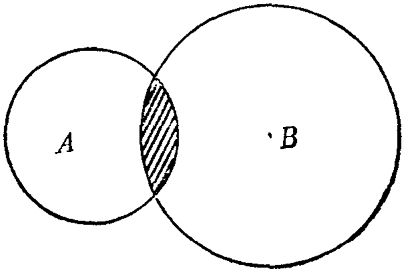

图 1·2

两个集合的并集与交集的概念可以推广到任意n个集合上去。设A_1，A_2，…，A_n是任意给定的n个集合，由A_1，A_2，…，A_n的一切元素组成的集合叫做A_1，A_2，…，A_n的并集，记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$。即

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x$ 属于某个 $A_i\}$。由A_1，A_2，…，A_n的一切公共元素组成的集合叫做A_1，A_2，…，A_n的交集，记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$。即

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x$ 属于每个$A_i\}$。

2　补集

在解决实际问题时，我们往往是在一个“大”的固定的集合中进行研究，即所有研究的集合都是这个集合的一些子集合，为了方便我们称这个“大”的固定的集合为全集。

设集合A是全集E的子集，由E中一切不属于A的元素组成的集合，叫做A在E上的补集，记作$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x|x\in E但x\overline{\in} A\}$$

求补集的法则叫做补运算。

A对E的补集可用图1·3中阴影部分表示。

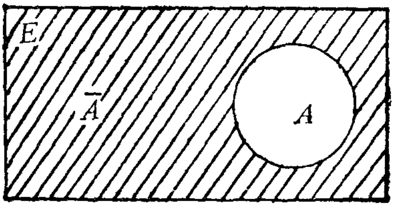

图 1·3

例如，若E为实数集，A为有理数集，则$\overline{A}$为无理数集。

3 差集

设A，B是两个集合，由一切属于集合A而又不属于集合B的元素组成的集合，叫做A与B的差集，记作$A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A 且 x\overline{\in} B\}$$

求差的法则称为差运算。图1·4的阴影部分表示$A-B$。

例如，整数集与奇数集的差集是偶数集。

4　笛卡尔积集

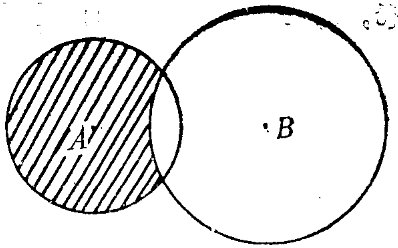

图　1·4

设A，B是两个集合，由A中的任一元素a与B中任一元素b作成的有序元素对(a,b)的全体所组成的集合叫做A与B的笛卡尔积集，记作$A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$$

求笛卡尔积集的法则叫做积运算。

例如，设$A=\{0,1\},B=\{1,-1\}$，则$A\times B=\{(0,1),(0,-1),(1,1),(1,-1)\}$.在求$A\times B$时要注意其元素$(a,b)$中的$a$，$b$顺序不能颠倒，$a$必须取自$A$中，$b$必须取自$B$中。

最后引入几种常用的表示数集的记号：

N：表示一切自然数的集合。

Z：表示一切整数的集合。

Q：表示一切有理数的集合。

R：表示一切实数的集合。

C：表示一切复数的集合。

练　习　一

1　设a是集合A的一个元素，记号$\{a\}$表示什么？$\{a\}\in A$对不对？为什么？

2　写出数集$M=\{1,2,3\}$的所有子集。

3　设$A=\{c,\ b,\ c,\ d\}$，$B=\{b,\ d,\ e,\ f\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$A\times B$。

4　设$E=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$，$A=\{a,\ c,\ d\},B=$

$\{b, d, e\}$. 求$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $(\overline{A\cup B})$, $(\overline{A\cap B})$.

§2 自然数与数学归纳法

在本节里首先研究自然数集及其性质，然后介绍数学归纳法原理。

一 自然数集及其性质

1 自然数集

自然数就是1，2，3，…．而自然数全体组成的集合就是**自然数集**，用N来表示．一个自然数它有两方面的含意：数量的意义和次序的意义．例如“10”，一方面表示“共有10个”即为数量意义，另一方面又表示“第10个”，即为次序意义．

2 自然数集的主要性质

自然数集N的主要性质有：

性质1 任意两个自然数的和与积仍是自然数．换句话说，在自然数集N中能够施行加法和乘法运算，即对任意a，$b\in N$，有$a+b\in N$，$a\cdot b\in N$.

在自然数集中不能施行减法和除法运算．这是因为两个自然数的差与商不一定还是自然数．例如$2-3=-1$，$2\div4=\frac{1}{2}$，而-1与$\frac{1}{2}$都不是自然数．

性质2 自然数是有序的，即1，2，3…．可以按大小顺序排列起来．这列数有一个排头，就是1，没有排尾，并且每一个数加上1就得到它后面相邻的数．

这个性质可以做为自然数的定义．应用这个性质，可以得到自然数集的最基本的性质——最小数原理．

性质3（最小数原理） 任意一个自然数集的非空子集

必有最小数。

证明：设M是自然数集N的一个非空子集。在M中任取一个数m。由 性 质 2 知，在M中不超过m的数最多有m个，即为有限个，所以其中必有一个最小数，令为r。于是r对M中不超过m的自然数中是最小的，而M中其余的数都比m大，因而更比r大，所以r是M中的最小数。证完。

最小数原理及其证明方法要认真掌握，它是数学归纳法成立的理论依据。

值得注意的是最小数原理并不是对于任意数集都成立。例如在整数集Z中就没有最小数。

下面以最小数原理为依据来介绍数学中常用而又重要的证明问题的方法——数学归纳法。

二　数学归纳法原理

1　问题的提出

我们先看一个实例，即考察自然数中前n个奇数的和。从求和中发现

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

…… …… ……

因而，我们猜想前n个奇数的和应等于n^2，即。

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 \qquad (1)$$

这个猜想是否正确呢？在（1）式里，n表示任意自然数，这是一个与自然数有关的命题。由于自然数的个数是无限的，所以无法对每个自然数逐个进行检验。因此，为了证明（1）