离散数学

Discrete Mathematics

同济大学应用数学系《离散数学》编写组 编

同济大学出版社

离 散 数 学

同济大学应用数学系《离散数学》编写组编

同济大学出版社

内容提要

本书是计算机科学与技术专业的骨干基础课程——离散数学的教学用书。全书共四部分，主要介绍数理逻辑、集合论、代数结构和图论的基础内容。其特点为叙述严谨，重点突出，深入浅出，便于自学，各章都配有相当的典型例题与习题。本书可以作为高等学校计算机科学与技术及其相关专业的离散数学教材，也可供计算机方面的自学考试人员、科研人员及其相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/同济大学应用数学系《离散数学》编写组编.
上海:同济大学出版社,2003.2

ISBN 7-5608-2543-5

Ⅰ.离… Ⅱ.同… Ⅲ.离散数学－高等学校－教材
Ⅳ.0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 098643 号

离散数学

同济大学应用数学系《离散数学》编写组编

策划 吴凤萍 责任编辑 许纪森 责任校对 郁 峰 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 14

字 数 280000

印 数 1—3000

版 次 2003 年 2 月第一版 2003 年 2 月第一次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2543-5/O·227

定 价 19.80 元

前　　言

离散数学是研究有关离散量问题的数学理论，是现代数学的一个重要分支。由于计算机科学的各个领域中都广泛存在着有关离散量的理论问题，所以离散数学现在已经成为计算机科学与技术的理论基础和有力工具；另一方面，正是计算机科学提出的大量离散量问题促进了离散数学的深入发展。计算机科学与离散数学的这种紧密互动发展存在于从计算机的诞生到它今天蓬勃发展的全过程中。

离散数学现在已是计算机科学与技术专业的骨干基础课程。一方面，它为有关专业课，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库、信息管理系统、人工智能、形式语言等，提供必要的数学基础，另一方面，通过离散数学的学习，可以培养学生的逻辑思维与抽象思维的能力，更好地达到素质教育的目的。

离散数学涉及的内容非常广泛，不同的作者往往有不同的选材内容。本书主要介绍数理逻辑、集合论、代数结构和图论四个部分的基础内容，这也是现在大多数离散数学教材所选的内容。在编写过程中，我们力求做到如下几点：

(1) 叙述严谨，重点突出，深入浅出，便于自学。

(2) 对一些定理，特别是谓词逻辑部分的定理，我们只给出对定理的理解和准确应用，放弃了其严格而冗长的证明。教学实践证明，在此阶段过多地纠缠于此，反而不利于培养学生的能力，我们希望读者能形成用不知其证明但已知其正确的结果来推出新结论的能力。

(3) 书中的各章都配有相当的典型例题与习题，希望以此培养提高学生运用基础理论来分析问题、解决问题的能力。

(4) 全书共四部分，各部分基本上独立成篇，可以根据需要单独选讲。篇与篇之间的符号与术语是统一的，通过一定的联系成为有机的整体。讲授全书大约需要108学时。

本书是在我们多年教学实践的基础上，参考了许多国内外的教材而写成的。我们对这些教材的作者们表示衷心感谢！第一篇和第五章由方小春、朱英浩编写，第三篇和第三章由靳全勤、蒋志洪编写，第四篇和第四章由胡志庠、吴群编写。方小春做了总体策划与协调工作，方小春、靳全勤、胡志庠对全书做了最后的总纂。

在本书的写作过程中，作者得到了数学系很多老师如邵嘉裕教授、邱伯驺教授、叶家琛教授、郭镜明教授、徐建平副教授、蒋凤瑛副教授等的帮助和建议，同济大学出版社为本书的出版做了大量工作，在此对他们表示诚挚的感谢！

限于作者的水平，书中不当甚至错误之处在所难免，诚恳期待广大读者提出宝贵意见。

作　者

2002年10月于同济园

目 录

第三篇 代数结构

第四篇 图论

第一篇　数理逻辑

研究人的思维形式和规律的科学，称为逻辑学。数理逻辑是逻辑学的一个分支，它是用数学方法来研究思维形式及其规律的一门边缘学科。所谓数学方法，就是用一些数学符号来代表和描述思维形式的逻辑结构及其规律，通过对数学符号的研究，得到逻辑推理中前提与结论之间的形式关系。

