

7-11252  
w81

# 光波导理论

吴重庆 编著



A0968421

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

### 内 容 简 介

随着光纤通信的飞速发展,作为光纤传输的理论基础——光波导理论,也趋于完善与系统化。本书改变了单模光纤、多模光纤的程式,完全以光波导的结构演变为主线,强调理论自身的逻辑性,系统地研究不同结构光波导的不同概念、特性及相互联系,特别加强了光波导的模式理论、传输特性、双折射现象和模式耦合知识。全书思路清晰,知识结构完整,注重讲述对不同类波导独特的分析方法,密切结合光纤通信的最新发展。本书可供通信、电子学、光电子学等专业的研究生及从事光纤通信的科技人员学习与参考。

书 名: 光波导理论

作 者: 吴重庆

出版者: 清华大学出版社(北京清华大学学研楼, 邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者: 北京市密云胶印厂

发行者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 11.25 字数: 261 千字

版 次: 2000 年 3 月第 1 版 2000 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN7-302-01315-2/O·227

印 数: 0001~3000

定 价: 16.00 元

# 前 言



光纤技术的飞速发展,已成为信息时代革命的主要动力之一。光纤已不只是一种传输介质,它已成为构成各种光纤功能器件的基础,比如光纤耦合器、光纤滤波器、光纤放大器、光纤激光器等。光纤通信也不只局限于传输领域,而且拓展到交换、传感等领域。光子交换技术、光网络技术的出现,正预示着全光通信时代的到来。光纤的巨大的通信能力,正改变着通信网的结构,核心网和接入网概念的提出、IP 电话的出现,使现有的基于集中的电路交换通信网的分级结构,有被分散的基于路由器的光网络取代的趋势。

光纤技术的每一步成功,无不是在光纤技术的基本理论——光波导理论的指导下取得的,因此,对于每一个希望掌握光纤技术的研究人员、工程技术人员,系统全面地掌握光波导理论是至关重要的。当我们重新审视光波导理论的时候,感到迫切需要一本系统的、完整的、严谨的关于光波导理论的论著。这就是推动作者成书的动力。此外,本书不仅是当前光纤理论的总结,还希望为今后的研究提供基本的、前瞻性的分析方法,以便读者成为创新型的人才。书中大量的理论推导,目的在于阐明,书中所提出的概念、结果不仅是实际经验的总结,而且是有其理论的内在联系的。读者可以在此基础上推陈出新,不受当前技术条件的约束,提出新的构思。

以往的论著大多采用单模光纤、多模光纤的程式,与当时光纤技术的发展阶段相吻合。然而理论的演进有它自己内在的规律性,事实上,单模光纤与多模光纤不过是同一光纤的不同运用状态,光波导的结构并没有本质的变化。因此,本书改变了单模光纤、多模光纤的程式,完全以光波导的结构演变为主线,强调理论自身的逻辑性,系统地研究不同结构光波导的不同概念、特性及相互联系。本书在第 1、第 2 章首先论述了光波导的一般理论,强调了正规光波导的模式理论。在第 3 章和第 5 章从易到难地讲述了平面光波导、二层圆均匀光波导(阶跃光纤)、多层圆均匀光波导、圆非均匀光波导(平方律圆光波导、高斯型圆光波导)等各种正规光波导的特性、分析方法。通过第 3 章的学习,读者已经对简单而基本的光波导有了一定认识,在此基础上,第 4 章全面讲述了正规光波导的传输特性。第 6、第 7 两章主要讲述非正规光波导的特性和分析方法,主要包括双折射现象和模式耦合知识。由于非圆的正规光波导往往伴随着随机纵向不均匀性,因此也放在第 7 章讲述,第 8 章讲述两光波导的横向耦合问题,包括光耦合器和无源光纤环。第 9 章讲述光纤的损耗。全书思路清晰,知识结构完整,注重讲述不同类波导的独特的分析方法。

本书是在作者多年讲授光波导理论的教材和发表的论文基础上,吸收了北方交通大学光波技术研究所的杨永川、郭尚平、王智、严秀红、龚岩栋等人的工作,参考了国内外的

有关论著,几经修改,终于成书。然而距读者对系统、完整、严谨的光波导理论的期望,本书尚有很大差距,也深感赶不上光纤技术的飞速发展。书中多有不当之处,请读者批评指正。笔者并借此机会感谢导师简水生院士的教导。

