

JISUAN

计算结构力学

JIEGOU LIXUE

■ 曾又林 编著



■ 武汉大学出版社



86.21
ZYL

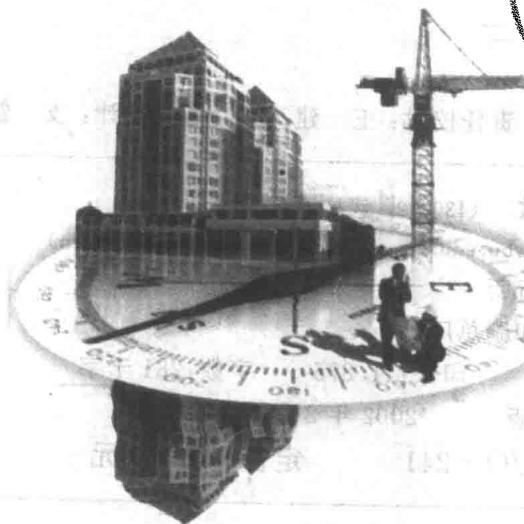
JISUAN
JIEGOU LIXUE

计算结构力学

■ 曾又林 编著

武汉大学出版社

采句1



图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学/曾又林编著. —武汉: 武汉大学出版社, 2002. 2
ISBN 7-307-03333-X

I. 计… II. 曾… III. 计算力学: 结构力学 IV. O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 36433 号

责任编辑: 谢文涛 责任校对: 王 建 版式设计: 支 笛

出版: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

发行: 新华书店湖北发行所

印刷: 武汉大学出版社印刷总厂

开本: 787×1092 1/16 印张: 11.875 字数: 281 千字

版次: 2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03333-X/O · 241 定价: 18.70 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 提 要

本书共 8 章，全面介绍了平面与空间杆系结构静力、自由振动和稳定问题的计算原理与计算方法。本书的特点是理论与程序紧密结合，每一章的内容都是按理论—算例—程序设计的顺序来编排的，附有完整的 FORTRAN77 源程序，避免了理论与程序脱节的现象。

本书可作为高等院校力学、土建、水利、道桥等专业本科生、研究生的教材，也可供有关专业工程技术人员参考。

前 言

计算结构力学是一门新型的固体力学学科，是传统结构力学与现代高速计算机相结合的产物，要求结构力学与计算机紧密结合。本书试图全面、系统地介绍计算杆系结构力学的内容，以使读者对计算杆系结构力学有一个较全面的了解，为进一步的学习打下基础。

本书在写作过程中贯彻了理论与程序紧密结合的原则，各章一般按理论—算例—程序设计的顺序来展开。理论部分以讲清结构分析的原理为原则，为程序设计做准备，一般不作深入讨论；算例部分提供 1~2 个算例，供读者进一步理解结构分析的理论，同时供调试、修改程序参考；程序设计部分均附有完整的 FORTRAN77 源程序，程序采用模块化设计，各部分模块尽可能通用，或作少量修改后即可借用。

本书介绍的结构类型按平面桁架—空间桁架—平面刚架（含连续梁）—空间刚架来展开，除介绍一般刚架外，还介绍了带刚性域的刚架；结构分析类型按静力分析—自由振动—稳定计算来展开；线性代数理论方面介绍了 Gauss 消元法解线性代数方程组（刚度矩阵采用等带宽二维数组存贮），三角分解法解线性代数方程组（刚度矩阵采用变列高一维数组存贮），矩阵广义特征值问题的逆迭代法（最小特征值）、广义 Jacobi 法（全部特征值）和子空间迭代法（部分特征值）。第 2~5 章分别为平面桁架、空间桁架、平面刚架、空间刚架的静力计算，第 6 章为矩阵广义特征值问题，第 7 章为结构自由振动计算，第 8 章为结构稳定计算。第 2~4 章中结构刚度矩阵按等带宽二维数组存贮，第 5~8 章中结构刚度矩阵一般按变列高一维数组存贮。