数理逻辑是由德国数学家莱布尼兹(G. W. Leibnitz)于 17 世纪中叶创立的，其后，英国数学家布尔(G. Boole)、德国数学家弗雷格(F. L. G. Frege)、美国数学家哥德尔(K. Godel)分别引进了布尔代数、量词与约束变元、完全性定理的证明，使数理逻辑得到了完善。意大利数学家皮亚诺(G. Peano)、英国数学家德・摩根(A. DeMorgen)、罗素(B. A. W. Russell)等人也作出了很大贡献。

数理逻辑是计算机科学与技术的基础理论之一，它包括逻辑演算、证明论、公理集合论、模型论和递归论。本篇只介绍逻辑演算中的命题逻辑和(一阶)谓词逻辑。

第一章　命题与逻辑

命题逻辑是以命题为基本单位，研究由前提条件推出结论的有效性。

1.1　命题与联结词

一、命题与标识符

所谓命题，就是有真假意义的陈述语句，它有两个关键要素：

(1)在语法上，命题必须是陈述语句。

(2)命题必须有确定的真假意义，要么为真，要么为假，二者必居且只居其一。

例 1.1.1　分析下面自然语句哪些是命题：

(1) 你好吗？

(2) 多好的天气呀！

(3) 我明年是大学三年级学生。

(4) 外星上有生命。

(5) $x \geqslant 1$。

(6) 我正在说的是谎话。

解 (1),(2)不是陈述语句,所以不是命题。(3)是命题,虽然结果现在不知道,但明年就知道了,所以有确定的真、假值。(4)是命题,现在虽难以确定真假,但其真假本质上是确定的。(5)不是命题,但是给 x 一个值时,它就是一个命题,所以是一组命题中的任意一个。(6)不是命题,因为它没有确定的真、假值,是一个悖论。

一个命题的真或假,称为命题的真值。真用 1 或 T 表示,假用 0 或 F 表示。在命题逻辑理论里,我们只关心命题的真值,只有在应用中才关心命题的具体内容。

在现实生活中,我们常常使用自然语言作一些逻辑推理,由一些已知条件推出结论,即从假设一些命题为真(命题本身是否真的为真暂且勿论)出发得出一个命题为真。数理逻辑就是用数学方法来研究这种推理规律。由于自然语言易产生歧义性,所以就需要引进一些目标语言(由一定的符号按一定的规则组成)并将命题符号化。首先,一般地用大写字母或带有下标的大写字母,例 P, Q, R, P_i, Q_i, R_i等来表示命题。例如,P:2+2=5 指命题“2+2=5”的标识符为“P”。

一个具体的命题称为命题常量,命题标识符也可用来标识一组命题的任一个(例 P:$x \geqslant 1$)或干脆仅表示任一个命题的所在位置,此时称此命题标识符为命题变量(或命题变元)。命题变量不是命题。将一个命题变量 P 用一个具体命题来代替,它才有确定的真值。这一过程叫对 P 的指派,这一真值记为 $S(P)$。

二、命题联结词

命题符号化不仅需要对命题给以标识符,还要将自然语言中的联结词符号化。命题逻辑中的联结词就是命题集上的一些运算,它是自然语言中对应联结词的抽象。

定义 1.1.1 设 P 为命题,定义“$\neg P$”为一个命题,其真值为:当 P 为真时,$\neg P$ 为假;当 P 为假时,$\neg P$ 为真。称 $\neg P$ 为 P 的否定式,读作“非 P”,其中“$\neg$”称作否定联结词。由于 $\neg$ 只是联系一个命题,故而 $\neg$ 为一个一元联结词。“$\neg P$”的真值如表 1.1.1 所示。

表 1.1.1

P	$\neg P$
0	1
1	0

在自然语言中,对应于 $\neg$ 的联结词为否定词“非”、“不”等。

例 1.1.2 P:李明大于 20 岁,则 $\neg P$:李明不大于 20 岁。若李明为 21 岁,则“李

明大于 20 岁”为真，而“李明不大于 20 岁”为假。若李明为 20 岁，则“李明大于 20 岁”为假，而“李明不大于 20 岁”为真。这正与 $\neg P$ 的定义相符合。