吴重庆

1999年4月

# 目 录

=====

绪论	1
<b>1 光波导的一般理论</b>	<b>4</b>
1.1 光频的麦克斯韦方程	4
1.2 亥姆霍兹方程	5
1.3 光场纵向分量与横向分量的关系	6
<b>2 正规光波导</b>	<b>7</b>
2.1 模式的概念	7
2.2 模式场的纵向分量与横向分量的关系	9
2.3 模式的分类	10
2.4 正向模与反向模的关系	11
2.5 模式的正交性	12
2.6 传输常数的积分表达式	13
<b>3 均匀光波导</b>	<b>16</b>
3.1 概述	16
3.2 平面光波导	17
3.2.1 模式场	18
3.2.2 特征方程	21
3.2.3 截止条件、单模传输及远离截止频率的情形	22
3.3 圆均匀光波导	24
3.3.1 概述	24
3.3.2 线偏振模与标量法	28
3.4 二层圆均匀光波导(阶跃光纤)	30
3.4.1 矢量法	31
3.4.2 标量法	40
3.5 多层圆均匀光波导	46
3.5.1 矢量法	46
3.5.2 标量法	48

<b>4 正规光波导的传输特性</b> .....	51
4.1 概述.....	51
4.2 群时延.....	54
4.3 脉冲展宽与色散.....	55
4.4 高阶色散与基本传输方程.....	62
4.5 二层圆光波导的传输特性(单模光纤的传输特性).....	65
4.6 多层圆均匀光波导的传输特性.....	69
4.6.1 基于归一化传输常数 $b$ 的分析方法 .....	69
4.6.2 基于矢量法的分析方法.....	71
<b>5 圆非均匀光波导</b> .....	73
5.1 概述.....	73
5.2 平方律圆光波导.....	75
5.3 高斯近似法.....	81
5.4 级数解法.....	85
5.5 Galerkin 方法.....	89
<b>6 非正规光波导</b> .....	93
6.1 概述.....	93
6.2 正规光波导的辐射模与空间过渡态.....	96
6.3 弱导缓变光波导的模式耦合.....	98
6.4 矢量模耦合方程 .....	100
6.5 光纤光栅 .....	103
6.6 光波导的突变——光纤对接 .....	107
<b>7 非圆光波导</b> .....	111
7.1 非圆光波导与双折射 .....	111
7.2 非圆均匀光波导 .....	114
7.2.1 一般解法(微扰法) .....	114
7.2.2 二层非圆光波导 .....	116
7.2.3 椭圆芯阶跃光纤 .....	117
7.3 非圆非均匀光波导 .....	120
7.4 模式耦合对偏振态演化的影响 .....	124
7.5 偏振模色散 .....	133
<b>8 两光波导的横向耦合</b> .....	139
8.1 正规光波导的横向耦合 .....	139
8.1.1 模式耦合方程 .....	139

8.1.2	耦合波的特性 .....	143
8.1.3	用极化电流概念推导模耦合系数 .....	145
8.1.4	两正圆光纤的横向耦合 .....	147
8.2	缓变非正规型横向耦合 .....	149
8.3	无源光纤环 .....	153
<b>9</b>	<b>光纤的传输损耗 .....</b>	<b>161</b>
9.1	概述 .....	161
9.2	材料损耗 .....	163
9.3	波导损耗 .....	165
	<b>参考文献 .....</b>	<b>169</b>

# 绪 论



光纤通信的发展,推动着人类社会向信息社会的变革。1970年第一根低损耗光导纤维的出现,翻开了人类通向信息社会新的一页。研究光如何在光纤和各种光波导中传输的理论,即光波导理论,则是光纤传输的基本理论,是它指导着光纤技术的前进。

虽然在古代人们对光的传播就有了一定的认识,但深入研究光在光纤和各种光波导中的传播理论,却是近三十年的事。光波导理论源于微波波导理论。20世纪50年代后期,电子学的发展,使人类对电磁波的利用推进到了微波波段,全世界都在致力于微波波导的研究。然而历史却没有遵从“循序渐进”的原则,当微波技术远没有获得所预料的广泛的大规模应用的时候,光波的时代就到来了。