本书可作为高等院校有关专业本科生、研究生的教材，其中 2~4 章可供本科生教学使用，5~8 章可供研究生教学使用。

本书得到中华电力教育基金会的资助，特此致谢。

作 者

2000 年 3 月

目 录

1 绪 论	1
2 平面桁架静力计算	3
2.1 概 述	3
2.2 单元分析	3
2.3 整体分析	6
2.4 位移边界条件的引入	10
2.5 线性代数方程组的求解	11
2.6 内力计算	14
2.7 算 例	15
2.8 程序设计	17
习 题	27
3 空间桁架静力计算	30
3.1 空间桁架静力计算	30
3.2 程序设计	33
习 题	40
4 平面刚架静力计算	41
4.1 概 述	41
4.2 单元分析	41
4.3 整体分析	48
4.4 单元自由度的释放	50
4.5 含刚性域刚架的计算	52
4.6 算 例	55
4.7 程序设计	59
4.8 连续梁的计算	72
习 题	76
5 空间刚架静力计算	78
5.1 概 述	78
5.2 单元分析	78
5.3 含刚性域单元的分析	83

5.4	结构刚度矩阵—维数组存贮	86
5.5	三角分解法解线性代数方程组	89
5.6	程序设计	95
	习 题	111
6	矩阵广义特征值问题	114
6.1	概 述	114
6.2	迭代法	116
6.3	广义 Jacobi 法	120
6.4	子空间迭代法	129
7	结构自由振动计算	144
7.1	概 述	144
7.2	单元分析	144
7.3	单元自由度的释放	152
7.4	整体分析	153
7.5	程序设计	156
	习 题	166
8	结构稳定计算	167
8.1	概 述	167
8.2	单元分析	167
8.3	单元自由度的释放	171
8.4	整体分析	172
8.5	程序设计	173
	习 题	180
	参考文献	181

1 绪 论

计算结构力学是借助电子计算机进行结构分析的一门学科,其研究范围非常广泛,包括各种工程结构如杆系结构、板壳结构、实体结构、悬索结构等等的研究。本书只对杆系结构进行研究,且只局限于线形问题(小变形、线弹性)。

传统的结构计算有力法和位移法两大方法,这两大方法与计算机结合以后就派生出矩阵力法和矩阵位移法。由于矩阵位移法能够对静定、超静定结构进行统一处理,能够计算各种复杂结构,编制计算机程序比较简单,因而得到了广泛的发展。在本书中,将详细讨论矩阵位移法在桁架、刚架等杆系结构计算中的应用。

矩阵位移法与普通位移法一样,仍是以结构的结点位移为未知数,建立反映结点位移与外荷载关系的线性代数方程组,求解结点位移,进而求解结构的内力。矩阵位移法的特殊之处在于:①各种方程均以矩阵形式表示,最后的计算由编制计算机程序来实现;②可以精确地考虑轴向变形、剪切变形对结构内力的影响。由于计算量过大的原因,这些因素在普通位移法中都是不予考虑的,而由计算机则能轻而易举地解决。

矩阵位移法也称为杆系有限元法。连续体有限元法就是在杆系有限元法的基础上发展起来的。矩阵位移法包括理论分析与程序设计两部分内容。

1) 理论分析

对于静力问题,理论分析过程包括结构离散化、单元分析、整体分析、线性代数方程组的求解和内力计算等五个步骤:

①结构离散化 矩阵位移法将结构划分为单元。单元是有限元法研究的最小部分,有限元法将结构看做由有限个单元组成。静力分析时每根杆件划分为一个单元;动力分析和稳定性分析时,每根杆件要划分为多个单元。

②单元分析 单元分析是分析单元的杆端力和杆端位移的关系,即建立单元刚度方程。静力分析时,单元的杆端力和杆端位移的关系是精确成立的,故每根杆件只须划分为一个单元。动力分析和稳定性分析时,单元的杆端力和杆端位移的关系是近似成立的,故每根杆件要划分为多个单元。