定义 1.1.2　设 P 和 Q 为命题，定义“$P\wedge Q$”为一个命题，其真值为：当 P 和 Q 都为真时，$P\wedge Q$ 为真；其余情形，$P\wedge Q$ 为假。称 $P\wedge Q$ 为 P 与 Q 的合取式，读作“P 合取 Q”，其中“$\wedge$”称作合取联结词。由于 $\wedge$ 联系两个命题，故而 $\wedge$ 为一个二元联结词。另外，显然它还是对称的（即 $P\wedge Q$ 与 $Q\wedge P$ 的真值是一样的）。“$P\wedge Q$”的真值如表 1.1.2 所示。

表 1.1.2

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\wedge$ 有时也叫做布尔乘，“$P\wedge Q$”的真值恰好是 P 的真值与 Q 的真值在通常二进制意义下的相乘。

在自然语言中，对应于 $\wedge$ 的是“并且”、“既……又……”、“和”、“与”等联结词。

例 1.1.3　P：李明会唱歌，Q：李明会跳舞，则 $P\wedge Q$：李明既会唱歌又会跳舞。显然只有在“李明会唱歌”和“李明会跳舞”都对时，“李明既会唱歌又会跳舞”才对。这与 $P\wedge Q$ 的定义是相符合的。

注　需要特别指出的是，在自然语言中，P 和 Q 所代表的两个命题总是有关系的。不相关的两命题用联结词连起来往往没有意义。但在数理逻辑的目标语言中，$P\wedge Q$ 是有确定的定义，因而总是有意义的。例如，P：李明会唱歌，Q：天在下雨，“李明会唱歌而且天在下雨”没有什么意义，但 $P\wedge Q$ 有确定的真值。这一点在以下介绍的三个二元联结词中也同样地存在，特别是在下面的条件与双条件联结词中表现得会更加明显，我们不再多叙了。

定义 1.1.3　设 P 和 Q 为命题，定义“$P\vee Q$”为一个命题，其真值为：当 P 和 Q 都为假时，$P\vee Q$ 为假；其余情形，$P\vee Q$ 为真。称 $P\vee Q$ 为 P 与 Q 的析取式，读作“P 析取 Q”，其中“$\vee$”称作析取联结词。显然，$\vee$ 为一个对称的二元联结词。$\vee$ 有时也叫做布尔加，但它不是通常意义的二进制加法。“$P\vee Q$”的真值如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

在自然语言中,对应于$\vee$的联结词是“或者”。

例 1.1.4 P:李明是大学生,Q:李明是歌手,则 $P \vee Q$:李明是大学生或者是歌手。显然只有在“李明是大学生”和“李明是歌手”都假时,“李明是大学生或者是歌手”才假,这与 $P \vee Q$ 的定义是相符合的。

上面自然语言中的“或者”联结的两个命题是可以都为真的,它不意味着所联结的两个命题彼此对应,所以叫可兼或,$\vee$ 对应的正是这个可兼或。在自然语言中,“或者”还可以联结不可能同时为真的两个命题,它还意味着所联结的两个命题彼此对应,此时的“或者”叫“不可兼或(异或)”,它不是$\vee$所对应的联结词。

例 1.1.5 P:现在李明在北京,Q:现在李明在上海,R:现在李明在北京或者在上海。

显然,当 P 真 Q 假或 P 假 Q 真时,R 真;当 P,Q 都假时,R 假。由于李明在上海就不可能在北京,在北京就不可能在上海,所以 R 中“或者”是不可兼或,它隐含着李明不能既在上海又在北京,所以当 P,Q 都为真时,R 为假。这与 $P \vee Q$ 的定义是不一致的。我们在 1.4 节中会看到“不可兼或”就是联结词“双条件非”,是二进制加。

定义 1.1.4 设 P 和 Q 为命题,定义“$P \rightarrow Q$”为一个命题,其真值为:当 P 真 Q 假时,$P \rightarrow Q$ 为假;其余情形,$P \rightarrow Q$ 为真。称 $P \rightarrow Q$ 为 P 与 Q 的条件式,读作“P 条件 Q”,或“若 P 则 Q”,称 P 和 Q 分别为 $P \rightarrow Q$ 的前件和后件,“$\rightarrow$”称为条件联结词。

