高級中學課本

立體幾何

第二分冊

高級中學課本 立體幾何 第二分冊

編者：劉 薰 宇
責任校對：黃 潛 [illegible]
出版者：人 民 教 育 出 版 社
（營業許可證出字第二號）
印刷者：（見 正 文 最 後 頁）
發行者：新 華 書 店

書號：2985
字數：95,100
1—15,000
定價 2,600 元

1953年 7 月原 版
1953年10月北京第一次印刷

高級中學課本 立體幾何第二分冊目錄

III 相似多面體

84. 定義 兩個多面體,若它們的各個多面角對應相等,以及各個面對應相似,我們就把這兩個多面體叫做相似多面體. 相似多面體中,相對應的頂點、稜、面、……叫做相似多面體的對應元素.

由這個定義,我們可以知道,相似多面體中:

1. 因爲它們的對應多面角相等,所以在對應位置的二面角也相等.

2. 因爲它們的對應面相似並且每相鄰的兩個面都有一條公共的稜,而兩個相似面的對應稜的比相等,所以相似多面體的對應稜的比都相等.

由下節所講的定理和証明,我們可以知道相似多面體確實存在.

85. 定理 一個平行於已知稜錐底面的截面截原稜錐所得的稜錐和原稜錐相似.

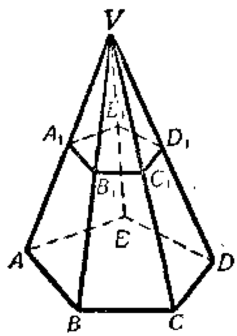

圖 95

如右圖,截面 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 平行於稜錐 $V-ABCDE$ 的底面 $ABCDE$.

$\because$ $A_1B_1 \parallel AB, B_1C_1 \parallel BC, C_1D_1 \parallel CD, \cdots\cdots$

$\therefore$ 兩個稜錐的側面

$VA_1B_1 \sim VAB,\ VB_1C_1 \sim VBC,$

$VC_1D_1 \sim VCD, \cdots\cdots.$

又這兩個稜錐的底面

$A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE.$ (爲什麼?)

這就証明了兩個稜錐的各面對應相似.

其次,這兩個稜錐有一公共的多面角 V,現在我們再來証明它們的各個三面角對應相等.

因爲三面角 $A_1-VB_1E_1$ 和 $A-VBE$ 有相等的二面角 VA,並且它們所含的面角 $VA_1B_1=VAB, VA_1E_1=VAE$,它們的位置順序也相同. 所以

$$A_1-VB_1E_1=A-VBE.$$

同樣可以証明其他的三面角也兩兩對應相等.

這就証明了這兩個稜錐的各個多面角對應相等.

86. 定理 相似多面體表面積的比等於它們的對應稜的平方比.

設一個多面體各面的面積爲 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_n$, 而和它相似的多面體的各個對應面的面積爲 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n$, 以及這兩個相似多面體的任意兩條對應稜爲 L 和 l. 因爲這些對應面兩兩對應相似, 所以

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_2}{p_2}=\frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_3}{p_3}=\frac{L^2}{l^2}, \cdots\cdots, \quad \frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

$$\frac{P_1}{p_1}=\frac{P_2}{p_2}=\frac{P_3}{p_3}=\cdots\cdots=\frac{P_n}{p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n}{p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

87. 定理 相似多面體體積的比等於它們的對應稜的立方比.

這個定理, 我們只就相似稜錐加以証明就可以了. 設 $V-ABCDE$ 和 $V_1-A_1B_1C_1D_1E_1$ 是兩個相似的稜錐. 先將第二個稜錐放在第一個稜錐上, 使多面角 V_1 和 V 相重合. 設底面 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 在第一個稜錐上的位置爲 $abcde$. 因爲三面角 A_1 和 A, B_1 和 B, ……對應相等, 則對應邊 ab 和 AB, bc 和 BC, ……分別互相平行. 因而平面 $abcde$ 和 $ABCDE$ 平行. 設 Vo 和 VO 分別爲兩個稜錐的高, 則