从微波到光,是人类对电磁波利用的必然趋势。光波导理论和微波波导理论有密切的联系,然而二者却有截然不同的特点。光波导不只是介质微波波导尺寸的缩小,光在光纤中的损耗机理、光波导的弱导性及其他传输特性都与微波波导不相同,所以光波导理论是一门独立的理论。

人类对光本质的认识经历了曲折的历程。今天,因光在传输过程中表现出波动性而将光看作一种电磁波已成为人们的共识。虽然在某些场合,从几何光学或光线理论可以得到直观的感性认识,但却是浮浅的。本书正是将光看作一种电磁波来研究光波导的。

光波既然是电磁波,那么它首先是一种电磁振荡。电磁振荡包括电场与磁场两方面的振荡,因此,光场按工程惯例以电场强度  $E$  和磁场强度  $H$  来表征,可写成

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (x, y, z, t) \quad (0-1)$$

光场既是位置  $r(x, y, z)$  的函数,又是时间  $t$  的函数。

一个单一频率的简谐电磁振荡,通常可表示为

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} (x, y, z) e^{j\omega t} \quad (0-2)$$

其中  $E, H$  是复矢量,包括了方向、幅度和相位关系。一个理想的相干单色光,也可以写成上述的形式,即光场中每点的场分量均有固定的方向、稳定不变的频率和稳定的相位关系,但它的频率极高,达到  $10^{14}$  Hz 数量级。实际的光场是由许多这样理想的相干光场的叠加(连续的或离散的叠加)而成,它们不仅可能频率不同,而且亦无稳定的相位关系,方向也不固定。所谓自然光就是一种这样的光。

以上是对光的一个简单而基本的认识。



下面再分析光波导。

光导纤维就是一种最重要、最常见的光波导。通常，光导纤维的纵向长度比横向尺寸大得多，材料折射率的分布沿纵向基本是均匀的，或在局部可看成均匀的。光波导是比光导纤维更为广阔的概念。光波导同样具有纵向与横向的取向区分，纵向往往定义为传输方向，并以此作为一个波导的特征。然而，这种取向区分完全是人为的，具有任意性，我们以光在无限大平面的界面的3种媒质中的传播为例说明这个问题。

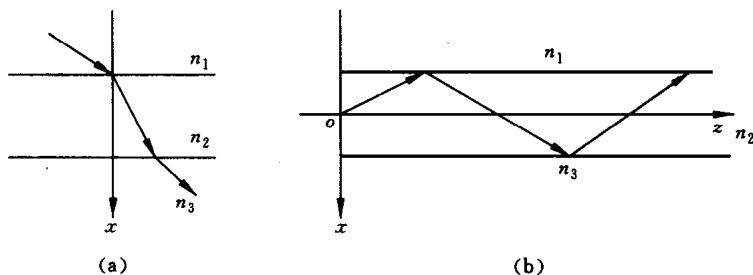


图 0-1 光波导取向区分

如果以图 0-1(a)中的  $x$  方向为纵向，我们看到光是从介质  $n_1$  经过介质  $n_2$  传播的，在界面上服从折射、反射定律。如果我们以图 0-1(b)的  $z$  向为纵向，则它是一个 3 层平面光波导。若  $n_2 > (n_1, n_3)$ ，光可束缚在  $n_2$  内传播，它在  $x$  方向上呈现一个稳定的场型。显然，这种场型和前面的折射、反射定律所得的结果是一致的。由此可见，对纵向的不同定义，决定了对光波导特性的不同描述。不过，既然已经把它看作为一种波导而不看作光场(电磁场)存在的一般介质空间，总是要规定出纵向的。

影响光波导传输特性的，主要是折射率的空间分布。在本书中，总是假定这种分布是：  
① 线性的；② 时不变的；③ 各向同性的，即

$$n = n(x, y, z)$$

它与时间  $t$ 、光场  $\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$  均无关。

根据光波导折射率的空间分布的均匀性，我们进行如下分类：

$$\text{线性光波导} \begin{cases} \text{纵向均匀的(正规光波导)} \begin{cases} \text{横向分层均匀的(均匀光波导)} \\ \text{横向非均匀的(非均匀光波导)} \end{cases} \\ \text{纵向非均匀的(非正规光波导)} \begin{cases} \text{缓变光波导} \\ \text{迅变光波导} \\ \text{突变光波导} \end{cases} \end{cases}$$

