高等学校教材

运动稳定性基础

高为炳 编著

YUNDONG WENDINGXING JICHU

高等教育出版社

高等学校教材

运动稳定性基础

高为炳 编著

高等教育出版社

本书是作者在工科院校多次讲授的讲稿基础上，几经易稿而成。

全书共分五章。为便于教学选用，各章力求相对独立。第一章较详细地讨论运动稳定性的概念、问题的数学表述。第二章介绍定常线性系统及其稳定性。第三章讲述李亚普诺夫第二方法。第四章讨论非定常系统。第五章讨论力学系统的稳定性。各章均配有例题与习题，书末附习题答案和提示。为了便于说明本学科的历史和进一步研究，书后附有参考文献。

本书可作为工科院校研究生教材和本科高年级选修课教材，也可供工程技术人员参考。

责任编辑 蒋 鉴

高等学校教材

运动稳定性基础

高为炳 编著

*

高等教育出版社出版

新华书店重庆发行所发行

重庆新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.375 字数 299 000

1987 年 5 月第 1 版 1987 年 5 月第 1 次印刷

印数 00 001—1,880

书号 15010·0860 定价 2.25 元

前　言

本书是作者在工科院校多次讲授本课程的讲稿几经修改而写成的。运动稳定性理论与应用,范围广、内容多,已有不少著作,新的研究成果与日俱增。作者编写本书的目的是为工科院校高年级学生、研究生学习运动稳定性理论提供一本教材,同时也可供教师及工程技术人员参考。基于这个目的，本书较详细地阐述了稳定性理论的基本概念，和常用的重要理论，并配合有例题与习题。

作者对王照林同志的审稿以及苏乙波、程勉、霍伟、王增刚等同志的协助,在此一并致谢。

由于水平所限,错误与不当之处在所难免,欢迎批评指正。

作　者　1985.7。

目　录

绪　言

运动的稳定性问题起源于力学。拉格朗日 (J. L. Lagrange) 于 1788 年最早提出了关于平衡稳定性的一个一般性定理[1]：势能极小的平衡是稳定的。但这个定理的证明是后来狄利赫里 (L. Dirichlet) 于 1846 年给出的[2]。著名力学家路斯 (E. J. Routh) 于 1877 年给出了线性系统稳定性的检验法[3]。古尔维兹 (A. Hurwitz) 于 1894 年也给出了线性系统的稳定性判据[4]，就是今天常常被用的古尔维兹判据。英国力学家汤姆生 (W. Thomson) 与台特 (P. G. Tait) 的著作[5]大大地丰富了力学系统的稳定性理论。

李亚普诺夫 (A. M. Ляпунов) 于 1892 年发表的论文[6] 开创了稳定性理论的新的一页。他给出了关于稳定性概念的严格数学定义，并提出了解决稳定性问题的方法，从而奠定了现代稳定性理论的基础。随后，对稳定性理论作出贡献的有：切达耶夫 (Н. Г. Четаев)[7]，卡尔曼 (R. E. Kalman)[14]，克拉索夫斯基 (Н. Н. Красовский)[8]，马尔金 (И. Г. Малкин)[9]等。我国学者的著作很多，如[10—13]等。还可以指出一些名著[15—20]。

早期关于运动稳定性的理论，主要是针对力学问题的，其后由于调节原理、控制理论的需要，大大地推动了运动稳定性理论的发展。现代很多学科领域中，特别是工程技术、自然科学，以及在社会、经济、生态、管理等领域，运动稳定性都是它们的最主要的问题之一，众多的研究不断地开拓着运动稳定性的范围，提出新的稳定性概念及解决方法，已难于用一本书来概括。本书将主要讲述稳定性理论的一般基础，它可应用于各种由常微分方程描述的系统。

作为应用，本书有专章讨论力学系统的稳定性问题。至于由差分方程描述的离散系统[21,14]、随机系统[22,23]，偏微分方程描述的分布参数系统[23]、时滞系统[25,26]等的稳定性问题，可参阅有关文献。

全书共分五章。第一章较详细地讨论了运动稳定性的概念、问题的数学表述。第二章介绍了定常线性系统及其稳定性。第三章是本书的主要章，讲述了李亚普诺夫第二方法，这是迄今研究非线性动态系统的基本方法。第四章讨论的是非定常系统。在这一章中，为了对稳定性概念和李亚普诺夫方法有较全面的理解，首先针对非定常非线性这类一般的系统，建立了李亚普诺夫理论。然后对非定常线性系统，介绍了一组便于使用的稳定性的充分判据。还讲述了周期系数线性系统，特别是常用的二阶系统。最后介绍了几种特殊的非定常线性系统。第五章讨论了力学系统的稳定性。