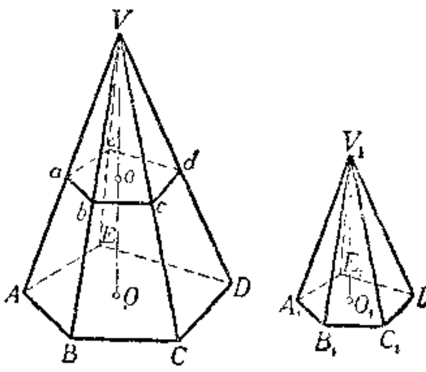

圖 96

$$V-ABCDE \text{ 的體積}=\tfrac{1}{3}(ABCDE \text{ 的面積})\cdot VO,$$

$$V-abcde \text{ 的體積}=\tfrac{1}{3}(abcde \text{ 的面積})\cdot Vo;$$

$$\therefore \quad \frac{V-ABCDE\text{ 的體積}}{V-abcde\text{ 的體積}}=\frac{ABCDE\text{ 的面積}}{abcde\text{ 的面積}}\cdot\frac{VO}{Vo}.$$

$$\text{但} \quad \frac{V-ABCDE\text{ 的面積}}{V-abcde\text{ 的面積}}=\frac{VO^2}{Vo^2},$$

$$\therefore \quad \frac{V-ABCDE\text{ 的體積}}{V-abcde\text{ 的體積}}=\frac{VO^3}{Vo^3}=\frac{VA^3}{Va^3}.$$

習 題 二 〇

1. 一個立方體的稜長爲 a，另一個立方體的體積是它的體積的兩倍，求另一立方體的稜長.

注意：這是初等幾何學中有名的三大作圖不能問題中的一個．就是所謂倍立方問題．另一立方體的稜爲 $a\sqrt[3]{2}=a\cdot 1.25992\cdots\cdots$ 這是一個無理數，而三次方根的無理數只用直尺和兩脚規是不能作出圖來表示的.

2. 一個長方體的三度爲 a,b,c，另一個和它相似的長方體的體積爲它的體積的 m 倍，求另一個長方體的三度.

3. 過一已知四面體的各頂點分別作平面平行於這頂點所對的平面．則得另一個四面體，求這兩個四面體體積的比.

提示：先証兩個四面體相似.

4. 証明：一平行於稜錐底面的平面和這稜錐頂點的距離對於稜錐的高成 $m:n$ 的比，則所得稜錐的底面積、側面積和全面積同着原稜錐的底面積、側面積和全面積的比分別等於 $m^2:n^2$，而它們體積的比爲 $m^3:n^3$.

5. 將空間任意一點和一多面體的各頂點相連，依定比內分（或外分）所得的各綫段，証明依次連結各分點所得的多面體和原多面體相似.

6. 一平行於三稜錐底面的平面將稜錐分成兩部分，這兩部分體積的比等於 m，求這平面和稜錐頂的距離.

7. 一稜錐的高爲 h，作兩個平行於它的底面的平面將這稜錐分成三部分，它們體積的比爲 $m:n:p$，求這兩個平面到稜錐頂點的距離.

8. 兩個相似多面體體積的和爲 V，它們對應稜的比爲 $m:n$，求各多面體的體積.

9. 底面積分別爲 B 和 b 的一個稜台被一平行於它的底面的平面所截，所得兩部分體積的比爲 $m:n$，求這截面到兩底的距離.

IV 正多面體

88. 定義 各個面是全等的正多邊形並且各個多面角也全等的多面體叫做正多面體.

正多面體依所含的面數分別叫做正四面體,正六面體…….

89. 定理 正多面體只有五種.

我們已經知道任何一個多面角的各個面角的和總小於360°. 而多面體的多面角至少是由三個面構成的.

又由平面幾何的定理我們已經知道 n 邊正多邊形的一個內角等於 $\frac{2(n-2)}{n}\angle R=\frac{n-2}{n}\times180°$. 現在就各種正多邊形分別討論於下:

圖 97

1. 正三角形, $\frac{n-2}{n}\times180°=60°$.

用三個面做成的三面角的各面角的和=180°, 就是上圖的 I, 正四面體.

用四個面做成的四面角的各面角的和=240°, 就是上圖的 III, 正八面體.

用五個面做成的五面角的各面角的和=300°, 就是上圖的 V, 正二十面體.

用六個以上的面就不能做成多面角,所以用正三角形的面只能做成三種正多面體.

2. 正方形, $\frac{n-2}{n}\times180°=90°$.

用三個面做成的三面角的各面角的和$=270^\circ$，就是上圖的 II，立方體.

