公路桥梁设计电算

上

(桥梁电算基础)

陆 楸 编

人民交通出版社

下1

公路桥梁设计电算

上

（桥梁电算基础）

陆 楸 编

人民交通出版社

公路桥梁设计电算

上

（桥梁电算基础）

陆 楸 编

人民交通出版社出版

（北京市安定门外和平里）

北京市书刊出版业营业许可证出字第006号

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：6.5 插页：1 字数：138千

1980年11月 第1版

1980年11月 第1版 第1次印刷

印数：0001—3,600册 定价：1.05元

引　言

广泛而有效地使用电子计算机是现代化的重要标志，也是桥梁设计计算现代化的根本途径。我国自70年代开始，在桥梁设计中比较广泛地采用电算技术，已取得显著效果。目前在一系列大跨径预应力混凝土新桥型设计计算中，在大量重复计算的标准设计中，都程度不同地采用了电算。其优越性已逐渐得到公认。例如：我们在TQ-16机上采用“桥梁上部构造综合计算”程序进行4×40米连续梁桥技术设计，从反映实际体系形成过程之分阶段作用的自重、预加力（包括二次内力）、收缩徐变内力重分布、内力和位移影响线、自动加载求活载最不利组合，直至各控制截面的最大、最小应力都可由电子计算机一次完成，历时一小时三十分左右。又如常用的钢筋混凝土或预应力混凝土简支梁桥，从按有限条法进行空间计算，自动配筋直至各截面的强度、应力、变形等各项验算一次完成，不过几分钟至十几分钟。再如进行U台标准设计，按手算常规方法编写的程序计算一个桥台只需4秒钟左右。仅此几例就足以说明电子计算机的巨大威力及其在桥梁设计现代化进程中的重要作用了。

为了适应我国公路桥梁建设事业的发展，加速桥梁设计的现代化，由交通部公路规划设计院，交通部第一、第二公路勘察设计院，北京市政设计院，北京计算中心，同济大学，北京建筑工程学院，北京工业大学，上海市政设计院，上海市政设计研究所，重庆建筑工程学院等单位组成的“公

路桥梁电算程序会战组”编制了桥梁上部构造、墩台和基础等共十二项大型电算程序，现已投入使用。这些程序具有功能大、通用性强、自动化程度较高以及采用了比较先进的理论和方法等特点。它们的配套使用，将可使常用桥型的大部分计算工作量由电子计算机完成。本书将系统介绍这十二项程序的功能、编制原理、程序框图、使用说明以及计算示例。其中几个重点程序还将给出源程序及注释。全书分为“桥梁电算基础”、“桥梁上部构造电算”以及“桥梁墩台基础电算”共上、中、下三册，陆续出版。

本册分为矩阵代数初步，平面杆系的矩阵位移法，有限单元法原理，算法语言简介以及程序实例共五章。本册作为学习桥梁设计电算的入门书籍，取材力求精练，切合实际，以期通过本册的学习，了解近代桥梁结构计算的一些方法和趋向，掌握桥梁电算的基本知识，为进一步阅读中、下册以及使用“公路桥梁电算会战组”编制的十二项大型程序打下基础。对于桥梁电算中的一些专题，例如桥梁空间计算的有限条法，比拟斜板的有限单元法，桥梁自动加载的动态规划法，钢筋混凝土组合截面的应力叠加等等均将在中、下册中结合各个程序分别介绍。

本册承顾鑒暄、戚瑞华同志详细校阅全文，谨此表示衷心感谢。

目　录

第一章　矩阵代数初步

学习有限单元法的应用只涉及少量矩阵代数概念，因而作为工程技术人员并无必要专门学习矩阵代数专著，重要的是深刻理解矩阵及其基本运算的物理意义，从而在解决实际工程问题时能灵活应用。这就是本章选材的出发点。

§1-1　矩阵的定义和种类

1-1.1　概念的引出

用力法求解一次超静定梁，由图 1-1 建立赘余力 X 的准则方程——线性代数方程为*：

$$\delta X = \Delta \tag{1-1}$$

用力法求解图 1-2 所示无铰拱，则关于超静定赘余力 X_1、X_2、X_3 的准则方程组——线性代数方程组为：

$$\left\{\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= \Delta_1 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= \Delta_2 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= \Delta_3 \end{aligned}\right. \tag{1-2}$$