本书各章均力求相对独立。为了掌握李亚普诺夫方法，可阅读第一、第三两章，甚至可以忽略一些定理的证明。第二章线性系统是独立的。第四章中，李亚普诺夫理论可以忽略，非定常线性系统和周期系数系统两部分是独立的，特殊非定常非线性系统的稳定性，可视为第三章的继续。第五章是第三章的应用。此外，各章中一些单独的节，也可以根据教学情况有所忽略而不影响掌握全部主要内容。

本书作为教学之用，并没有给出较全面的参考文献，因为这将需要大量篇幅。为了说明历史及进一步研究，列举了少量的参考书与文献，从中可以找到其它文献。一些重要文章及贡献大的作者并没有全部列出，敬希鉴谅。

第一章　运动稳定性的基本概念

§1　运动稳定性及其实际意义

人们对于运动稳定性的概念，来源于关于作为最简单的运动——静止的稳定性。物理学上常列举小球的稳定性，如图 1-1 所示。小球有两个静止位置(理论上)，位置 A 是稳定的，位置 B 是不稳定的。类似的现象形成了一个通俗的概念：受到小扰动后能回复原位置的静止是稳定的，否则是不稳定的。

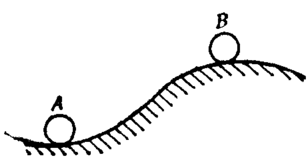


图　1-1

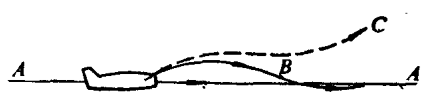


图　1-2

考虑某飞机沿水平直线 $A—A$ 的平飞运动 (图 1-2)。若飞机受到扰动(如上升气流的冲击)，其后飞机将沿轨道 B 逐渐回复到原水平直线飞行，我们将称此飞机的直线平飞运动是稳定的；否则，若飞机沿轨道 C 偏离原直线平飞运动，则称此飞机的直线平飞运动是不稳定的。

上面举出的实例，都是力学中的运动，在自然科学及工程技术的各个分支领域中，都存在运动(包括静止)的稳定性问题。例如，在供电系统中，希望电压保持 220 伏，那末当出现扰动后(如负荷发生变化)，电压是否能回复到 220 伏，就成为一个供电系统的电压稳定性问题。不仅如此，在经济、生态等领域内，也都有稳定性

问题。

在最一般的意义下，运动应理解为变化过程，而不限于它的最简单情况——机械运动。虽然，我们今后为了直观起见常以机械运动的稳定性为主要研究对象，但我们讲述的一般理论也适用于其它系统。

人们认识自然，本身虽具有重要意义，但归根到底还是为了实际应用。在各科学技术领域中，我们设计各种各样的事物，都希望它按所需要的某种规律而运动（或取一定静止形态）。另一方面，各种干扰又总是不可避免地存在着。这样，在干扰后，运动能否回复到所需要的运动形态，即它是否稳定，无疑是十分重要的问题。可以说：运动的稳定性意味着运动的可实现性；稳定的运动实际上可以实现，不稳定的运动实际上不可能存在。这就说明了研究运动的稳定性的意义。

一般情况下，运动的稳定性往往不具有直观性，而是十分复杂、十分困难的问题，也是目前在各领域中引起极大重视的研究中的课题。图 1-3 给出两个简单例子，左图是一个由弹簧 c 支承的倒摆，其静止的稳定性，与弹簧系数 c、质量 m、摆长 l 等参数有关；右图是振动支承下的单摆，支承作振动 $a\sin pt$，摆锤的上下振动 $a\sin pt$ 是否稳定（会不会发生横向摆动而偏离上下振动），与参数 a、p、摆长 l、摆锤质量 m 有关。这两个例子的稳定性条件都需要进行理论研究才能得到。

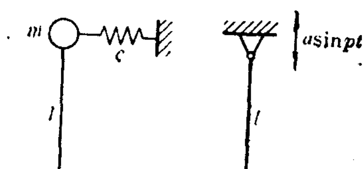


图 1-3

为了获得关于稳定性的定量结果——稳定性条件，必需进行严格的理论研究。为此，象其它任何学科一样，需要给出关于稳定性的严格定义，建立各种关于稳定性的定理。我们将讲述运动稳

