·工程力学丛书·

弹性薄壳理论

Theory of Thin Shells

黄克智 陆明万 薛明德

高等教育出版社

·工程力学丛书·

弹性薄壳理论

Theory of Thin Shells

黄克智 陆明万 薛明德

高等教育出版社

本书在前五章中系统讲授了弹性薄壳的一般理论，包括曲面理论基本知识，薄壳基本假设，薄壳的变形几何关系、静力平衡关系和弹性关系，薄壳的基本方程、边界条件和基本解法，可能功原理和解的唯一性定理等。讲述从任意曲线坐标出发，着重正交曲线坐标，为读者深入系统地掌握薄壳理论打下良好基础。

本书后六章由渐近（量级）分析的统一观点出发，以 Kirchhoff 假设的精度为统一标准，严格地导出了实际应用中最重要的各种简化理论，包括薄膜理论，简单边界效应、快变化应力状态及扁壳理论，半无矩理论，广义边界效应及边界效应型的应力状态等。讨论了它们的特点、适用范围及求解方法。介绍了把各种简化理论解组合起来构成薄壳理论完整解答的分解合成法。为读者解决工程实际问题提供了有效的分析手段。

本书是高等教育出版社出版的工程力学丛书的一种，是固体力学专业的研究生教材，可供高等院校力学专业的师生及有关科研、工程设计人员参考。

责任编辑　张元直

工程力学丛书
(Engineering Mechanics Series)
弹性薄壳理论
(Theory of Thin Shells)
黄克智　陆明万　薛明德
(Hwang Keh-chih)(Lu Ming-wan) (Xue Ming-de)

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32　印张13.625　字数340 000
1988年 8月第 1版　1988年 8月第 1次印刷
印数 0 001— 2,020
ISBN 7-04-000846-7/TB・46
定价5.25元

本书第一作者简介

黄克智，1927年7月生，江西南昌人。1947年大学毕业，1952年清华大学工程力学研究生毕业，毕业后留校任教。1955年至1958年在苏联莫斯科大学数学力学系进修。现任清华大学教授，校务委员会委员，工程力学研究所所长。

黄克智在固体力学的壳体理论、塑性力学、特别是断裂力学等方面，作出了突出的贡献，得到国内和国际力学界的公认。现任中国力学学会副理事长，国务院学位委员会力学学科评议组组长，国家教委工程力学专业教材委员会主任委员，并被选为国际断裂学会理事、提名委员会委员，远东断裂组织常任顾问。

在薄壳理论方面，他用渐近方法系统地探讨了壳体分析的各种近似方法的理论，确定了各种近似方法的适用范围与误差量级。近年来，又致力于把板壳理论应用于工程实际，在换热器管板设计方面取得了重要成果。

高等教育出版社出版的"工程力学丛书"是一套深入、全面、系统地阐述工程力学各分支学科基本理论和反映学科前沿水平的书籍；各书主要作者是当前工程力学界的著名学者。本丛书既是专著，又可作高等学校研究生教学之用，也可供力学教师、研究人员和工程技术人员学习参考。本丛书的出版将有助于促进我国科学技术的发展和工程力学教育水平的提高。

前　言

本书是在作者的“薄壳理论讲义”基础上进行修改补充而写成的。“讲义”是为清华大学 1978 年以后工程力学系固体力学专业历届研究生编写的。

目前国外已经有不少讲述薄壳理论的教科书或专著，国内也有几本有关的教科书。但是就作者所知，有的书籍只限于讨论简单或特殊形状的壳体，例如圆柱壳、圆锥壳、球壳等旋转对称壳，而缺少对一般理论的讲述；有的书籍虽然阐述了壳体的一般理论，但是对各种不同的简化理论（例如无矩理论、有矩理论、半无矩理论、边界效应理论、扁壳理论等）的讲述往往是互相分割的、孤立的而不是相互联系的、系统的。我们在多年的教学工作中深感有必要出版一本理论体系是科学的、严格的，但解决问题的方法又是实用的薄壳理论教科书，使读者学习后既掌握解决各种复杂的薄壳问题所必需的较深入的理论知识，又能掌握适合于解各种具体工程问题的方法，这就是我们编写本书的出发点。

