1992～2002年度

全国工学硕士研究生入学考试数学试题

真题解析

边馥萍　李彩英
齐植兰　徐瀚萍　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

1992～2002年度

全国工学硕士研究生入学考试数学试题

真题解析

边馥萍　李彩英
齐植兰　徐漪萍

天津大学出版社

内容提要

本书针对1992至2001年度全国工学硕士研究生入学考试数学试题进行了重点、要点、难点分析，并附录了2002年全国攻读硕士研究生入学考试数学试题及解答．书中按考题类型分为函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程，行列式、矩阵，向量，线性方程组，矩阵的特征值和特征向量，二次型，随机事件和概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征和极限定理，数理统计等，共十五章．每章包括考试内容与重点，考题、解答及分析两部分，并在每章中分阶段做了内容与解题方法的总结．

本书既可作为参加硕士研究生入学考试的复习指导书，也可作为高等学校工科数学的教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

1992～2002年全国工学硕士研究生入学考试数学试题真题解析/边馥萍等编．—天津：天津大学出版社，2002.4

ISBN 7-5618-1571-9

Ⅰ.1…　Ⅱ.边…　Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－解题　Ⅳ.O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第016080号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨风和
地　　址　天津市卫津路92号天津大学内(邮编：300072)
电　　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　　刷　河北省永清县印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　20
字　　数　500千
版　　次　2002年4月第1版
印　　次　2002年4月第1次
印　　数　1—5 000
定　　价　26.00元

前　言

为了帮助考生全面了解硕士研究生入学的数学考试，使考生在原有数学基础上，能在理论分析与解题能力方面有进一步的提高，本书针对1992至2001年度全国工学硕士研究生入学考试数学试题进行重点、要点、难点分析，并附录了2002年全国攻读硕士研究生入学考试数学试题及解答.

高等数学、线性代数、概率论与数理统计是高等学校理、工、经、管各学科的重要基础课，也是工学、管理学、经济学硕士研究生入学考试的一门重要课程. 根据全国硕士研究生入学数学统一考试的性质和目的，数学学科的考试内容应涵盖两个“有利于”的指导思想：既有利于国家对高层次人才的选拔，又有利于高等学校各类教学课程教学质量的提高. 有利于国家对高层次人才的选拔，就是要将那些数学基础好、有发展潜力的考生选拔出来，使之进入更高层次的教育阶段学习深造；有利于高等学校各类教学课程教学质量的提高，试题的内容就要结合高等学校的教学实际，试题水平既能反映教学的实际水平，也能考查研究生新生应当具备的知识和能力. 在这两个“有利于”中，重点是有利于国家选拔高层次人才. 全国硕士研究生入学数学统一考试，引导着高等学校向培养学生应用能力的方向发展，使学生学而有用，学而会用，从而对教学质量的提高起到积极的促进作用.

全国硕士研究生入学数学考试是以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主，在此基础上加强对考生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力及综合运用所学知识解决实际问题的能力的考查. 本书按教育部制定的《2002年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，对试题进行分类，对解题思路给予分析，并给出解答；同时按试题类型及所涉及的知识，分段做了解题方法的归纳与总结. 希望考生借助本书能进一步熟悉考试模式、考题类型及深广度，掌握难点与要点，开阔解题思路，提高分析问题的能力，更好地掌握解题的方法.

本书内容分高等数学、线性代数、概率论与数理统计三篇. 按考题类型分为函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，常微分方程，行列式、矩阵，向量、线性方程组，矩阵的特征值和特征向量、二次型，随机事件和概率，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征和极限定理，数理统计共15章. 每章包含考试内容、重点及考题、解答、分析两部分. 在考题的各题号后括号内的五位数是考题代码，前两位为年度，第三位为试卷代码，后两位为分数. 例如(97303)表示1997年数学三试卷的3分题，(00108)表示2000年数学一试卷的8分题.