定性理论的主要的、常用的内容及其在力学系统中的应用。

质点、质点系、刚体、刚体系，都是力学系统，电路是电学系统的例子，类似地还有其它系统，如机电系统、化学系统、生态系统、经济系统等等，今后我们统称之为“系统”。在本书中，我们只研究用常微分方程所描述的系统，而系统可以代表任何实际对象。

§2 运动微分方程·关于解的一般性质

1. 系统的运动微分方程

任何系统中发生的变化，包括力学系统中的运动，可通过称为状态变量的一组变量的变化过程表示出来。记这些状态变量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。对力学系统，可取广义坐标及广义速度为状态变量。一组状态变量可表示成状态向量 $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

系统的运动方程通过状态变量表示为一阶微分方程组的形式:

$$\dot{x}_i=f_i(x_1, \cdots, x_n, t) \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-2}$$

或写成向量形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1-3}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 是向量函数:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)=\begin{bmatrix} f_1(x_1, \cdots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n, t) \end{bmatrix}.$$

例1-1 质点沿直线的运动方程。质量为 m 的质点，按牛顿第二定律，

其运动微分方程为

$$m\ddot{x}=F(x,\dot{x},t) \tag{1-4}$$

式中 $F(x,\dot{x},t)$ 表示质点上所受外力的合力。引入状态变量：

$$x_1=x, \quad x_2=\dot{x}$$

第一个变量 x_1 表示位置坐标，第二个变量 x_2 表示速度。坐标 (x_1,x_2) 也称为质点的"相坐标"，这时，式(1-4)可表示为(1-2)的形式：

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2,t), \quad f_1(x_1,x_2,t)=x_2$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,t), \quad f_2(x_1,x_2,t)=F(x_1,x_2,t)$$

或写成向量形式(1-3)：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{bmatrix} x_2 \\ F(x_1,x_2,t) \end{bmatrix}$$

例 1-2 力学系统的运动微分方程。

力学系统的运动微分方程可以通过多种形式来表示[27,28]，常用的形式有：

(1) 拉格朗日方程。完整力学系统的拉氏方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q_1,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t) \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{1-5}$$

这里 q_i 表示广义坐标，k 是自由度数，T 是系统的动能，Q_i 是系统相对 q_i 的广义力。

在一般情况下，含 $\ddot{q}_i$ 的二阶微分方程组(1-5)可以将 $\ddot{q}_i$ 解成显式：

$$\ddot{q}_i=F_i(q_1,\cdots,q_k,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t) \quad (i=1,2,\cdots,k) \tag{1-6}$$

引入状态变量(相坐标)：

$$\begin{aligned} &x_1=q_1, \quad x_2=\dot{q}_1, \\ &x_3=q_2, \quad x_4=\dot{q}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_{n-1}=q_k, \quad x_n=\dot{q}_k, \quad n=2k \end{aligned}$$

可将式(1-6)化为一般形式(1-3)：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ q_k \\ \dot{q}_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{bmatrix} x_2 \\ F_1(x_1,\cdots,x_n,t) \\ \vdots \\ x_n \\ F_k(x_1,\cdots,x_n,t) \end{bmatrix}$$

(2) 哈米尔顿方程。

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{1-7}$$

哈米尔顿方程是描述完整的保守力学系统的运动微分方程，其中 q_i 为广义坐标，$p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 为相对于 q_i 的广义冲量，$L(q_1,\cdots,q_k,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t)$ 为系统的拉氏函数(拉格朗日函数)，$H(q_1,\cdots,q_k,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k,t)$ 是系统的哈氏函数(哈米尔顿函数)。广义坐标 q_i 及广义冲量 p_i 一起可以视为系统的状态变量(力学中称为正则变量)。这样，式(1-7)可以表示成(1-3)的形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \\ \vdots \\ q_k \\ p_k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\begin{bmatrix} \partial H/\partial p_1 \\ -\partial H/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial p_k \\ -\partial H/\partial q_k \end{bmatrix}$$

并在 $\partial H/\partial p_i$, $-\partial H/\partial q_i$ 中将 $q_1,q_2,\cdots,p_1,p_2\cdots$ 置换为 $x_1,x_3,\cdots,x_2,x_4,\cdots$。

不能从这两个例子中得到如下结论：状态坐标的数目总是偶数。在电学等其它类型的系统中，很明显，这个结论是不成立的；即便是质点系统，当质量可以忽略不计时，就会出现奇数情况，这在液压系统中也是常见的，还有其他例子。