这种分类完全是从便于理论分析的角度出发的，根据需要，实际的光纤可看作其中的某一类。比如当我们只考虑某根光纤的基本模式的时候，可把它看作纵向均匀的正规波导；而当我们考虑这些模式耦合的时候，把它看作纵向非均匀的非正规波导。

光波导的传输特性是指光波导用于信息传递时的最基本的特性，它包括光本身在光波导中的传播特性和载有信息的光信号的传输特性两方面。光本身在光波导中的传播特

性包括：① 光场的分布形式；② 传播常数或相移常数；③ 偏振特性；④ 模式耦合特性，等等。光信号的传输特性包括：① 群时延和群速度；② 色散特性、高斯脉冲展宽以及群相延；③ 偏振模色散；等等。针对不同类别的光波导，分别研究它们的这些特性，就是贯穿于本书的主线。

以上概括地说明了光波导理论就是以光的电磁波理论为基础，研究光在波导中的传输特性的理论。

# 1 光波导的一般理论



## 1.1 光频的麦克斯韦方程

1864年,麦克斯韦(J. C. Maxwell)回顾和总结了前人关于电磁现象的实验研究成果,提出了一套完整的宏观电磁场方程,预言了电磁波的存在并提出“光就是电磁波”的重要论断,开创了光的经典电磁理论的新纪元。迄今为止,在光通信、光集成(集成光学)、光信息处理等领域,有关光传输的问题,仍然以麦克斯韦方程作为理论基础,推动着光波技术的发展。因此,我们首先导出光频下的麦克斯韦方程。

在介质中基本的麦克斯韦方程是瞬态的(时域的)和局部的,即某一时刻、某一位置上电场  $E$  和磁场  $H$  所应满足的普适方程(无论是否是光频)为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H &= \frac{\partial D}{\partial t} + J \\ \nabla \cdot D &= \rho \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-1)$$

在这4个方程中,前两个是基本的,后两个方程可利用旋度场的散度恒为零及电荷不灭定律

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

导出。

麦克斯韦方程中与  $D$  与  $E$ ,  $B$  与  $H$  的关系(又称物性方程)是由波导的材料性质所决定的。对于线性、各向同性的时不变的光波导,通常有

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$B = \mu_0 H + M$$

式中  $\epsilon_0$  为真空中的介电常数;  $\mu_0$  为真空中的导磁率;  $P$  和  $M$  为电极化强度和磁化强度。

在光频下,介质都是无磁性介质,即  $M=0$ , 于是

$$B = \mu_0 H$$

但  $P$  与  $E$  之间的关系却可能是很复杂的,而且  $P$  与  $E$  关系的一个微小变化,都将导致波导新的物理现象。这里,我们首先把注意力集中于线性、各向同性的时不变光波导,这时,

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 \left\{ E + \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t-t_1) E(r, t_1) dt_1 \right\}$$

对上式进行傅里叶变换可得

$$\mathbf{D} = \epsilon(\omega)\mathbf{E}$$

因此,我们应注意,以往常用的表达式  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ,实际上是一个频域表达式,而不是时域表达式, $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \epsilon$  3 个量均是频率(光频)的函数,都有大小、相位等。

为了便于分析我们首先考虑单一光频的情形,此时光场可表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} (x, y, z) e^{-j\omega t} + c. c$$

式中  $c. c$  表示共轭。注意,表达式右边的  $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} (x, y, z)$  是一个复矢量,包括方向、幅度、相位 3 个要素。进而,考虑到光波导中,  $\mathbf{J} = 0$  且  $\rho = 0$ , 可得一组方程

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu_0\mathbf{H} & (1-1-2a) \\ \nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{D} & (1-1-2b) \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 & (1-1-2c) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & (1-1-2d) \end{cases}$$

将  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  代入到(1-1-2c)式中,可得  $\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = \nabla\epsilon \cdot \mathbf{E} + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , 进而得到一个重要结果:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (1-1-3)$$