③整体分析 整体分析是综合各个单元的刚度方程,建立结构的结点位移和外荷载的关系,即建立结构刚度方程。

④线性代数方程组的求解 结构刚度方程是线性代数方程组,求解这个线性代数方程组就可得到结构的结点位移。

当不计支承条件时,结构刚度方程是求不出解答的,只有引入支承条件才能求解。支承条件的引入有两种方法:一种称为后处理法,即形成结构刚度方程以后再引入支承条件;另一种称为先处理法,即将支承处的零结点位移排除在结点位移列阵外。

两种方法编制程序的难易程度基本相当,但先处理法由于排除了零位移,计算量减小,可扩大解题规模,加快计算速度,因而得到了广泛的应用。大型结构计算程序一般都采用先处理法。本书中桁架和刚架计算采用先处理法,但连续梁的计算采用后处理法,其原因一是为向读者介绍此法;二是对于连续梁这种最简单的结构,解题规模与计算时间是不成问题的,而用后处理法编制程序更方便。

线性代数方程组的求解介绍了 Gauss 消元法(刚度矩阵采用等带宽二维数组存贮)和三角分解法(刚度矩阵采用变列高一维数组存贮)。

⑤内力计算 内力计算即根据结构结点位移求各单元的内力。

对于动力问题和稳定问题,理论分析过程包括结构离散化、单元分析、整体分析、矩阵广义特征值的求解等四个步骤,前三个步骤与静力分析基本相同,矩阵广义特征值问题归结为求解方程

$$[K]\{x\}=\lambda[M]\{x\}$$

本书分别介绍了求解最小特征值的逆迭代法、求解全部特征值的广义 Jacobi 法和求解部分特征值的子空间迭代法。

2) 程序设计

程序设计是将理论分析过程编制成计算机程序,由计算机来实现结构内力和位移的计算。本书程序设计采用 FORTRAN77 语言,还采用了大数组技术,用一个大的实型数组 A 来分配一切可调数组的存贮空间,避免了为每个可调数组分配一个实数组时存贮空间的浪费现象。对 A 数组进行动态分配,将经常用到的数组放在 A 数组的前端,临时性的数组放在 A 数组的后端,当临时性的数组用完后,马上将存贮空间腾出来供新的数组使用。采用本技术可减少存贮量,极大地扩大解题规模。采用大数组技术设计的程序与常见形式的程序(通过为每一可调数组对应一个实数组来分配存贮空间)的差别仅反映在主程序上。对于不希望使用大数组的读者(尤其是初学者),书中同时给出了常见形式的主程序。

程序设计采用了模块化设计方法,将求解过程划分为若干个独立的模块,各个模块由上级模块调用,平行模块之间不发生联系。模块之间的数据采用虚实结合的方法以及通过外部文件来传递,不使用公用区,使数据传递过程非常清晰。实践证明这样编制程序便于调试、阅读和移植。

本书探讨了平面桁架、空间桁架、平面刚架、空间刚架的静力计算、自由振动计算、稳定计算等的程序设计。以本书的内容为基础,读者不难编制出结构强迫振动、结构极限分析等其他问题的计算程序。

2 平面桁架静力计算

2.1 概 述

用矩阵位移法计算平面桁架时，每根杆件当做一个单元，以结点（单元之间的交点）位移为基本未知数，建立外荷载与结点位移之间的关系——结构刚度方程，求解结构刚度方程得到结点位移，从而计算每根杆件的内力。

以图 2-1 所示桁架为例，求解步骤为：

①结构离散化 划分单元，建立整体坐标系 xy 和局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ ，对结点和单元进行编号，目的是让计算机识别各个结点和单元。局部坐标系 $\bar{x}$ 轴沿着单元方向，图中用箭头表示； $\bar{y}$ 轴则从 $\bar{x}$ 轴出发逆时针旋转 90° ，图中未标出。