从别的力学原理(如动量矩定理等)建立的运动方程，也可以用类似的方式，建立起形式如(1-3)的系统的运动微分方程。

2. 关于运动微分方程解的一般性质的定理

研究运动的稳定性，除被研究的那个运动之外，还要考虑邻近的运动。所有这些运动，都是运动微分方程的解，因此在研究运动稳定性时，需要知道关于解的一些更一般的性质。如解的存在性、

唯一性等等。

任何实际系统，总会发生运动的，用数学的语言来表述，就是说系统的运动微分方程$\dot{x}=f(x,t)$总是有解的。亦即，任给一个初始状态$x(t_0)=x_0$，总可确定一个解。为了表示这个解是由初始条件t_0，x_0决定的，记它为

$$x(t)=x(t,x_0,t_0)$$

既然如此，再讨论什么解的存在性与唯一性，似乎是多余的了。

事情是这样的，因为任何客观存在的实际系统，总是十分复杂的，要对它进行绝对精确的数学描述，几乎是不可能的。所以从本质上说，我们不可能写出实际系统的运动微分方程，能作到的仅仅是对真实系统的某一种简化了的(常常是大大简化了的)物理模型，写出它的运动微分方程。而且同一个真实系统，由于模型的简化不同，可以写出不同的数学方程，它们之间的差异也可能是很大的。如一个系统，可视为非弹性的刚体，写出的运动微分方程是常微分方程，但若考虑到系统的弹性变形，又可能写成偏微分方程，其差异是根本性的。

以上强调了事物的一个方面：多样性。其实，我们研究任一系统，总是有确定的目标的，就是说，我们不能研究它的全部问题，而要研究的只是某一个或几个问题。那末，就可以在建立系统的物理模型时，仅考虑与欲研究的问题有关的主要因素，从而建立尽可能简单的、又能反映问题特性的物理模型，这就是事物的另一个方面：确定性。

总起来说，由于我们建立的系统的运动微分方程只是其物理模型的方程，因此，这个方程的解是否存在与唯一，就成为需要考虑的一个理论问题。尤其主要的是，由于非线性系统的解的解析表达式一般是求不出来的，所以关于解的一般性质的定理，在微分方程定性论中也起着基础性的作用。以下不加证明地叙述这几个

定理，这些定理对于深入理解本书内容是十分有益的。这些定理的证明及应用可参看[29—31]等书。

对于运动微分方程

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \cdots, x_n, t) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-8}$$

时间 t 属于某开区间 $I=(t_1, t_2)$, $t_1 \geqslant -\infty$, $t_2 \leqslant +\infty$, 我们常取 $t \in (-\infty, +\infty)$；状态向量 $(x_1, \cdots, x_n)^T$ 属于 n 维欧氏空间 R^n 中的某区域 $W: \boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T \in W$，$W$ 常常是 R^n 本身。这样 f_i 的定义域记为 $W \times I$。设 f_i 在 $W \times I$ 上连续。

若存在一常数 L, 使得对任何 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y} \in W$, $t \in I$, 都有

$$|f_i(\boldsymbol{x}, t) - f_i(\boldsymbol{y}, t)| \leqslant L \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \tag{1-9}$$

称 f_i 在 $W \times I$ 上满足李氏条件。显然，若 f_i 的所有偏导数存在，且在 $W \times I$ 上有

$$\left| \frac{\partial f_i(x_1, \cdots, x_n, t)}{\partial x_j} \right| \leqslant K \quad (i, j=1,2,\cdots,n) \tag{1-10}$$

其中 K 为某正实数，则李氏条件(1-9)成立。

以下几个定理将阐明关于解的基本性质。

定理 1-1(解的存在性及唯一性定理)：

对于微分方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$，若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ 在 $W \times I$ 上连续，且满足李氏条件，则对任意初始条件 $(\boldsymbol{x}_0, t_0) \in W \times I$，总存在常数 $a>0$，使得有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 在 $[t_0-a, t_0+a]$ 上存在，对 t 连续，且满足初始条件：$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$。

推论(解的延拓性)： 定理 1-1 中由任意初始条件 $\boldsymbol{x}_0, t_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t)$，当 t 向前延拓时(令 t 无限增大)，或者位于 W 的内部，或者于有限时刻 t^* 到达 W 的边界；向后延拓也是一样。

上述定理 1-1 说明，在初始状态 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 附近解存在且唯一，如图 1-4(a)所示。定理的推论表明过上述 $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ 的解的延拓，