(1-1-3)式有明确的物理意义,即波导中介质分布的任何不均匀性,在  $\mathbf{E}$  的作用下,将使  $\mathbf{E}$  成为有源场,尽管此处并无空间电荷  $\rho$ 。它的物理解释为:介质分布的不均匀性,导致极化电荷分布的不均匀,出现微观剩余电荷,表现为有源场。

综合以上结果,可得到光频下  $\mathbf{J} = 0, \rho = 0$  时,在线性、各向同性且时不变的光波导中频域的麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu_0\mathbf{H} & (1-1-4a) \\ \nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\epsilon\mathbf{E} & (1-1-4b) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} & (1-1-4c) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & (1-1-4d) \end{cases}$$

## 1.2 亥姆霍兹方程

对方程(1-1-4)进行简单的数学演算,即可将  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  互相关联的方程转化为各自独立的方程,例如对(1-1-4a)式,利用

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

立即可得亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \right) = 0 \quad (1-2-1a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 n^2 \mathbf{H} + \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \quad (1-2-1b)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$  为真空中的波数; $\lambda$  为波长; $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$ 。由方程(1-2-1)可以看出,方程的左边

包括齐次部分  $(\nabla^2 + k^2 n^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$  和非齐次部分, 而  $\nabla \epsilon$  是否为零是该方程是否为齐次的关键。如果所考虑的那一部分光波导中, 介质为均匀分布 ( $\nabla \epsilon = 0$ ), 或近似均匀分布 ( $\nabla \epsilon / \epsilon \rightarrow 0$ ), 那么该方程就转化为齐次的方程

$$(\nabla^2 + k^2 n^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1-2-2)$$

所以, 我们依据折射率分布的均匀性对光波导进行分类, 实质上是看它的光场满足什么样的齐次方程, 从而引出许多不同的特点。

### 1.3 光场纵向分量与横向分量的关系

如绪论中所述, 纵向(传输方向)与横向的取向区分是光波导的基本特征。我们同时要记住, 规定哪个方向为纵向或横向, 具有很大的任意性, 然而一旦规定好了纵向与横向, 则场的分布、方程的形式等均随之确定, 不再有任何任意性。于是光波导中的光场可分解为纵向分量与横向分量之和, 即有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_z \end{aligned} \right\} \quad (1-3-1)$$

式中下标  $z$  方向规定为纵向; 下标  $t$  表示为垂直于  $z$  方向的横向。

矢量微分算子  $\nabla$  也可表示为纵向与横向两个方面, 即  $\nabla = \nabla_t + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ , 其中  $\hat{z}$  表示  $z$  方向的单位矢量。代入(1-1-4)式, 使左右两边纵向与横向分量各自相等, 可得

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t \times \mathbf{E}_t &= j\omega\mu_0 \mathbf{H}_z \\ \nabla_t \times \mathbf{H}_t &= -j\omega\epsilon \mathbf{E}_z \\ \nabla_t \times \mathbf{E}_z + \hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} &= j\omega\mu_0 \mathbf{H}_t \\ \nabla_t \times \mathbf{H}_z + \hat{z} \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} &= -j\omega\epsilon \mathbf{E}_t \end{aligned} \right\} \quad (1-3-2)$$

方程组(1-3-2)中的前两个方程, 表明横向分量随横截面的分布永远是有旋的, 并取决于对应的纵向分量; 后两个方程表明纵向分量随横截面的分布, 其旋度不仅取决于对应的横向分量, 而且还取决于各自的横向分量。由于光波导中不能够存在理想的 TEM 波, 所以两个横向分量作用的结果, 仍不能使其旋度为零。所以通常纵向分量随横截面的分布也是有旋场。

## 2 正规光波导

### 2.1 模式的概念

我们将研究最主要的一类光波导——正规光波导，它表现出明显的导光性质（波动性），而由正规光波导引出的模式概念，则是光波导理论中最基本的概念。

若光波导的折射率分布沿纵向（ $z$  向）不变，则这种光波导称为正规光波导，它的数学描述为

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(x, y)$$

这时可以证明，在正规光波导中，光场可表示为如下形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}(x, y) e^{i(\beta z - \omega t)} \quad (2-1-1)$$

这样，光场沿空间的分布可表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}(x, y) e^{i\beta z} \quad (2-1-2)$$