用四個以上的面就不能做成多面角，所以用正方形的面只能做成一種正多面體.

3. 正五邊形，$\frac{n-2}{n}\times180^\circ=108^\circ$.

用三個面做成的三面角的各面角的和$=324^\circ$，就是上圖的 IV，正十二面體.

用四個以上的面就不能做成多面角，所以用正五邊形的面只能做成一種正多面體.

4. $\frac{n-2}{n}\times180^\circ=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$.

而 $n=6$，$\frac{n-2}{n}\times180^\circ=120^\circ$. $n>6$，則正多邊形的一個內角都大於 120°. 但三個 120° 已經等於（就是不小於）360°. 所以單用六邊以上的正多邊形的面都不能做成多面角.

由此可見，正多面體只有五種：

(1)正四面體，它的表面由四個全等的正三角形組成，有四個面，四個頂點和六條稜.

(2)正八面體，它的表面由八個全等的正三角形組成，有八個面，六個頂點和十二條稜.

(3)正二十面體，它的表面由二十個全等的正三角形組成，有二十個面，十二個頂點和三十條稜.

(4)立方體，它的表面由六個全等的正方形組成，有六個面，八個頂點和十二條稜.

(5)正十二面體，它的表面由十二個全等的正五角形組成，有十二個面，二十個頂點和三十條稜.

90. 正多面體的作法 前節我們已經討論過，可能存在的正多面體只有五種，這五種正多面體是不是實際上都可能存在呢？換句話說，就是我們能不能在空間用平面把這五種正多面體都作出來呢？爲了讓我們確信這五種正多面體的存在，下面我們來研究每種正多面體的作法．

1. 立方體的作法．

首先，任意取一個平面 P，在這平面 P 上作一個正方形．其次，過這正方形的各邊分別作垂直於平面 P 的平面，這樣的平面一共有四個．末了作一個平行於平面 P 的面並且使它和 P 的距離等於所作正方形一邊的長．這樣得到的六個平面就成爲一個立方體的六個面．每兩個平面相交所得的十二條交綫的一段就是立方體的稜．每三個平面相交所得的八個交點，就是立方體的頂點．有了立方體，其他的四種正多面體就不難作出了．

2. 正四面體的作法．

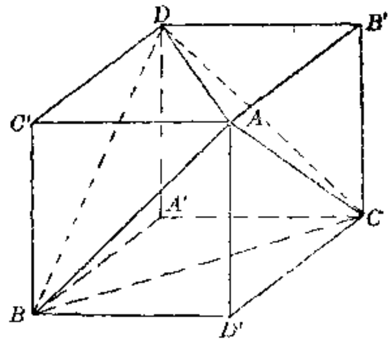

圖 98

設 A 是一個已知立方體的頂點，它也就是這立方體三個正方形面的交點．由 A 點分別作這三個正方形的對角綫 AB, AC 和 AD，則 B, C, D 也是這個立方體的頂點．這樣一來，A, B, C, D 就是一個正四面體的四個頂點．因爲過 A, B, C; $A、C、D$; $A、D, B$ 和 B, C, D 每三點作一個平面，這四個平面兩兩相交就得四個三角形的面 ABC, ACD, ADB 和 BCD，它們的邊 AB, AC, AD, BC, CD、DB 都等於已知立方體一個正方形面的對角綫；也就是這四個面是四個全等的正三角形；所以 $ABCD$ 是一個正四面體．

我們應當注意，已知立方體所剩下的四個頂點 A', B', C' 和 D' 是另外一個正四面體的頂點，這個正四面體也內接於已知的立方體並且它和

第一個正四面體全等.

3. 正八面體的作法.

一個立方體有六個全等的正方形面,每一面有一個中心點(正方形對角綫的交點). 若將一個已知立方體的這六個中心點作頂點,就是過立方體的相交於一個頂點的每三面的中心點作平面,這些平面的一部分就構成一個正八面體.

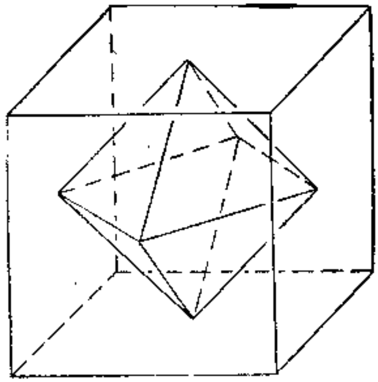

圖 99

4. 正十二面體的作法.