本书第一章至第三章由边馥萍编写，第四章至第八章由齐植兰编写，第九章至第十一章由李彩英编写，第十二章至第十五章由徐漪萍编写. 全书由齐植兰审定统稿.

本书在编写过程中，得到天津大学研究生院和天津大学出版社的关心和支持，在此，谨向他们表示诚挚的谢意.

由于编者对入学试题理解的局限性，书中难免有不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见.

编者

2001年10月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇　高　等　数　学

第一章　函数、极限、连续

一、考试内容、重点

(一)考试内容

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义以及它们的性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限　函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理).

(二)考试重点

1.复合函数和分段函数,会求分段函数的复合函数.

2.极限的概念和极限存在的充要条件,会求不同形式的极限.求极限的主要方法:

(1)利用极限的四则运算法则;

(2)利用两个重要极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$;

(3)利用等价无穷小的代换;

(4)利用夹逼定理和单调有界准则证明函数或数列极限存在,并求出极限;

(5)利用函数的连续性,求出函数的极限,或已知函数的极限值,求出函数表达式中的某些常数;

(6)利用洛必达法则;

(7)利用定积分的定义求极限;

(8)根据级数收敛的必要条件求极限.

3.讨论函数在某点的连续性,判别间断点的类型.

4.应用闭区间上连续函数的性质,证明方程根的存在.

二、考题、解答、分析

1.(01203)　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0.　　(B) 1.

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

答　(B).

分析 先求函数 $f[f(x)]$ 的表达式，再求 $f\{f[f(x)]\}$ 的表达式，要弄清定义域与函数值之间的关系.

因为 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

由 $f(x)$ 的定义，对任意的 x，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，因此有 $f[f(x)]=1$，对 $f[f(x)]$ 再复合，得

$f\{f[f(x)]\}=1, x\in(-\infty,+\infty)$.

2.(97203) 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 (D).

分析 本题将两个分段函数复合成一个函数，首先需写出以 $f(x)$ 为自变量的函数 $g[f(x)]$ 的表达式，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 的定义知，$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$；$x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$，代入 $g[f(x)]$ 的表达式，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

3.(93303) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \quad (0\leqslant x\leqslant 2)$，则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

答 (D).

分析 要求 $F(x)$，须对 $f(x)$ 进行分段积分，即根据 x 的取值范围，求解 $F(x)$.

因为 $F(x)=\int_1^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, 0\leqslant x<1$.

又 $F(x)=\int_1^x 1\mathrm{d}t=x-1, 1\leqslant x\leqslant 2,$

因此有

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

求函数的表达式是考研试题的基本题.在求分段函数的复合函数时,要弄清函数每经过一次复合后,所得复合函数的定义域和函数值之间的关系,如第1、2题.

变上(下)限积分是上(下)限的函数,当被积函数是分段函数时,积分的上、下限落在分段函数的定义域内不同部分,被积函数的表达式不同,如第3题.对变上(下)限积分需分段讨论,这是考题中的一个要点.

4.(99103) 设 $f(x)$是连续函数,$F(x)$是 $f(x)$的原函数,则

(A) 当 $f(x)$是奇函数时,$F(x)$必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$是偶函数时,$F(x)$必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$是周期函数时,$F(x)$必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$是单调增函数时,$F(x)$必是单调增函数.

答 (A).

分析 本题考查函数的奇偶性、周期性、单调性等基本概念.解本题的关键是明确原函数的概念及其变上限积分的函数表示方法.

因为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,故

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{令 u=-x}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C,$$

若 $f(x)$是奇函数,即 $f(-u)=-f(u)$,从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x).$$

因此(A)成立.对(B)、(C)、(D)均可用反例排除.令 $f(x)=x^2$,$F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 是 $f(x)$的一个原函数,故(B)不成立.令 $f(x)=\cos x+1$,$F(x)=\sin x+x+C$ 是$f(x)$的一个原函数,故(C)不成立.令 $f(x)=x$,$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ 是 $f(x)$的一个原函数,故(D)不成立.