式中  $\beta$  为相移常数，表示光场具有波动性； $\mathbf{e}(x, y)$  与  $\mathbf{h}(x, y)$  为模式场，它表示光场  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$  沿横截面的分布，模式场是复矢量，具有方向（三维）、幅度和相位。

关于“模式场”这一术语，有些文献上称为“横场”。这个名称不够确切，因为  $\mathbf{e}, \mathbf{h}$  本身并不只存在于横截面之中，只不过它是由横向坐标所决定的，可理解为“横坐标变元的场”。称“模式场”之理由在于，只有模式才可表达成 (2-1-2) 式的形式，它是模式所固有的特征。

关于模式场存在的证明，方法有二：一是将  $\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$  分离成  $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix} f(z)$ ，然后求出  $f(z)$ ；另一种方法是将 (2-1-2) 式直接代入亥姆霍兹方程，验证其正确性。本书使用第二种方法。由亥姆霍兹方程 (1-2-1)，有

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 n^2 \mathbf{H} + \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \times (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$$

将 (2-1-2) 式代入，并考虑

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = (\nabla_t^2 \mathbf{e}) e^{i\beta z} + (-\beta^2) \mathbf{e} e^{i\beta z}$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) &= \nabla \left( \mathbf{e} e^{j\beta z} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) = \left[ \nabla \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) \right] e^{j\beta z} + \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) \nabla e^{j\beta z} \\ \nabla e^{j\beta z} &= \hat{z} j \beta e^{j\beta z} \\ \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times (\hat{z} \times \mathbf{h}) &= \hat{z} \left( \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{h} \right) - \mathbf{h} \left( \hat{z} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \right) \end{aligned}$$

于是可得

$$\left\{ \begin{aligned} [\nabla_t^2 + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{e} + \nabla_t \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\nabla_t \epsilon}{\epsilon} \right) + j\beta \hat{z} \left( \mathbf{e} \cdot \frac{\nabla_t \epsilon}{\epsilon} \right) &= 0 \quad (2-1-3a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\nabla_t^2 + (k^2 n^2 - \beta^2)] \mathbf{h} + \frac{\nabla_t \epsilon}{\epsilon} \times (\nabla_t \times \mathbf{h}) + j\beta \hat{z} \left( \mathbf{h} \cdot \frac{\nabla_t \epsilon}{\epsilon} \right) &= 0 \quad (2-1-3b) \end{aligned} \right.$$

方程组(2-1-3)是一个只有二变元( $x, y$ )的偏微分方程。根据偏微分方程理论,对于给定的边界条件,它具有无穷个离散的特征解,并可进行排序。每个特征解为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{h}_i \end{pmatrix} (x, y) e^{j\beta_i z} \quad (2-1-4)$$

于是称这个方程的一个特征解为一个模式。模式是光波导中的一个基本概念,其含义可以从几方面去理解:

① 模式是满足亥姆霍兹方程的一个特解,并满足在波导中心有界、在边界趋于无穷时为零等边界条件。这是它的数学含义。

② 一个模式,实际上是正规光波导的光场沿横截面分布的一种场图。比如图 2-1-1,就是某种光纤的一个模式。较低阶模的场图比较简单,高阶模的场图往往非常复杂。要注意由方程(2-1-3)求出的模式,只是光波导中光场的一个可能的分布形式,是否真正存在,要看激励条件。但它却是沿  $z$  方向的一个稳定的分布形式,就是说,一个模式沿纵向传输时,其场分布形式不变。

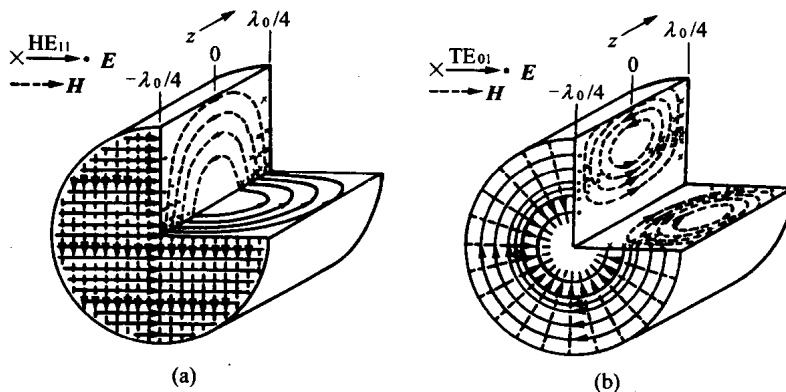


图 2-1-1 正规光波导的模式

③ 模式是有序的。因为模式是微分方程的一系列特征解,所以是离散的、可以排序的。排序的方法有两种:一种是以特征方程中分离变量的根的序号排列,由于模式场  $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}$  有两个自变量,所以有两列序号;另一种方法以  $\beta$  之大小排序,  $\beta$  越大序号越小。