過已知立方體的每一條稜作一個平面,一共可以作十二個面,若使所作的這十二個面,每面除了它所過的那條稜上的點都和立方體的表面不再有公共點,這樣一來,我們就可以得到一個正十二面體.

5. 正二十面體的作法.

將已知的正十二面體各面的中心作頂點,我們就可以作出一個正二十面體.

[注意] 爲了作出各種正多面體的模型以供觀察,可以用較厚的紙照下面的圖先畫好,剪下,再依虛綫摺起來將它們粘攏.

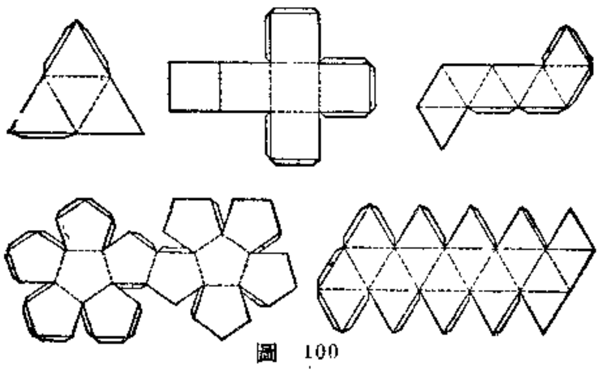

圖 100

［例題 1］ 由平面作圖法表出正四面體的二面角，並且計算出它的近似值。

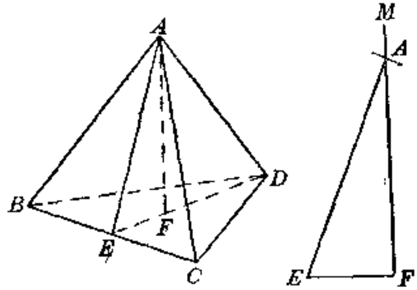

圖 101

［解］ 由頂點 A 作 $AE \perp BC$，因 ABC 是正三角形，所以 E 爲 BC 的中點。又因 DBC 是正三角形，在平面 BDC 上由 E 作 BC 的垂綫，這垂綫必過頂點 D。這樣一來，AED 就是二面角 $A-BC-D$ 的平面角。

再由 A 作平面 BDC 的垂綫，則它必通過三角形 BDC 的重心 F，（爲什麼？）所以直角三角形 AFE 中 $EF=\frac{1}{3}ED=\frac{1}{3}EA$。因而我們得出下面的作法。

1. 作互相垂直的兩條綫段 EF 和 FM。

2. 以 E 爲圓心，$3EF$ 的長爲半徑畫弧截 FM 於 A，則 AEF 就表示正四面體的二面角。

由作圖得

$$\cos\angle AEF=\tfrac{1}{3}=0.3333,$$

$$\therefore \qquad \angle AEF \doteq 70°32'.$$

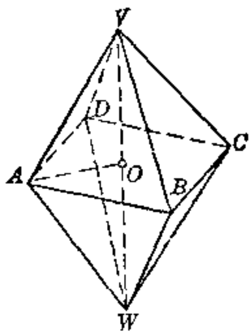

圖 102

［例題 2］ 求稜長爲 a 的正八面體的體積。

［解］ 因截面 $ABCD$ 是一個正方形並且平分正八面體 $VABCDW$，（爲什麼？）設 VO 爲稜錐 $V-ABCD$ 的高，則

$$VO=\sqrt{VA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$\therefore$ 所求的體積 $=2(V-ABCD$ 的體積)

$=2\times\frac{1}{3}VO\cdot(ABCD$ 的面積)

$$=2\times\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot a^2=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

習 題 二 一

1. 以正四面體的高和稜為一邊分別作正方形,則這兩個正方形面積的比為 2:3.

2. 求稜長為 a 的正八面體對角綫的長.

3. 正四面體的稜長為 a,求它的體積和面積.

4. 求稜長為 a 的正八面體的面積.

5. 求稜長為 a 的正十二面體的體積.

6. 求稜長為 a 的正二十面體的體積.

7. 求下列各正多面體中相鄰二面所夾的角:

(i) 正八面體; (ii) 正二十面體; (iii) 正十二面體.