一些有关奇、偶函数的结论可作为定理使用,应熟记,其中较重要的是:

(1)奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.

(2)两个奇(偶)函数的积必为偶函数.

(3)奇(偶)函数的导数必为偶(奇)函数.

(4)若 $f(x)$为连续的奇(偶)函数,则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad 为偶(奇)函数.$$

5.(99203) "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

答 (C).

分析 本题考查数列收敛概念,有关极限概念的考题是考试中的难点.

数列$\{x_n\}$收敛于 a 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义是"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1$".因此由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 必能推出"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$".但其逆也是正确的.因为对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right\}$,则 $\varepsilon\in(0,1)$,对此 ε,存在 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$,现取$N_1=N+1$,于是当 $n>N_1$ 时,$|x_n-a|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.可见选项(C)是正确的.

6.(98203) 设数列 x_n 与y_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散.

(B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.

(D) 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

答 (D).

分析 直接利用无穷小量的性质,可以推出(D)为正确选项.由$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,有 $x_ny_n=a_n$,其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.当 $x_n\neq0$ 时可写为 $y_n=\frac{a_n}{x_n}$.若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 为两个无穷小$\frac{1}{x_n}$与a_n 之积,故 y_n 应为无穷小.

(A)、(B)、(C)三项可用反例排除.

(A)项显然是不正确的,因为只需取数列 $y_n\equiv0$,就排除它.若取数列

$$x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

$$y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 2k, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots$$

可以排除(B)项.对于(C)项,若数列 $x_n\equiv0$,则 y_n 可以为任何数列,所以(C)项也不正确.

排除选项(B)是本题的难点,对"无界"与"无穷大"的区别要十分清楚,由前面的反例可以看出两个无界变量的乘积仍是无穷小量.要善于以反例否定某些给出的错误结论.

7.(99207) 设 $f(x)$是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots),$$

证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

分析 因为 $f(x)$非负单调减,故考虑用单调有界数列极限存在的准则证明$\{a_n\}$的极限存在,先证 $a_n\geqslant0$,再证$\{a_n\}$单调减.

证明 由题设知 $f(x)$非负单调减,

于是有 $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)$,

因此

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant 0,$$

所以数列$\{a_n\}$有下界.

又 $$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,由单调有界数列必有极限的准则知,$\{a_n\}$极限存在.

8.(98106) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

分析 解这种类型极限的题,一般有两种方法,一是用夹逼定理,二是化成积分和式的极限.本题是两种方法的结合,先用夹逼定理,也就是将所给和式放大、缩小,而后再分别将放大后与缩小后所得到的两个和式化为积分和式.本题属于难题,将放大或缩小后的和式化为积分和式是难点.

解 由于

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}.$$

即 $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},\tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi},\tag{2}$$

于是由夹逼定理知原式答案为$\dfrac{2}{\pi}$.

注 式(1)及式(2)两式为本题难点.

判别数列收敛的主要方法有:

(1)数列收敛定义.用定义判断数列收敛是考题难点,需要严密的推理,如第5、6题.

(2)单调有界准则.证明数列$\{a_n\}$有界且单调,经常要用到函数变形,如第7题中的式子

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

(3)夹逼定理.必须将所给的函数适当放大或缩小,而且要求放大或缩小的两个函数具有相同的极限,如第8题是利用定积分的和式极限计算左、右两边数列的极限值.

9.(00105) 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

分析 函数的表达式中含有绝对值符号,解题时必须求其左、右极限,并判断是否相等.

解 $$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

因此 $$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

10.(92103) 当$x\to1$时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A) 等于2. (B) 等于0. (C) 为∞. (D) 不存在但不为∞.

答 (D).

分析 解本题的关键是求函数的左、右极限.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在且不为∞.