②单元分析 即建立每个单元的杆端力与杆端位移之间的关系——单元刚度方程。

③整体分析 根据结点的平衡，建立结构的外荷载与结点位移的关系——结构刚度方程。

④求解结构刚度方程，得到结点位移。

⑤计算每根杆件的轴力。

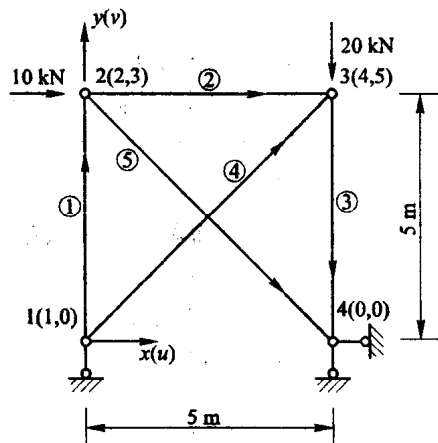


图2-1 平面桁架

平面桁架每个结点有 2 个结点位移 u 、 v 。图 2-1 所示桁架，有 4 个结点，共有 8 个结点位移

u_1 、 v_1 、 u_2 、 v_2 、 u_3 、 v_3 、 u_4 、 v_4 ，但 $v_1 = u_4 = v_4 = 0$ 。在建立结构刚度方程的时候，取结构的结点位移 $\{d\} = [u_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T$ ，即将零结点位移排除在外，这种方法称为边界条件先处理法。如果先建立结构刚度方程后引入支承条件，结点位移中包含了零结点位移，就称为边界条件后处理法。

2.2 单元分析

2.2.1 局部坐标系下的单元分析

任取一个单元，单元长 l ，抗拉刚度为 EA ，两端结点号为 i 、 j ，建立局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ （符号上加一横，表示是局部坐标系下的量），单元两端的力为 $\bar{X}_i$ 、 $\bar{Y}_i$ 、 $\bar{X}_j$ 、 $\bar{Y}_j$ ，两端的位移为 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{v}_i$ 、 $\bar{u}_j$ 、 $\bar{v}_j$ （图 2-2）。单元伸长量 $\Delta l = \bar{u}_j - \bar{u}_i$ 。因此，

$$\bar{X}_j = -\bar{X}_i = \frac{EA}{l}(\bar{u}_j - \bar{u}_i), \quad \bar{Y}_i = \bar{Y}_j = 0$$

写成矩阵形式，即

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} \quad (2-1)$$

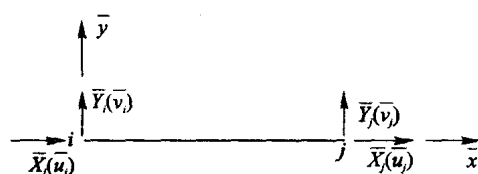


图2-2 局部坐标系下的平面桁架单元

其中

$$\{\bar{F}\} = [\bar{X}_i \quad \bar{Y}_i \quad \bar{X}_j \quad \bar{Y}_j]^T$$

$$\{\bar{\delta}\} = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{v}_j]^T$$

$$[\bar{k}] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

其中 $\{\bar{F}\}$ 、 $\{\bar{\delta}\}$ 、 $[\bar{k}]$ 分别称为局部坐标系下单元的杆端力（单元结点力）、杆端位移（单元结点位移）和单元刚度矩阵。式(2-1)反映了单元的杆端力 $\{\bar{F}\}$ 和杆端位移 $\{\bar{\delta}\}$ 之间的关系，称为局部坐标系下的单元刚度方程。

单元刚度矩阵 $[\bar{k}]$ 具有如下性质：①对称性，即 $\bar{k}_{ij} = \bar{k}_{ji}$ ；②奇异性，即 $|\bar{k}| = 0$ 。