显然,$\rightarrow$为一个非对称的二元联结词,“$P \rightarrow Q$”的真值如表 1.1.4 所示。

表 1.1.4

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在自然语言中,对应于$\rightarrow$的联结词是“如果……,那么……”、“若……,则……”、“只要……,就……”等。

例 1.1.6　李明在商店买电脑时，店方承诺：如果在正常使用下，第一年内修理达到 4 次，那么，店方负责换成新电脑。已知李明一直在正常使用电脑，试问在什么情况下，店方没有履行承诺。

解　可能存在以下四种情况：

(1) 第一年内修理达到了 4 次；店方也负责换成了新电脑。

(2) 第一年内修理达到了 4 次；店方没有负责换成新电脑。

(3) 第一年内修理没有达到 4 次；店方也负责换成了新电脑。

(4) 第一年内修理没有达到 4 次；店方没有负责换成新电脑。

很明显，只有在(2)的情况下，店方才没有履行承诺。令：P：在正常使用下第一年内修理达到了 4 次，Q：店方负责换成新电脑，R：在正常使用下，如果第一年修理达到了 4 次，那么，店方负责换成新电脑。显然，R 的真值列表与 $P\to Q$ 的真值列表是相同的。

定义 1.1.5　设 P 和 Q 为命题，定义“$P\leftrightarrow Q$”为一个命题，其真值为：当 P，Q 同真同假时，$P\leftrightarrow Q$ 为真；其余情况 $P\leftrightarrow Q$ 为假。称 $P\leftrightarrow Q$ 为 P 与 Q 的双条件式，读作“P 双条件 Q”或“P 当且仅当 Q”。“$\leftrightarrow$”称为双条件联结词。显然“$\leftrightarrow$”为一个对称的二元联结词，“$P\leftrightarrow Q$”的真值如表 1.1.5 所示。

表 1.1.5

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，对应于$\leftrightarrow$的联结词是“当且仅当”。它虽然不是日常用语，但它作为现代逻辑所创造的联结词，书面上应用还较普遍。

例 1.1.7　P：今天的体育课照常上课；Q：今天不下雨，则 $P\leftrightarrow Q$：今天体育课照常上课当且仅当今天不下雨。

三、命题类型

定义 1.1.6　一个命题如果是由联结词和另外一个或几个命题所组成，则称为复合命题。判断复合命题的关键是它是否含有联结词。不是复合命题的命题叫简单

命题或原子命题。

在自然语言中，表示某一判断的原子命题往往都可以写成表达同一判断的复合命题。例 P:李明是学生;Q:李明并非不是学生，前者是原子命题，后者是复合命题。

在逻辑推理中，如果只能将命题分解到原子命题为止，这种以原子命题为最小单位的逻辑体系，称为命题逻辑。

1.2　命题公式，真值表与命题符号化

一、命题公式

上一节讲了命题标识符与联结词的符号化。在自然语言中，总可以用一些命题与联结词构成一些复杂的新的复合命题，为了在目标语言中符号化这些复合命题，我们引进命题合式公式(简称为命题公式)的概念。下面给出它的归纳法定义。

定义 1.2.1

(1) 0,1 和命题变元是命题公式。

(2) 如果 A,B 是命题公式，那么，$(\neg A)$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$为命题公式。

(3) C 为命题公式当且仅当 C 为有限次使用(1)，(2)所产生的字符串。

例 1.2.1

(1)符号串$((P\wedge Q)\leftrightarrow((\neg P)\wedge(\neg(Q\vee R))))$，$(((P\vee R)\wedge Q)\rightarrow \neg P)$都是命题。

(2)符号串 $P\wedge(Q;(P\wedge Q)\rightarrow;P\vee(\leftrightarrow R))$都不是命题。

注　(1) 命题公式本身不是命题，只有对公式中每个命题变元进行指派后它才是个命题，也只有这时才有确定的真值。

(2) 定义 1.2.1 中 A,B,C 是元语言的符号，它表示一个命题公式。所谓元语言，是指用来描述目标语言的语言。这点有些类似于 C 语言理论的情形，C 语言是一种目标语言，命题逻辑目标语言中的命题公式类似于 C 语言中的表达式。