薄壳理论的发展有两个不同的方向。一个方向是趋向于精确化。即从三维弹性理论出发，弃去Kirchhoff-Love 基本假定，建立精确的壳体理论；这种精确的理论对于解决较厚的壳体问题是必须的，但是在精确化的同时，必然使问题的解更为复杂。另一个方向是趋向于简化。但就是以Kirchhoff-Love 假定为基础的薄壳理论在数学上仍然是相当复杂的，能够用解析方法求解的问题不多。为了解决各种工程实际问题，一种途径是寻求数值解，另一种途径是寻求能保证一定精度的简化理论与近似解法。由于建立在Kirchhoff-Love 假定基础上的薄壳理论方程组本身具有一定量级的误差，因而在各种不同的具体条件下寻求各种不同的简化理论，使在该条件下该种简化理论的精度不低于建立在 Kirchhoff-

Love 假定基础上的薄壳理论的精度，从而方程和解法却可以大大简化，这对于解各种具体的工程实际问题显然具有很大的实用意义，同时也为各种数值解法提供了理论基础。本书主要是在后一个方向作了些努力和尝试。

薄壳理论中有各种各样的简化理论，本书力图用一个统一的观点把它们联系起来。薄壳在几何上最重要的特征就是它的厚度比其它尺寸小得多，且薄壳的中面是曲面。薄壳中的应力状态沿壳的中面变化有快、慢之分，这是由于各种薄壳的几何特性不同、作用在壳上外载荷状况不同、壳体边缘的支承条件不同造成的。本书用变化指数作为变化快慢的标志，而变化指数就成为本书中区别不同的简化理论的重要参数。在多数的实际问题中，我们往往要把几种不同的简化理论的解组合起来构成我们所需要的最终的解。各个部分以怎样的“比重”来参加组合，以及怎样组合，这是我们能否把简化理论付诸应用所必须解决的问题。总之，系统地对薄壳中的应力状态进行分类，建立每一类的简化理论并分别确定它们的适用范围与误差量级，运用简化理论的解的组合来求解本来是很复杂的实际问题，这就是本书的目的。

作者多年来从事薄壳理论及其应用的研究工作，本书中有一部分内容是作者的研究成果。出版本书的目的既是应教学工作的需要，同时也介绍了作者在这方面的研究工作。我们希望，通过本书的出版，使读者既能掌握比较深入的薄壳理论知识，又能学到适合于解决各种具体工程问题的实用的方法；但限于作者水平，全书虽经屡度修改尚不够令人满意，希望得到广大读者与力学界的同行们的批评与指正。

同济大学徐次达教授认真而详细地审阅了本书，提出了许多宝贵意见，谨在此表示衷心的感谢。

黄克智 陆明万 薛明德 谨识

1985 年 3 月

主要符号表

A, B	Lame′参数
$\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	曲面的面元
E	壳体材料弹性模量
$\mathscr{E}, \mathscr{F}$	作用于每单位面积中面上的力矩分量
H	平均曲率
H_1, H_2	扭矩
h	壳体厚度之半
$h_* = h/\lambda$	壳厚参数，无量纲的小参数
J_1^e, J_2^e	切面变形张量的第一不变量与第二不变量
J_1^k, J_2^k	曲率变形张量的第一不变量与第二不变量
K	Gauss曲率
$k = \sqrt{\dfrac{\lambda}{h}}$	
$\mathscr{L}$	壳体中面的边界曲线，或干扰线
$\boldsymbol{L} = \mathscr{E}\boldsymbol{\rho}_1/A + \mathscr{F}\boldsymbol{\rho}_2/B$	作用于每单位面积中面的分布面力矩矢量
L, M, N	曲面的第二基本形系数
$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}$	变形时中面单位法向矢量的变化
M_1, M_2	弯矩
$\boldsymbol{n}$	曲面的单位法向矢量

$\tilde{N}$	边界等效横剪力
N_1, N_2	横剪力
$O(\cdots)$	量级符号，表示$(\cdots)$ 的量级
P	特征载荷量
p, q	物理量沿 ξ、η 方向的变化指数
$\boldsymbol{Q}^{(1)} = H_1\boldsymbol{\rho}_1/A - M_1\boldsymbol{\rho}_2/B$	作用在每单位长度 ξ 面上的力偶矩矢量
$\boldsymbol{Q}^{(2)} = M_2\boldsymbol{\rho}_1/A - H_2\boldsymbol{\rho}_2/B$	作用在每单位长度 η 面上的力偶矩矢量
$\boldsymbol{Q}^{(\nu)}$	作用在每单位长度边界上的力矩矢量
$\boldsymbol{r}$	等距曲面上任一点的矢径
$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$	等距曲面上的协变基矢量
R	曲面的法截面曲率半径
$\boldsymbol{R}^{(1)} = T_1\boldsymbol{\rho}_1/A + S_1\boldsymbol{\rho}_2/B - N_1\boldsymbol{n}$	作用在每单位长度 ξ 面上的力矢量
$\boldsymbol{R}^{(2)} = T_2\boldsymbol{\rho}_2/B + S_2\boldsymbol{\rho}_1/A - N_2\boldsymbol{n}$	作用在每单位长度 η 面上的力矢量
$\boldsymbol{R}^{(\nu)}$	作用在每单位长度边界上的力矢量
R_1^*, R_2^*	曲面的主曲率半径
$1/R_1, 1/R_2, 1/R_{12}$	沿坐标线方向的法截面曲率与扭率
$1/R_\nu, 1/R_t, 1/R_{\nu t}$	壳体中面在边界点处沿 $\boldsymbol{\nu}$ 与 $\boldsymbol{t}$ 方向的法截面曲率与扭率
s	曲线的弧长
$\tilde{S}$	边界等效切力
S_1, S_2	切力
$\boldsymbol{t}$	曲线的切线方向单位矢量
$\tilde{T}$	边界等效法向力
T_1, T_2	法向力，或称拉(压) 力
$\boldsymbol{U} = u\boldsymbol{\rho}_1/A + v\boldsymbol{\rho}_2/B + w\boldsymbol{n}$	位移矢量