2.2.2 杆端力、杆端位移的坐标转换

单元的杆端力除可以用局部坐标系下的分量 $\bar{X}_i$ 、 $\bar{Y}_i$ 、 $\bar{X}_j$ 、 $\bar{Y}_j$ 表示外，还可以用整体坐标系下的分量 X_i 、 Y_i 、 X_j 、 Y_j 表示（图2-3）。设单元局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴与整体坐标系的 x 轴的夹角为 α ，则

$$\bar{X}_i = X_i \cos \alpha + Y_i \sin \alpha$$

$$\bar{Y}_i = -X_i \sin \alpha + Y_i \cos \alpha$$

$$\bar{X}_j = X_j \cos \alpha + Y_j \sin \alpha$$

$$\bar{Y}_j = -X_j \sin \alpha + Y_j \cos \alpha$$

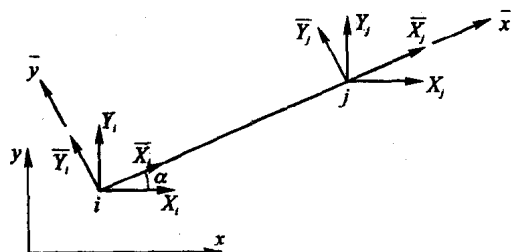


图2-3 平面桁架单元的杆端力

写成矩阵形式，即

$$\{\bar{F}\} = [T] \{F\} \quad (2-3)$$

其中

$$\{F\} = [X_i \quad Y_i \quad X_j \quad Y_j]^T$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

其中 $\{F\}$ 称为整体坐标系下的杆端力 (单元结点力); $[T]$ 称为坐标转换矩阵。设结点 i 、 j 的坐标为 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) , $\cos \alpha$ 、 $\sin \alpha$ 及杆长 l 可按下式计算

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= (x_j - x_i) / l \\ \sin \alpha &= (y_j - y_i) / l \\ l &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

$[T]$ 矩阵是正交矩阵, 满足如下的关系式

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (2-6)$$

这样由 $\{\bar{F}\} = [T] \{F\}$ 可得

$$\{F\} = [T]^T \{\bar{F}\}$$

单元的杆端位移除可以用局部坐标系下的分量 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{v}_i$ 、 $\bar{u}_j$ 、 $\bar{v}_j$ 表示外, 还可以用整体坐标系下的分量 u_i 、 v_i 、 u_j 、 v_j 表示 (图 2-4)。两者之间的关系为:

$$\bar{u}_i = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha$$

$$\bar{v}_i = -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha$$

$$\bar{u}_j = u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha$$

$$\bar{v}_j = -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha$$

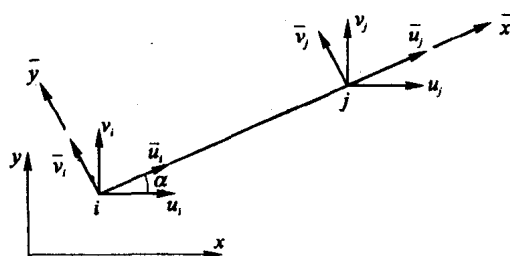


图2-4 平面桁架单元的杆端位移

写成矩阵形式, 即

$$\{\bar{\delta}\} = [T] \{\delta\} \quad (2-7)$$

其中 $\{\delta\} = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j]^T$ 称为整体坐标系下的杆端位移 (单元结点位移)。

由式 (2-7) 可得: $\{\delta\} = [T]^T \{\bar{\delta}\}$ 。

2.2.3 整体坐标系下的单元分析

将 $\{\bar{F}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\}$ 及 $\{\bar{\delta}\} = [T] \{\delta\}$ 代入 $\{F\} = [T]^T \{\bar{F}\}$, 得

$$\{F\} = [T]^T [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} = [T]^T [\bar{k}] [T] \{\delta\}$$

引入

$$[k] = [T]^T [\bar{k}] [T] \quad (2-8)$$

则

$$\{F\} = [k] \{\delta\} \quad (2-9)$$

将式(2-2)、(2-4)代入式(2-8), 得

$$[k] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

式(2-9)反映了整体坐标系下的杆端力 $\{F\}$ 与杆端位移 $\{\delta\}$ 之间的关系, 称为整体坐标系下的单元刚度方程。 $[k]$ 称为整体坐标系下的单元刚度矩阵。 $[k]$ 具有如下性质: ①对称性, 即 $k_{ij} = k_{ji}$; ②奇异性, 即 $[[k]] = 0$ 。