8. 一立方體的稜長為 a,求以這立方體各面的中心作頂點的正八面體的全面積,並且求這面積同着同一個立方體的內接正四面體(如圖 98 中的 $A-BCD$)全面積的比.

9. 以直綫連結正八面體每相鄰兩個面的中點,並且通過所作每相鄰兩直綫作平面,証明這樣得出來的六面體是立方體,並且設正八面體的稜長為 a,求這六面體的全面積.

10. 正八面體的稜長為 a,求它的兩個相鄰面中心的距離.

11. 正八面體的稜長為 3,求它的相對兩平面的距離.

12. 在正四面體內有一個各條稜都相等的正三稜柱,這稜柱一個底面的三個頂點各在四面體的側稜上,而另一底面的三個頂點同在四面體的底面上. 正四面體的稜長為 a,求這三稜柱的稜長.

13. 內接於正八面體的立方體,它的各頂點在這八面體的各稜上,正八面體的稜長為 a,求這立方體的稜長.

V 空間圖形的對稱

91. 中心對稱 在平面幾何中,我們已經講過,若有三個點 O 和 A、A',O 點在綫段 AA' 上,而 A、A' 在 O 的兩側,並且它們到 O 的距離相等,對於 O 點,A 和 A' 就叫做對稱點;而這種對稱叫做中心對稱,O 點叫做對稱中心. 若在同一平面上的兩個圖形中,對於某一個定點 O,任一個圖形上的任意一個點 A,在另一個

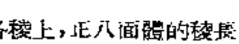

圖 103

圖形上都有它的對稱點,這兩個圖形就叫做中心對稱圖形. 這些概念都適用於空間圖形.

我們已經講過一點空間的對稱形,例如將一個多面角的各條稜從它的頂點延長,也就是將多面角的各個面通過頂點擴展開去,就可以得到和原來的多面角以頂點爲中心相對稱的多面角. 組成對稱的兩個圖形,它們的對應綫段和對應角分別相等. 但就對稱的兩個圖形的本身來研究,有很多雖是對稱的却並不相等,即不能使它們彼此完全重合. 因爲在對稱的兩個圖形裏,一個圖形的各部分和另外一個圖形相對應的各部分,它們所在位置的順序可以相反,這一點我們以前已經講過了.

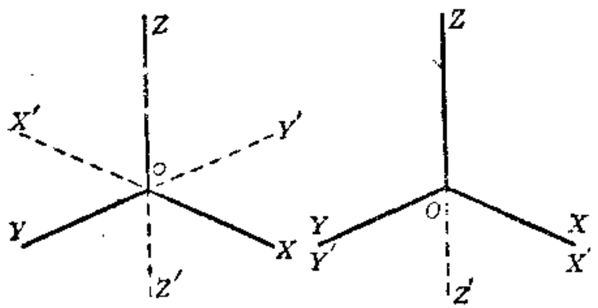

圖 104

此外,還可能有這樣的情形:對稱的兩個圖形雖能夠重合,但並不是它們的對應部分完全一一對一對地分別相重合. 例如,任意取一個由三個直角面構成的直三面角 $O-XYZ$, 從 O 點將 OX、OY、OZ 三條稜分別延長,就得一個新的直三面角 $O-X'Y'Z'$, 這兩個直三面角 $O-XYZ$ 和 $O-X'Y'Z'$ 對於 O 點是對稱的. 我們可以將 $O-XYZ$ 和 $O-X'Y'Z'$ 重合,但須使稜 OX 和 OY'、OY 和 OX' 分別相重合,然後 OZ 和 OZ' 才能相重合. 若使相對應的稜 OX 和 OX'、OY 和 OY' 分別相重合,則稜 OZ 和 OZ' 只能成爲兩條方向相反的半直綫,而兩個直三面角便不能重合.