u, v, w	位移分量
u_ν, u_t	位移矢量沿边界曲线的法向与切向分量
$\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$	定义式见(2·1·19 *a*)、(2·1 19 *b*)、(2·1·20)
W	变形功或应变能函数
$\boldsymbol{X} = X\boldsymbol{\rho}_1/A + Y\boldsymbol{\rho}_2/B + Z\boldsymbol{n}$	作用于每单位面积中面的分布面力矢量
X, Y	作用于每单位面积中面上沿 ξ、η 方向的切向载荷
Z	作用于每单位面积中面上的法向载荷
z	壳体中任一点到中面的距离(沿 $\boldsymbol{n}$ 方向为正)
$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2)$	曲面的第二类Christoffel 符号
$\gamma_1, \gamma_2, \boldsymbol{\vartheta}$	曲面的转动分量
γ_ν, γ_t	变形时边界线的主法线与切线离开曲面的切平面偏转的角度
e_1, e_2	切面内沿 ξ、η 方向的伸长变形分量
ζ_1, ζ_2	$\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2$ 的法向分量
ϑ	协变基矢量间的夹角
ϑ_1, ϑ_2	等距曲面的 ξ、η 线与中面的 ξ、η 线间的夹角
$\kappa = \dfrac{1}{R}$	法截面曲率
κ_1, κ_2	曲率变形分量
$\kappa_{(1)} = \dfrac{1}{R^*_1}$, $\kappa_{(2)} = \dfrac{1}{R^*_2}$	曲面的主曲率

λ 壳体中面的特征尺寸或特征曲率半径

$\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ 在中面的切面内，与边界线的切线$\boldsymbol{t}$正交的单位矢量

$\boldsymbol{\nu}_{(1)}=\boldsymbol{\rho}_1/A,\boldsymbol{\nu}_{(2)}=\boldsymbol{\rho}_2/B$ ξ面与η面的单位法向矢量

$\nu_{11},\nu_{12},\nu_{22}$ 参考曲面的第三基本形系数

ξ、η 曲线坐标

$\tilde{\xi}=\dfrac{\xi-\xi_0}{h_*^{1/2}}$ 简单边界效应区内，沿ξ方向的放大坐标

$\hat{\xi}=\xi h_*^{1/2}$ 在中长柱壳半无矩理论中，沿ξ方向的缩小坐标

$\boldsymbol{\rho}$ 参考曲面（中面）上任一点的矢径

$\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2$ 参考曲面上的协变基矢量

Σ 参考曲面（中面）

$\Sigma_{(z)}$ 与参考曲面距离为z的等距曲面

$\sigma_1,\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_2,\sigma_{23},\sigma_3$ 三维应力分量

$\tau,\tilde{\tau},\tau^{(1)},\tau^{(2)}$ 扭率变形分量

$\boldsymbol{\Phi}=-\psi\boldsymbol{\rho}_1/A+\varphi\boldsymbol{\rho}_2/B+\mu\boldsymbol{n}$ 矢量应力函数

$\boldsymbol{\Psi}=a\boldsymbol{\rho}_1/A+b\boldsymbol{\rho}_2/B+c\boldsymbol{n}$ 矢量应力函数

ψ,φ,μ,a,b,c 应力函数

$\boldsymbol{\Omega}=\gamma_2\boldsymbol{\rho}_1/A-\gamma_2\boldsymbol{\rho}_2/B-\delta\boldsymbol{n}$ 曲面的转动矢量