(3) 为了省略命题公式中的一些括号，作出如下一些约定：

① 公式最外层的圆括号可省略。例$(P\wedge Q)\leftrightarrow((\neg P)\wedge(\neg(Q\vee R)))$。

② $\neg$ 只作用于邻接的命题变元或括号上。例$(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg(Q\vee R))$。

③ 逻辑联结词的优先级由强到弱依次是：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$。例 $P\wedge Q\leftrightarrow\neg P\wedge\neg(Q\vee R)$。

尽管如此，为了提高可读性，有时多加一些括号往往还是有益的，尤其在需要确定$\wedge$和$\vee$，$\rightarrow$和$\leftrightarrow$的优先级时。

每个命题公式都是由有限个命题变元、联结词和括号组成的。设 A 为一个命题

公式，如果 A 中含有的所有的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n\geqslant1)$，那么，记 $A=A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，并称 A 为 n 元命题公式。规定 0 元命题公式只有 0 和 1。

二、真值表

定义 1.2.2　设 A 为 n 元命题公式，$A=A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。给每个 P_i 一个确定的真值，得到 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一组真值，称此过程为 A（关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$）的一组真值指派。此时将每个 P_i 所给定的真值分别代入 A 中，得到 A 的一个真值，称之为 A 在此真值指派下的取值。如果 A 的取值为 1（或 0），那么称此真值指派为使 A 成真（或成假）的真值指派。显然，n 元命题公式共有 2^n 个不同的真值指派。

给每个 P_i 一个指派（即一个确定的命题），称此过程为 A（关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$）的一个指派，记为 S。此时 A 也为一个命题，称之为 A 在此指派下的取值。因为每个命题都有确定的真值，所以就得到 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一组真值，记为 $S(P_1),S(P_2),\cdots,S(P_n)$，和 A 的真值，记为 $S(A)$。显然 $S(A)$ 只依赖于真值 $S(P_1),S(P_2),\cdots,S(P_n)$，而与具体给每个 P_i 所指派的命题的内容无关。即任意两个 A 的指派 S_1 和 S_2，只要 $S_1(P_i)=S_2(P_i)\ (i=1,2,\cdots,n)$，就有 $S_1(A)=S_2(A)$。若 $S(A)=1$，则称 S 为成真指派，否则称为成假指派。

因为命题逻辑只关心命题公式的取值情况，所以真值指派是主要的，一般地只有在命题逻辑的应用中才用到指派。

设 $B=B(P_1,P_2,\cdots,P_m)(m\geqslant n)$，那么 B（关于 $P_1,P_2,\cdots,P_m$）的一组真值指派也给出了 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一组真值，即得到了 A 的（关于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$）的一组真值指派。习惯上，B 的一组真值指派也称为 A 的一组真值指派。显然，由 B 的所有真值指派可以得到 A 的所有真值指派。

定义 1.2.3　将 n 元命题公式 $A=A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 的所有可能的真值指派以及在这些真值指派下 A 的对应的不同的真值绘制成表，称此表为 A 的真值表。

n 元命题公式 A 的真值表构成如下：

(1) 表的左边第 1 行为 n 个命题变元的标识符，右边第 1 行为命题公式 A。

(2) 表的左边第 2 行到第 2^n+1 行分别为 2^n 组 A 的不同的真值指派。取按 n 位二进数的从小到大或从大到小次序排列。

(3) 表的右边第 2 行到第 2^n+1 行分别为 A 在同行左边这组真值指派下的真值。

注　设 $B=B(P_1,P_2,\cdots,P_m)(m\geqslant n)$，有时为了方便地比较 A 和 B，将 A 的真值表改写成 2^m+1 行。其中左边第一行改写成命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_m$，左边第 2 行到第 2^m+1 行分别改写为 2^m 组 B 的不同的真值指派。右边第 1 行仍为命题公式 A，右边第 2 行到第 2^m+1 行分别改写为 A 在同行左边这组真值指派下的真值。这样改写的表格称为 A 关于 B 中命题变元的真值表。

例 1.2.2　求 $\neg P \vee Q$ 的真值表。

表 1.2.1

P　Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
0　0	1	1
0　1	1	1
1　0	0	0
1　1	0	1

删除掉上表中 $\neg P$ 所在的列，得到的新表就是 $\neg P \vee Q$ 的真值表。但在具体计算时，为使计算过程明晰，我们宁愿写成上面的形状，而不删除掉 $\neg P$ 所在的列。