若一個幾何體可以分成兩個對稱的圖形,我們就說這個幾何體有對

稱中心．也就是說，一個幾何體若有對稱中心，那麼，這個幾何體上所有的點和它們的對稱點都在這個幾何體上．在我們已經學過的幾何體中，如平行六面體和底面是偶數條邊的正多邊形的正稜柱都有對稱中心，而正四面體就沒有對稱中心．

92. 面對稱 若兩個點(A, A')在一個平面(P)的兩側，連結這兩個點的綫段(AA')垂直於這個平面，並且這兩個點到這平面的距離(AO, $A'O$)相等(就是綫段 AA' 被平面 P 垂直平分)，我們就說，這兩個點對於這平面是對稱點．這種對稱叫做面對稱．若對於某一個平面，兩個圖形中任一個上的一切點在另外一個圖形上都有對稱點，這兩個圖形就叫做面對稱圖形．

定理 兩個面對稱圖形的對應綫段相等．

設對於平面 P，兩個圖形是對稱的，A, B 爲一個圖形上的任意兩點，A', B' 爲另外一個圖形上和 A, B 相對應的點．(下圖中沒有把整個的圖形畫出來．)綫段 AA' 和 BB' 同着平面 P 分別相交於 C 和 D．連結 CD，則得兩個四邊形 $ABDC$ 和 $A'B'DC$．在這兩個四邊形中：

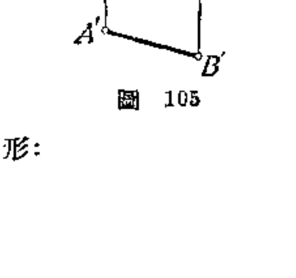

圖 105

$$AC = A'C, \qquad BD = B'D,$$
$$\angle ACD = \angle A'CD = \angle R,$$
$$\angle BDC = \angle B'DC = \angle R,$$

所以這兩個四邊形是全等形(用重合法可以証明)，因而 $AB = A'B'$．

由這個定理直接可以推出兩個面對稱的圖形：

1. 它們相對應的面角相等，

2. 它們相對應的二面角相等．

在這裏我們必須注意：要使面對稱的兩個圖形本身相重合，也就是使它們相對應的各部分全都分別相重合，這一般是不可能的．因爲一個圖

形中的各部分同着另一個圖形中相對應的各部分，它們的位置順序却相反（94 節有嚴格的証明）．兩個圖形關於一個平面對稱的最簡單的例，就是任意一個圖形和它在平面鏡裏的像對於這平面鏡的對稱．——我們注意，這圖形和它在平面鏡裏的像，用平面鏡作標準，左右的順序是相反的．

若某一個幾何體可以分成兩部分，而這兩部分對於某一個平面是對稱的，這個平面就叫做這個幾何體的**對稱面**．

有對稱面的幾何體，自然界裏很多，我們在日常生活中經常可以遇到它．若把人體和一般的動物體分成左右兩部分看，就可以說它們都有對稱面．

在這個例子裏，給我們一種特別的感覺，就是這樣對稱的兩個圖形是不能重合的．例如，我們的左右兩隻手在人體上是對稱的，但不能使它們相重合；這一點，我們由不能將左手的手套往右手上戴就可以知道；我們的兩個耳朵，兩隻眼睛都是對稱而不能使它們各自相重合的．

我們的家庭用品中，有不少的都具有對稱面，如椅子、書櫥、長餐桌等．其中，如長餐桌的對稱面還不止一個而是兩個．你能指出有更多對稱面的東西麼？

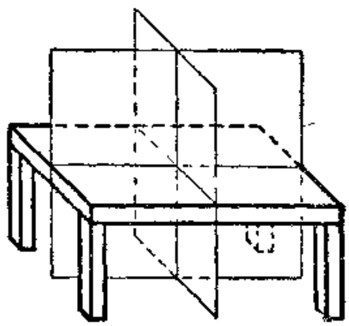

圖 106

一般的，我們觀察具有對稱面的物體，要看清楚它的對稱關係，我們的眼睛必須和物體保持某一個適當關係的位置，就是要使我們身體的對稱平面和那物體的對稱平面相重合，最低限度也要使我們頭部的對稱平面和那物體的對稱平面相重合．

93. 軸對稱——二次對稱軸 對於某一條直綫（l），空間兩個圖形中任一個上的任意一點（A），若在另外一個圖形上都有一個對應點（A'），而這兩點（A 和 A'）的連結綫（AA'）同着這條直綫垂直相交，並且被交點平

分，則這兩個點對於這條直綫叫做對稱點．這種對稱叫做軸對稱．這條直綫叫做對稱軸，二次對稱軸．

由這定義，我們直接可以看出來，若兩個幾何體對於某一條直綫（對稱軸）是對稱的；那麼，用一個垂直於這條對稱軸的平面去截這兩個幾何體，則在截面上所得到的兩個平面圖形，是中心對稱圖形，對稱中心就是這平面同着對稱軸的交點．