$\boldsymbol{\Omega}_1=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\xi},\boldsymbol{\Omega}_2=\dfrac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial\eta}$ 转动矢量对坐标的导数

ω 剪切变形分量

ω_1,ω_2 切面内协变基矢量的转动分量

I 曲面的第一基本形

II 曲面的第二基本形

III 参考曲面(中面)的第三基本形

$$\Delta(\cdots)=\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{B}{A}\frac{\partial(\cdots)}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{A}{B}\frac{\partial(\cdots)}{\partial\eta}\right]\right\}$$

调和(Laplace)算符

角标

(B)	纯弯状态的量
(C)	半无矩状态的量
(K)	简单边界效应状态的量
(M)	无矩状态的量
(O)	薄膜状态的量
(z)	与中面相距为 z 的等距曲面上的量

目　录

1

微分几何的基本知识

壳体是由两个曲面包围而构成的物体，这两个曲面间的距离 $2h$ 较物体的其它尺寸为小。这两个曲面称为壳体的表面。壳体中与两个表面等距离的点的轨迹称为壳体的中面。在中面上每一点处作中面的法线，法线被壳体的两个表面所截得的线段长度称为壳体在该点处的厚度。一般来说，壳体的厚度可以随中面上各点位置的变化而变化，但本书仅研究最常用的等厚度壳体。今后，关于壳体的几何形状只需以壳体的中面和它的厚度来描述。

如果壳体的中面是一个封闭曲面，则称壳体是封闭的。在许多情况下，我们要研究从封闭壳体中切割出来的一部分不封闭的壳体，它是这样形成的：通过壳体中面上某一闭合曲线上诸点作中面的法线，这些法线沿此闭合曲线移动的轨迹形成一个直纹面①，直纹面与壳体的两个表面包围的部分构成了一个不封闭的壳体，直纹面就是壳体的边界。

本书研究的对象限于弹性薄壳小挠度理论，即壳体的厚度 $2h$

① 直纹面是一个连续族的直线所产生的曲面，这族直线称为直纹面的母线。直纹面的方程为

$$r(\xi,\eta)=a(\xi)+\eta e(\xi)$$

式中：r 为直纹面上诸点的矢径，ξ,η 是参数，e 是单位矢量。柱面、锥面，曲线的切线所构成的切线曲面以及正螺面等都是直纹面。（参见：苏步青等编，微分几何，高等教育出版社出版，1979；吴大任编，微分几何讲义，高等教育出版社出版，1981）。

与中面的某一典型的曲率半径 R 相比是一个小量：$h/R \ll 1$；①薄壳的中面法向位移与壳厚相比是一个小量；壳体材料是各向同性的且服从虎克定律。

§ 1·1 曲面的基本知识，曲面的第一与第二基本形

一、曲面上的曲线坐标，基矢量

在三维笛卡儿坐标系中，曲面的参数方程可以表达为

$$\begin{aligned} x&=x(\xi,\eta)\\ y&=y(\xi,\eta)\\ z&=z(\xi,\eta) \end{aligned} \tag{1·1·1}$$

对于确定的曲面，选择不同的参数 ξ、η，方程(1·1·1)便具有不同的形式。ξ、η 的选择应使 x、y、z 是 ξ、η 的单值函数，并应限制 ξ、η 的变化范围，使得对应于曲面上每一点只有一对完全确定的 ξ、η 值，因此曲面上的点与坐标对 $\{\xi,\eta\}$ 有一一对应的关系。参数 ξ、η 可以称为所考虑曲面的曲线坐标，或高斯(Gauss)坐标。(1·1·1)式中当 η 保持不同的常数值而改变 ξ 值时对应点的轨迹是曲面上的一族曲线，称为 ξ 坐标线；而保持 ξ 为常数值并改变 η 值则得到 η 坐标线。曲面上每个点都只是一条 ξ 线与一条 η 线的交点。对于每一个曲面，原则上可以选择无限多种曲线坐标，二族坐标线不一定互相正交，ξ 与 η 也不一定具有长度的量纲。当然，人们总应选择对解决某个具体问题最方便的坐标系。本书将给出正交坐标系中的薄壳方程。

设曲面上点 P 的矢径为 $\boldsymbol{\rho}$，

$$\boldsymbol{\rho}=x\boldsymbol{i}_1+y\boldsymbol{i}_2+z\boldsymbol{i}_3 \tag{1·1·2}$$

① h/R 小到什么程度时壳体可认为是薄壳，这与所要求的计算精度有关。对于一般的工程问题，通常当 $h/R=10^{-1}\sim10^{-3}$ 时，采用薄壳理论便有足够的精度。