④ 许多个模式的线性组合构成了光波导中总的场分布

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} a_i \mathbf{e}_i \\ b_i \mathbf{h}_i \end{pmatrix} (x, y) e^{j\beta_i z} \quad (2-1-5)$$

其中  $a_i, b_i$  是分解系数, 表示该模式的相对大小。这与信号分析中将一个任意信号可分解成基本系列信号(例如一系列正弦信号)之和一样。因此, 一系列模式可以看成是一个光波导的场分布的空间谱。

⑤ 一个模式在波导中传输最基本的物理量是它的传输常数  $\beta$ 。应注意:  $\beta$  不仅是光频的函数  $\beta = \beta(\omega)$ , 同时也是折射率分布  $\epsilon(x, y)$  的函数(泛函)。而且,  $\beta$  可以为实数, 也可能为复数。当  $\beta$  为实数时, 表明光在传输过程中只有相移, 而无衰减, 光波导相当于一个相移器; 当  $\beta$  为复数时, 表明既有相移又有衰减,  $\beta$  的虚部表示沿光波导的衰减。

## 2.2 模式场的纵向分量与横向分量的关系

三维的模式场同样可以分解为纵向分量与横向分量之和, 即有

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \mathbf{e}_t + e_z \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}_t + h_z \end{cases} \quad (2-2-1)$$

于是

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_t \\ \mathbf{E}_z \\ \mathbf{H}_t \\ \mathbf{H}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_t \\ e_z \\ \mathbf{h}_t \\ h_z \end{pmatrix} e^{j\beta z} \quad (2-2-2)$$

代入任意光波导的光场纵向分量与横向分量的关系式(1-3-2), 可得

$$\begin{cases} \nabla_t \times \mathbf{e}_t = j\omega\mu_0 \mathbf{h}_t & (2-2-3a) \\ \nabla_t \times \mathbf{h}_t = -j\omega\epsilon \mathbf{e}_t & (2-2-3b) \\ \nabla_t \times \mathbf{e}_z + j\beta \hat{z} \times \mathbf{e}_t = j\omega\mu_0 \mathbf{h}_t & (2-2-3c) \\ \nabla_t \times \mathbf{h}_z + j\beta \hat{z} \times \mathbf{h}_t = -j\omega\epsilon \mathbf{e}_t & (2-2-3d) \end{cases}$$

利用  $\nabla_t \times \mathbf{e}_z = -\hat{z} \times \nabla_t e_z$ , 上面方程组的(c)、(d)二式可改写为

$$\begin{aligned} j\beta \hat{z} \times \mathbf{e}_t - j\omega\mu_0 \mathbf{h}_t &= \hat{z} \times \nabla_t e_z \\ j\beta \hat{z} \times \mathbf{h}_t + j\omega\epsilon \mathbf{e}_t &= \hat{z} \times \nabla_t h_z \end{aligned}$$

进一步, 利用  $\hat{z} \times (\hat{z} \times \mathbf{e}_t) = -\mathbf{e}_t$  可以导出

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t = \frac{j}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \{ \omega \mu_0 \hat{z} \times \nabla_t h_z + \beta \nabla_t e_z \} & (2-2-4a) \\ \mathbf{h}_t = \frac{j}{\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2} \{ -\omega \epsilon \hat{z} \times \nabla_t e_z + \beta \nabla_t h_z \} & (2-2-4b) \end{cases}$$

由(2-2-4)式可以看出, 模式场的横向分量, 可以由纵向分量随横截面之分布唯一地确定。

现在进一步讨论模式场各分量在时间上的相位关系。相位关系表现在复矢量  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{h}_t, e_z, h_z)$  不考虑方向以外的  $e_t, h_t, e_z, h_z$  的虚实性之中。首先我们用反证法证明  $e_z$  与  $h_t$  在时间上是同相位的(参见图 2-2-1)。假定  $h_z$  超前于  $e_z$ , 根据(2-2-3a)、(2-2-3b)式可绘出  $e_t, h_t$