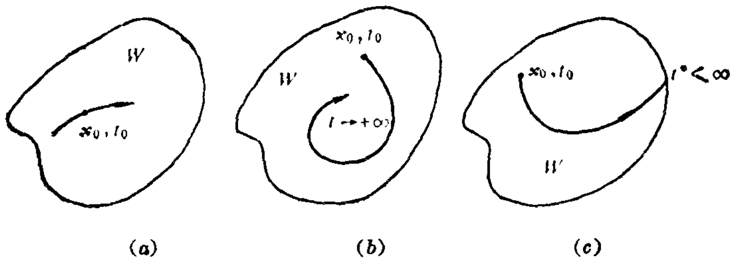


图 1-4

或者象图(b)那样，对所有 $t \geqslant t_0$ 解在W上存在，即解在W上可向正向无限延拓，或者象图(c)那样，在W上解只能从 t_0 延拓到 t^*；至于$t > t^*$时解的存在性我们就不清楚了。

例1-3 考虑一阶系统：

$$\dot{x} = -x^2$$

这个方程容易积分，其解为

$$x = \frac{x_0}{1 + x_0(t - t_0)}$$

显然，若 $x_0 > 0$，则解可以沿正向无限延拓，且有：

当 $t \to \infty$时，$x(t) \to 0$

但是，若 $x_0 < 0$，

$$\text{当} \quad t \to t_0 + \frac{1}{-x_0} = t^* \text{时}, x(t) \to \infty$$

这表明，对给定的 x_0，其解沿正向可延拓到 t^*之前。

正象后面所要介绍的，稳定性所讨论的是解的渐近性状，即当 $t \to \infty$时解 $x(t)$的情况（性状），所以我们将假定在$[t_0, \infty)$或$(-\infty, \infty)$上解是存在的。

例1-4 研究二阶系统：

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = -2y \tag{1-11}$$

用 x_0，y_0表示 x 及 y 于 t_0时的初始值，为简单记，设 $t_0 = 0$。可以容易地求出(1-11)的解为

$$x = x_0 e^{-t}, \qquad y = y_0 e^{-2t} \tag{1-12}$$

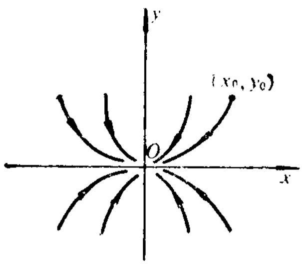
现在在(x, y)平面上画出式(1-12)的轨线。若 $x_0 = y_0 = 0$，得到一特解：

$$x(t)=0, \qquad y(t)=0$$

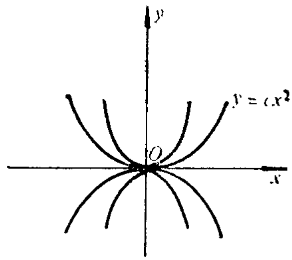
这就是系统(1-11)的平衡解,在图 1-5(a)上表示为原点。通常称每一条运动轨线为相轨线。若 $x_0^2+y_0^2\neq 0$,运动的轨线可以从式(1-12)中消去 t 得到:

$$y=cx^2, \qquad c=y_0/x_0^2$$

随着(x_0, y_0)取值不同,轨线是不同的抛物线。当 $t\to\infty$时,点(x, y)从(x_0, y_0)出发趋向原点 $x=y=0$,但不可能到达原点,如图 1-5(a)所示。图 1-5(a)



(a) 相轨线



(b) 积分曲线

图 1-5

称为系统 (1-11) 的相图,平面(x, y)称为相平面。

系统(1-11)的右端连续可微,满足解的存在唯一性条件,因之过(x, y)平面上任一点有一条且仅有一条相轨线。

现在将(1-11)的两个方程相除,消去变量 t,得到一阶微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{1-13}$$

这个方程称为系统的相轨线的微分方程,而式(1-11)为系统的运动微分方程。方程(1-13)是系统(1-11)的相轨线所在的几何曲线应满足的微分方程,这里完全没有时间与运动的概念,它的解是一些几何曲线。易解得方程(1-13)的积分曲线为

$$y=cx^2, \qquad c=y_0/x_0^2 \tag{1-14}$$

解族(1-14)是一族抛物线,如图 1-5(b)所示。

可以看出,每一条积分曲线上,有三种相轨线:①原点,②从左边趋向原点的相轨线,③从右边趋向原点的相轨线。

现在讨论微分方程(1-13)。它的右端函数$\frac{y}{x}$,在原点为$\frac{0}{0}$无定义,自然