当需要求解两种荷载形式时，则式 1-2 应分别写为：

$$\left\{\begin{aligned} \delta_{11}X_{11} + \delta_{12}X_{21} + \delta_{13}X_{31} &= \Delta_{11} \\ \delta_{21}X_{11} + \delta_{22}X_{21} + \delta_{23}X_{31} &= \Delta_{21} \\ \delta_{31}X_{11} + \delta_{32}X_{21} + \delta_{33}X_{31} &= \Delta_{31} \end{aligned}\right. \tag{1-3}$$

---

* 为便于论述，在图 1-1 及 1-2 中规定：由荷载引起的位移（Δ 等）均以与假定的赘余力方向相反为正值（见图1-1c）。

$$
\begin{cases}
\delta_{11}X_{12} + \delta_{12}X_{22} + \delta_{13}X_{32} = \Delta_{12} \\
\delta_{21}X_{12} + \delta_{22}X_{22} + \delta_{23}X_{32} = \Delta_{22} \\
\delta_{31}X_{12} + \delta_{32}X_{22} + \delta_{33}X_{32} = \Delta_{32}
\end{cases}
\qquad (1\text{-}4)
$$

式 1-2 至 1-4 中，δ_{ij} 表示在 j 赘余力方向施加单位力产生的 i 赘余力方向的位移，即通常所称之形常数而 X_{ij}，及 Δ_{ij} 则分别表示第 j 种荷载形式下的 i 赘余力及 i 赘余力方向的位移，即通常所称之载常数。

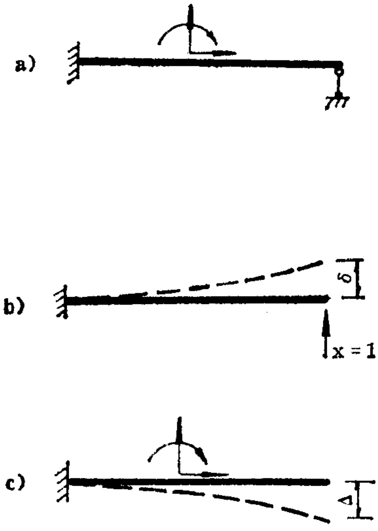

图 1-1

显然，当为更高次超静定结构或者荷载形式更多时，其方程组将十分见长。为简练表达，引进矩阵的概念，即以一个字母来代表一组数。例如，记：

$$
[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}5)
$$

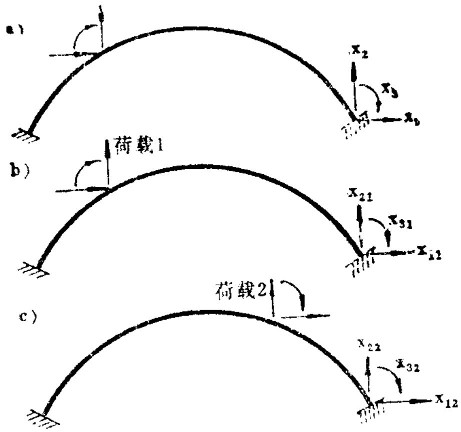

图 1-2

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}, \qquad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} \tag{1-6}$$

$$[X] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix}, \qquad [\Delta] = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

1-1.2 矩阵的定义

由式 1-5 至式 1-7 可见，矩阵的定义为：由一组按一定次序排列的数构成的矩形阵列，或者理解为一张数表。因此矩阵与行列式不同，矩阵本身不表示任何数值，它只是一组数的排列表示，而行列式则表示一个确定值。此外，矩阵的行数与列数可以不等（如式 1-7），行列式则必需相同。例如：

矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

它只是表示 3， 7， 6， 2 这四个数按上述顺序排列，

而行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3\times2-6\times7=-36$$

即表示一个确定值－36。

矩阵的第 i 行、第 j 列元素常记为 a_{ij}。在算法语言及本书中又记为 A[i, j]。矩阵的行数 m 与列数 n 相乘 m×n 称为矩阵的阶。

仅有一列的矩阵称为列阵，习用{ }表示，例见式1-6。

仅有一行的矩阵就称为行阵，例如：

$$\begin{aligned} [\overline{X}] &= [X_1 \quad X_2 \quad X_3] \\ [\overline{\Delta}] &= [\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3] \end{aligned} \tag{1-8}$$