之相位如图所示。再用(2-2-3c)式可求出 $e'_z$ 之相位。显然 $e'_z$ 与 $e_z$ 在图中不同相,这是不可能的,故 $h_z$ 必须与 $e_z$ 同相位。从图中显而易见 $e_t$ 与 $h_t$ 反相位。同时从(2-2-4)式可以看出,若 $e_z, h_z$ 为实数,则 $e_t, h_t$ 必为纯虚数,表明纵向分量与横向分量在时间上有 $90^\circ$ 的相位差。

以上纵向分量与横向分量的相位关系,反映出只有横向分量携带功率,纵向分量只起导引作用。由于坡因廷矢量

$$\mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

从而

$$\mathbf{p} = \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_t^* + \mathbf{e}_z \times \mathbf{h}_t^* + \mathbf{e}_t \times \mathbf{h}_z^* + 0 \quad (2-2-5)$$

上式右边第一项为实数,代表传播功率,传输方向为 $\hat{z}$ 向;第二、三两项之方向均指向横向,但均为纯虚数,说明有功率在横向振动而不传输。由此说明了正规光波导具有明显的导引光能传输的性质,这和射线法得出的光在波导中按全反射原理前进的结论是一致的。

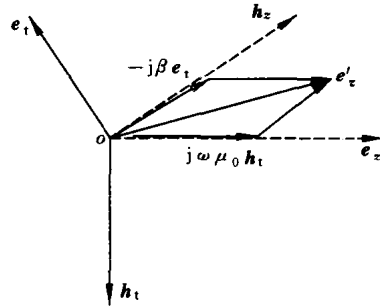


图 2-2-1 模式场各分量在时间上的相位关系

## 2.3 模式的分类

根据模式场在空间的方向特征,或者说包含纵向分量的情况,通常把模式分为三类:

- ① TEM 模:模式只有横向分量,而无纵向分量,即 $e_z=0$ 且 $h_z=0$ 。
- ② TE 模或 TM 模:模式只有一个纵向分量。对于 TE 模有 $e_z=0$ 但 $h_z \neq 0$ ;对于 TM 模有 $h_z=0$ 但 $e_z \neq 0$ 。
- ③ HE 模或 EH 模:模式的两个纵向分量均不为零,即 $h_z \neq 0$ 且 $e_z \neq 0$ 。

### 1. 光波导中不可能存在 TEM 模

我们可以证明,在光波导中不可能存在 TEM 模。这可以从公式(2-2-4)看出,当 $e_z=h_z=0$ 时,要使 $e_t, h_t$ 不为零,必须 $\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 = 0$ 。对于一个给定的模式, $\beta$ 是一个不依赖于空间坐标的常数,但在光波导中介电常数 $\epsilon$ 随空间坐标而变。可知 $\omega^2 \mu_0 \epsilon - \beta^2 \equiv 0$ 是不可能的,故不存在 TEM 模(或者说,TEM 模只存在于无限大均匀介质中)。尽管如此,有时为了分析方便,在 $|e_z| \ll |e_t|, |h_z| \ll |h_t|$ 情况下(在很多情况下是满足的),仍把某些模式当 TEM 模处理。

### 2. 对于 TE 模

由于 $e_z=0$ ,从(2-2-3c)式可得出(参见图 2-3-1)

$$\mathbf{e}_t = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \hat{z} \times \mathbf{h}_t \quad (2-3-1)$$

上式表明:① 电场与磁场的横向分量相互垂直;② 在 $e_t, h_t, \hat{z}$ 三者成右手螺旋法则的规定下, $e_t$ 与 $h_t$ 反相位(或在 $h_t, e_t, \hat{z}$ 三者成右手螺旋法则的规定下同相位),幅度大小成比例;③ 参数 $\omega \mu_0 / \beta$ 具有阻抗的量纲,定义为 TE 模的波阻抗。

### 3. 对于 TM 模

由于 $h_z=0$ ,从(2-2-3d)式可看出