在计算此题时,易出错的部分是对e的指数取极限,$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$,$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

11.(01203) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$____

答 $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

分析 本题为"$\dfrac{0}{0}$"型极限.采用将分子有理化、分母因式分解和消去公因式的方法解,较为简单.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{3-x-(1+x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(1-x)}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

12.(99205) 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

分析 本题为"$\dfrac{0}{0}$"型极限.解本题的关键是需先将分子有理化,而后再利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

和洛必达法则求解.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x-\sin x}{x\cdot[\ln(1+x)-x](\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x[\ln(1+x)-x]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\cos x\cdot[\ln(1+x)-x]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\dfrac{-x}{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

13.(99103) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$______.

答 $\dfrac{1}{3}$.

分析　本题为"$\infty-\infty$"型极限.将$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}$通分,再取极限得$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$,用$x$代换分母中的$\tan x$,再用洛必达法则.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

14.(98103) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______.

答 $-\dfrac{1}{4}$.

分析　本题为"$\dfrac{0}{0}$"型极限,有两种解法,一是用洛必达法则,二是用泰勒公式展开式解.

解法一　由洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}},\tag{1}$$

对式(1)将分子有理化,得

$$\lim_{x\to0}\frac{1-x-(1+x)}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}[\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}]}=-\frac{1}{4}.$$

对式(1)也可以先将分母$4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}$取极限,再将其余部分$\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$使用洛必达法则,则有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

解法二 将分子中的$\sqrt{1-x}$和$\sqrt{1+x}$分别用泰勒公式展开，即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

注 解法二比解法一简便，在使用泰勒公式时，需将$\sqrt{1+x}$和$\sqrt{1-x}$展开至2阶，将x^2项展示出来，因为分母是x^2项．切勿对分子使用$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\sqrt{1-x}-1\sim-\frac{1}{2}x$等价无穷小代换，因为分子各项之间是代数和的关系．

15.(98406) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$为正整数）．

分析 本题为整型幂指函数取极限．求幂指函数的极限常采用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，因此解本题的关键是将其化为上述极限形式，再利用洛必达法则求出指数的极限．

解 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}}\right]^{\frac{\tan x-x}{x^3}},$$

其中 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

故 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

取 $x=\frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}.$$

16.(93105) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$．

分析 本题是幂指函数取极限，“1^∞”型．求幂指函数的极限，除了将其化为重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$形式外，还可以采用取指数、再取对数的方法，将幂指函数化为指数函数，再利用洛必达法则求极限．

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}}=e^2.$$

17.(94405) 设函数$f(x)$可导，且$f(0)=0$，

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t,$$

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

分析 因为$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$,故所求极限为"$\dfrac{0}{0}$"型,可利用洛必达法则求之.但 $F(x)$是变上限积分函数,且被积函数中含有自变量 x,因此,需先作变换将其化为被积函数仅含积分变量的函数,这一步是本题的难点,也是关键的一步.

解 令 $u=x^n-t^n$,则 $F(x)=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$,有

$$F'(x)=x^{n-1}f(x^n),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

应用洛必达法则求极限应注意以下几点:

(1)对"$\dfrac{0}{0}$"、"$\dfrac{\infty}{\infty}$"、"1^{∞}"、"$\infty-\infty$","∞^0","0^0","$0\cdot\infty$"型的极限,可以用洛必达法则求解.

(2)有些"$\dfrac{0}{0}$"型极限,如果采用分子(或分母)有理化,消去公因式方法解,比用洛必达法则求解更为简便,如第 11 题.

(3)有些"$\dfrac{0}{0}$"型极限,如果采用分子有理化与洛必达法则方法相结合求解,比开始就用洛必达法则求解计算简便,如第 12 题.

(4)某些题型如果先用等价无穷小代换,再用洛必达法则,则极大地简化了计算,如第 13 题,通分后,用 x 代换分母中的 $\tan x$,再用洛必达法则.

(5)用泰勒公式展开式代入极限式的解法比用洛必达法则更简便,如第 14 题,使用泰勒公式展开式时,要注意展开阶数.