与式 1-6 相比，式 1-8 仍然表示一组赘余力和载变位系数，但它们的排列方式则不同，式 1-6 排成一列，而式 1-8 则排成一行。

当矩阵的行列相等时，就称为方阵，例见式 1-5 。

1-1.3　矩阵相乘

在式 1-5 至 1-7 中，我们以具有相同物理意义的数排列成矩阵[δ]、[$\overline{X}$]、[$\overline{\Delta}$]、[X]、[Δ]等，那么，准则方程组 1-2至1-4又如何以矩阵表示呢？回顾式 1-1，可以理解，理想的表示方式为：

式 1-2：

$$[\delta]\{\overline{X}\} = \{\overline{\Delta}\} \tag{1-9}$$

而式 1-3 及 1-4 则可综合表示为：

$$[\delta][X] = [\Delta] \tag{1-10}$$

于是引出矩阵相乘的概念：[δ]与[X]相乘得矩阵[Δ]。[Δ]中第 i 行、第 j 列元素是由[δ]中第 i 行的各个元素与[X]中第 j 列的各个元素对应相乘求和得到，即：

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} X_{kj} \tag{1-11}$$

准则方程组（式1-3、1-4）的矩阵形式 表1-1

$$[X]=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \qquad [\Delta]$$

$$[\delta]=\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \delta_{11}X_{11}+\delta_{12}X_{21}+\delta_{13}X_{31} & \delta_{11}X_{12}+\delta_{12}X_{22}+\delta_{13}X_{32} \\ \delta_{21}X_{11}+\delta_{22}X_{21}+\delta_{23}X_{31} & \delta_{21}X_{12}+\delta_{22}X_{22}+\delta_{23}X_{32} \\ \delta_{31}X_{11}+\delta_{32}X_{21}+\delta_{33}X_{31} & \delta_{31}X_{12}+\delta_{32}X_{22}+\delta_{33}X_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} \end{bmatrix}$$

矩 阵 图 乘 数 例 表1-2

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\times5+6\times7+2\times3 & 3\times4+6\times0+2\times1 \\ 0\times5+1\times7+3\times3 & 0\times4+1\times0+3\times1 \\ 2\times5+2\times7+5\times3 & 2\times4+2\times0+5\times1 \\ 0\times5+4\times7+6\times3 & 0\times4+4\times0+6\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 14 \\ 16 & 3 \\ 39 & 13 \\ 46 & 6 \end{bmatrix}$$

矩阵相乘可由表 1-1 表示，既便于理解，在实用中也是很方便的，数例见表 1-2 。

由表 1-1 及 1-2 可见：矩阵可乘的必要条件是第一个矩阵（表 1-1 中的$[\delta]$）的列数等于第二个矩阵（表 1-1 中的$[X]$的行数。因而$[\delta][X]$可乘，$[X][\delta]$就不一定可乘（本例中即不可乘），所以一般情况下：

$$[\delta][X]\neq[X][\delta] \qquad (1\text{-}12)$$

即一般不具有乘法交换律。

1-1.4 矩阵相等

由表 1-1 、1-2 可见：矩阵相等是指它们的行数、列数均相同，并且对应的元素一一相等。

1-1.5 提示

矩阵既定义为一张数表，自然可以随意选定排列。然而实际工程问题中经常是将同一类物理量排列成一个矩阵，如上述$[\delta]$为形常数构成的矩阵，$[\Delta]$为载常数构成的矩阵，$[X]$为赘余力构成的矩阵。在构成矩阵时还应考虑到使拟建立的矩阵方程能满足矩阵运算的规律。如果我们选择：

$$[X]=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & X_{31} \\ X_{12} & X_{22} & X_{32} \end{bmatrix}$$

它仍具有赘余力矩阵的物理意义，然而$[\delta]$与$[X]$却不可乘，即不能写成式 1-10 的形式。可见：作为工程技术人员，重要的是深刻理解上述定义，而根据实际问题，适当地构造矩阵（如式1-5至1-7）和建立矩阵方程（如式1-10），剩下的纯数学问题（如式1-10的求解）则可通过查阅资料或请计算数学工作者协同解决。

比较式 1-1 与式 1-10 ，可见二者具有完全相同的“外形”。但式 1-1 只表示单个物理量之间的简单关系，而式 1-10 则表示成组物理量之间的复杂关系。显然，如果把$[\delta]$、