由此，我們很容易判斷，若把軸對稱的兩個幾何體中的一個繞着對稱軸轉 180°，它就可以同着和它相對稱的一個重合．實際上，我們可以這樣設想，盡可能地作出一切垂直於對稱軸的平面，而將這些平面所截得的截面分別轉動，則每一個平面上的截面同時分別相重．

軸對稱的兩個幾何體，由垂直於對稱軸的一個平面截它們所得到的兩個圖形，對於這平面和對稱軸的交點是對稱的．若將這兩個平面圖形中的一個在這平面上繞着這交點轉 180°，則它就同着另一個重合．照這種情形，我們可能作出合於需要的任何截面，若把一個幾何體的一切這樣的截面同時都繞着對稱軸轉 180°，這就同着將整個的幾何體繞着對稱軸轉 180° 一樣．這就說明了我們上面所提出的判斷是正確的．

若空間的一個圖形繞着某一條直綫轉 180° 就同着它本身相重合，我們就可以說，這個圖形有二次對稱軸，即某一條直綫．

二次對稱軸的意義是這樣：若一個幾何體繞着一條軸轉 180°，就同着它本身相重合，（這時是左邊一部分同着右邊一部分、而右邊一部分同着左邊一部分分別重合．）再轉 180°，它不但仍然同着本身相重合並且回復到原來的位置．（我們把前一種也算作在原位置相重合．）在這樣情形下的對稱軸就叫做二次對稱軸．例如側面是偶數的直正稜錐，就有二次對稱軸，即它的高．長方體有三條二次對稱軸，每一條是它的兩個相對面中心的連綫．側面是偶數的直正稜柱，它的任意兩個相對面（側面或底面）中心的連綫都是它的對稱軸．因此，若這個直正稜柱側面的數目是

$2K$，則它就有 $K+1$ 條二次對稱軸；除了這些對稱軸，它的任意兩條相對側稜中點的連綫也是它的對稱軸，這樣的對稱軸一共有 K 條；所以側面是偶數 $2K$ 的直正稜柱一共有 $2K+1$ 條二次對稱軸.

94. 空間各種對稱的關係 空間的三種對稱，中心對稱，軸對稱和面對稱，它們中間存在着下面定理所表示的關係.

定理 若圖形 F 對於平面 P 和圖形 F' 對稱，同時對於平面 P 上的一個點 O 和圖形 F'' 對稱，則圖形 F' 和 F'' 對於通過 O 點垂直於平面 P 的直綫(HC)成軸對稱.

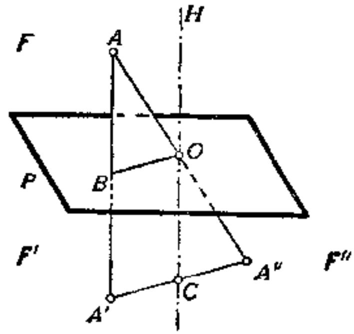

圖 107

設 A 是圖形 F 上的任意一點，A' 和 A'' 分別是圖形 F' 和 F'' 上 A 的對應點.(圖上沒有將圖形 F, F', F'' 畫出來.)

又設綫段 AA' 和平面 P 的交點爲 B. 過 A, A' 和 O 三點作一個平面，因爲這個平面通過平面 P 的垂綫 AA'，所以它必垂直於平面 P. 在平面 $AA'O$ 上，過 O 點作一條垂直於直綫 BO 的直綫 OH，則 OH 也垂直於平面 P. 其次設直綫 $A'A''$ 和 OH 的交點爲 C.

在$\triangle AA'A''$ 中，BO 是連結它的兩邊 AA' 和 AA'' 中點的綫段，所以

$$BO \parallel A'A''.$$

但 $\qquad BO \perp OH, \qquad \therefore \quad A'A'' \perp OH.$

又因 O 是 $\triangle AA'A''$ 一邊 AA'' 的中點，和 $CO \parallel AA'$，

$$\therefore \qquad A'C = A''C.$$

由此可知，A' 和 A'' 兩個點對於直綫 OH 是軸對稱.

因爲上面的証明，A 點是在圖形 F 上任意取的，這就証明了本定理.

由這個定理直接可以推得：兩個成爲面對稱的圖形，一般的不能夠使它們完全相重合，就是不能使它們的一切對應部分同時都分別相重合.