(6)用洛必达法则求整型变量函数 $f(n)$,当 $n\to\infty$时的极限,必须先将整型变量 n 换为连续型变量x,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,如第 15 题.

(7)注意洛必达法则的条件,在求"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限时,分子、分母应满足可导条件.第 17 题给出的"$f(x)$可导"这一条件比较强,若将此条件减弱为"$f(x)$连续且在 $x=0$ 点导数存在",也可以求出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$,只是解法的最后一步不能再使用洛必达法则.

18.(93503) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$______.

答 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

分析 利用数列求和公式,简化数列的表达形式,再利用分子有理化的方法求极限.

$$\lim_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{(n-1)n}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

19.(93403) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=$______.

答 $\frac{6}{5}$.

分析 本题有两种解法,一是令 $y=\frac{1}{x}$,进行倒数变换,然后再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 求解,二是直接利用等价无穷小代换,当 $x\to\infty$ 时,$\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$.

解法一 令 $y=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{y\to0}\frac{3\frac{1}{y^2}+5}{5\frac{1}{y}+3}\sin 2y=\lim_{y\to0}\frac{3+5y^2}{5y+3y^2}\sin 2y$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{3+5y^2}{5+3y}\frac{\sin 2y}{y}=\frac{6}{5}.$$

解法二 因为 $x\to\infty$ 时,$\sin\frac{2}{x}\sim\frac{2}{x}$,因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\frac{2}{x}=\frac{6}{5}.$$

利用等价无穷小代换求极限应注意以下两点:

(1)利用等价无穷小代换求极限,可以简化计算,但应注意:等价无穷小代换可以用于乘除运算的各因式,而不能随意用于和差运算.

(2)应熟记 $x\to0$ 时,某些等价无穷小量,如 $\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$,$\sqrt{1-x}-1\sim\frac{x}{2}$,$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ 等.

20.(00203) 若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0. (B) 6. (C) 36. (D) ∞.

答 (C).

分析 本题是已知函数极限值为0,通过已知函数的极限,求另一函数的极限.解本题的关键是将函数 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}$ 变形,分解出 $\frac{6+f(x)}{x^2}$ 部分,而后再求极限,解法如下.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

而 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6\cos 6x-6}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2[\cos 6x-1]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-6\sin 6x}{x}=-36,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36.$

21.(98205) 确定常数 a、b、c 的值,使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c \quad (c\neq 0).$$

分析 由题设知当 $x\to 0$ 时,函数 $\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}$ 的极限存在且不为零,而其分子 $ax-\sin x\to 0$,故其分母 $\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t$ 必趋于 0,否则,必有 $c=0$,与已知矛盾.在 $\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t$ 中,b 必为 0,确定 b 之后,再由洛必达法则确定 a、c 值.本题的难点是确定 b 值.

解 由于 $x\to 0$ 时,$ax-\sin x\to 0$,而

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\neq 0$,则必有 $b=0$.如若不然,若 $b>0$,在 $(0,b]$ 内 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$,若 $b<0$,要使函数 $\ln(1+b^3)$ 有意义,应有 $b^3>-1$,故在 $[b,0)$ 内 $\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}>0$,使得 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\neq 0$,原极限值必为 0,与已知矛盾,故 $b=0$,将 $b=0$ 代入原式,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}. \tag{1}$$

在式(1)中,必有 $a=1$,否则原式结果必为 ∞,将 $a=1$ 代入式(1),有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}=c.$$

在解该题时,若开始就使用洛必达法则,仍可求得 $a=1$,$c=\dfrac{1}{2}$;但这是不正确的,因为若不首先确定 b 的值,所给极限不一定是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式.

第 20、21 题是已知函数极限值,求解另一函数的极限或确定某些待定常数.解题思路是根据:

(1)极限运算法则:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B$.

(2)“$\dfrac{0}{0}$”型未定式,由分子(或分母)趋于零,断定分母(或分子)也必趋于零,从中解出待定常数.

22.(99203) 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$