$[X]$及$[\Delta]$称为广义的（即一组）δ、X 及 Δ，则二者又具有同等的物理意义。这在结构矩阵分析中是屡见不鲜的。引进矩阵概念的优越性就很明显了。深刻理解和灵活应用这种由简单到复杂、由特殊到一般的分析问题过程，无疑是必要和有益的。

1-1.6 对称矩阵

方阵对角线上下对称位置上的元素两两相等（即 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$）时为对称矩阵。例式 1-5 表示的$[\delta]$矩阵，由于变位互等定理，$\delta_{ij} = \delta_{ji}$，故是对称矩阵。具体数例又如：

$$\begin{pmatrix} 3.6 & -6.9 & 5.3 \\ -6.9 & 4.3 & 0 \\ 5.3 & 0 & 7.5 \end{pmatrix}$$

1-1.7 对角线阵

除对角线以外，其余元素均为零的方阵称为对角线阵。无铰拱的赘余力选在弹性中心处，则有 $\delta_{ij} = 0$（$i \neq j$ 时），得对角线阵：

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}13)$$

1-1.8 么阵

对角线上元素均为 1 的对角线阵称么阵或单位矩阵，记为$[I]$，例：

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}14)$$

按表 1-1 格式，将$[I]$阵与其同阶的任意方阵$[A]$相乘，

容易证得下式：

$$[I][A]=[A][I]=[A] \qquad (1\text{-}15)$$

可见么阵具有常量运算中1的含义。

1-1.9　上三角阵和下三角阵

对角线下侧元素（或上侧元素）均为零的方阵称为上三角阵（或下三角阵）．例如下三角阵：

$$[L]=\begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}16)$$

1-1.10　单位上三角阵或单位下三角阵

主对角线元素均为1的上三角阵或下三角阵称为单位上三角阵或单位下三角阵，例如单位上三角阵：

$$[P]=\begin{bmatrix} 1 & P_{12} & P_{13} \\ 0 & 1 & P_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}17)$$

1-1.11　转置矩阵

将矩阵$[A]$的行与列对换，得到原矩阵$[A]$的转置矩阵，记作$[A]^T$，例：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad [A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}18)$$

显然，列阵转置就是行阵，而对称方阵转置后仍为原来的方阵。这种根据定义不难得出的性质，就不予赘述了。

为了节省篇幅，以后我们常以行阵的转置来表示列阵，例如，列阵：

$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad \text{写成}$$

$$\{u\} = [\, u_1 \;\; u_2 \;\; u_3 \;\; u_4 \,]^T$$

除以上各类矩阵外，在结构矩阵分析中常用的分块子矩阵、逆矩阵、奇异矩阵以及对称正定矩阵等，将在§1-3及其以后叙述。

§1-2 矩阵的基本运算

1-2.1 矩阵的加减

同阶矩阵[A]和[B]可进行加减，所得矩阵[C]与[A]、[B]同阶，而：

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \tag{1-19}$$

即对应元素进行加减。

例：

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

则：

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 3+(-2) & 0+2 \\ 7+7 & 1+1 \\ -6+4 & 9+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 14 & 2 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$$

交换律和结合律对矩阵加减运算亦成立：

$$[A] + [B] = [B] + [A] \tag{1-20}$$

$$([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C]) \tag{1-21}$$

1-2.2 矩阵的数乘

以常数λ乘以矩阵[A]，表示矩阵[A]中的每个元素乘以λ。例：

$$5\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times4 & 5\times(-3) & 5\times2 \\ 5\times1 & 5\times0 & 5\times9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & -15 & 10 \\ 5 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

1-2.3 矩阵的乘法

有关矩阵相乘的定义和运算规则在1-1.3中已经说明。当多个矩阵连乘时，则可乘条件可表示为：

$$[A]_{m\times n}\cdot[B]_{n\times p}\cdot[C]_{p\times q}=[D]_{m\times q} \tag{1-22}$$

如果$[A]$、$[B]$、$[C]$满足上列可乘条件，则乘法的结合律和分配律也成立，即：

$$[A][B][C]=([A][B])[C]=[A]([B][C]) \tag{1-23}$$

$$[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C] \tag{1-24}$$

§1-3 分块子矩阵

根据实际问题的需要，用若干贯穿整个矩阵的水平线、垂直线将一矩阵剖分为若干块，则各小块构成的矩阵称为原矩阵的子矩阵，例如：

$$[A]=\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

又如：

$$[B]=\left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \hline b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{bmatrix} \tag{1-26}$$