因为 n 元命题公式共有 2^n 个不同的真值指派，所以所有 n 元命题公式的全部真值表共有 2^{2^n} 个。

三、命题符号化

我们已叙述过命题的标识符和联结词的符号化。把一个表示判断的自然语言中的句子（简称自然语句）写成一个由命题标识符、联结词和圆括号所组成的命题公式，使得这一命题公式在对应的指派下所得到的命题与原自然语句表达相同的逻辑关系，这一过程叫做命题符号化。命题符号化是命题逻辑应用中的重要环节。

一般命题符号化采用以下几个步骤：

（1）确认自然语句是个命题。

（2）将自然语句中包含的一些原子命题分离出来，并将它们符号化。

（3）根据自然语句中的逻辑关系，选用适当的联结词（有时它们就出现在句子中），再符号化它们和整个句子。

例 1.2.3　将下列命题符号化。

（1）李明虽然学习很忙，但还是参加了学校志愿者。

（2）如果你躺着看书，那么你的视力会受到伤害的。

（3）除非天气冷，否则他不会穿大衣的。

（4）除非他邀请我，我才去他家。

（5）只有地球上有空气，人类才能生存。

（6）只要你努力，你就会成功。

解

（1）符号化为 $P \wedge Q$，其中 P：李明学习忙，Q：李明参加了学校志愿者。

（2）符号化为 $P \wedge Q \rightarrow R$，其中 P：你躺着，Q：你看书，R：你的视力会受伤害。

（3）符号化为 $\neg P \rightarrow Q$，其中 P：天气冷，Q：他不会穿大衣。

(4) 符号化为 $Q\to P$，其中 P：他邀请我，Q：我去他家。

(5) 符号化为 $Q\to P$，其中 P：地球上有空气，Q：人类能生存。

(6) 符号化为 $P\to Q$，其中 P：你努力，Q：你会成功。

注　(1) 仔细考虑上面每一句在不同情形下(对应不同的 P,Q,R 取值，即不同的真值指派)的真假，会发现它与符号化它的命题公式在对应真值指派下的真值是相一致的，因而其符号化是正确的，这也是一种验证方法。

(2) 上面这些自然语言中联结词的翻译是标准的，读者记住这些是有益的。另外，不是所有的自然语言中的联结词都是可以翻译的，例如"促使"就不能翻译。

(3) 命题符号化仅保留了自然语句中的逻辑关系，至于自然语句中所表达的情感、修饰等词语都在翻译过程中被放弃了。另外，同一自然语句也可能因强调的不同而有不同的翻译，甚至可能由于对自然语句理解上的歧义而有不等价的翻译。

1.3　命题公式的等价关系和蕴涵关系

由命题公式的定义可知道，对任意的自然数 $n>0$，有无穷多个 n 元命题公式。但是所有 n 元命题公式的全部真值表只有 2^{2^n} 个，所以有许多不同形式的命题公式都具有相同的真值表。我们在本节主要研究命题公式之间的关系。

一、公式分类

定义 1.3.1　设 A 为一个命题公式，如果 A 在任一组真值指派下的值都为 1，那么 A 称为重言式或永真式。如果 A 在任一组真值指派下的值都为 0，那么 A 称为矛盾式或永假式。特别地，公式 1 为重言式，公式 0 为矛盾式。如果 A 至少在某一组真值指派下的值为 1，那么 A 称为可满足式。

三种公式类型之间的关系为：

(1) A 为重言式当且仅当 $\neg A$ 为矛盾式，A 为矛盾式当且仅当 $\neg A$ 为重言式。

(2) 重言式是可满足式，A 为可满足式当且仅当 A 不为矛盾式。

(3) A 为重言式(或矛盾式)当且仅当 A 的真值表的右边(即 A 所在的列)的真值都为 1(或 0)。

由(3)可知，判断一个命题公式的类型总可以用真值表来做的。

定理 1.3.1　设 A 和 B 为命题公式，那么

(1) A 和 B 为重言式的充要条件是 $A\land B$ 为重言式。

(2) 如果 A 为重言式，那么 $A\lor B$ 为重言式。

证明　利用定义立即得到。

类似地可得有关矛盾式的结论。