按式(2-10)编制的计算单元刚度矩阵 $[k]$ 的 FORTRAN 源程序 STIFF 如下:

```
1: SUBROUTINE STIFF(SK, EA, CO, SI, XL)
2: IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
3: DIMENSION SK(4, 4)
4: EAL=EA/XL
5: S1=EAL*CO*CO
6: S2=EAL*CO*SI
7: S3=EAL*SI*SI
8: SK(1, 1)=S1
9: SK(1, 2)=S2
10: SK(2, 1)=S2
11: SK(2, 2)=S3
12: DO 10 I=1, 2
13: DO 10 J=1, 2
14: SK(I, J+2)=-SK(I, J)
15: SK(I+2, J)=-SK(I, J)
16: SK(I+2, J+2)=SK(I, J)
17: 10 CONTINUE
18: END
```

SK 即 $[k]$, EA 即单元的抗拉刚度 EA , CO、SI、XL 即单元的 $\cos \alpha$ 、 $\sin \alpha$ 、 l 。

2.3 整体分析

对于图 2-5 所示桁架, 非零的结点位移为 u_1 、 u_2 、 v_2 、 u_3 、 v_3 , 将它们组成结构的结

点位移列阵，即

$$\{\Delta\} = [u_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T$$

每个结点位移在 $\{\Delta\}$ 中的序号，分别为 1、2、3、4、5，将它们作为结点位移编号，再将零结点位移编号定为 0。则结点 1、2、3、4 的结点位移 (u_1, v_1) 、 (u_2, v_2) 、 (u_3, v_3) 、 (u_4, v_4) 的编号分别为 (1,0)、(2,3)、(4,5)、(0,0)，结点位移编号示于图 2-5 中。

把与结点位移同方向的结点荷载排列起来，组成结构的荷载列阵，即

$$\{P\} = [P_{1x} \ P_{2x} \ P_{2y} \ P_{3x} \ P_{3y}]^T \quad (2-11)$$

其中 P_u 、 P_v 是结点 i 沿 x 、 y 方向的荷载。

结构整体分析的目的就是分析 $\{P\}$ 与 $\{\Delta\}$ 的关系。

分别对结点 1、2、3 取脱离体 (图 2-6)，可建立结点平衡方程如下：

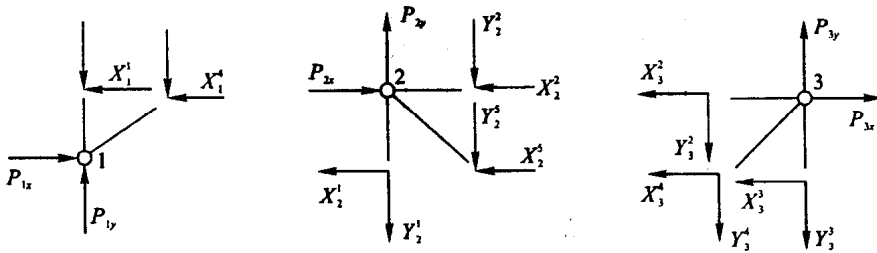


图2-6 平面桁架结点平衡

$$\left. \begin{aligned} X_1^1 + X_1^4 &= P_{1x} \\ X_2^1 + X_2^2 + X_2^3 &= P_{2x} \\ Y_1^1 + Y_1^2 + Y_1^3 &= P_{2y} \\ X_3^2 + X_3^3 + X_3^4 &= P_{3x} \\ Y_2^2 + Y_2^3 + Y_2^4 &= P_{3y} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

分别对单元 1、2、3、4、5 应用 $\{F\} = [k] \{\delta\}$ ，得

$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ Y_1^1 \\ X_2^1 \\ Y_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_2^2 \\ Y_2^2 \\ X_3^2 \\ Y_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 & k_{34}^2 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_3^3 \\ Y_3^3 \\ X_4^3 \\ Y_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 \\ k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 \\ k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 \\ k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1^4 \\ Y_1^4 \\ X_3^4 \\ Y_3^4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 & k_{14}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 & k_{24}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 & k_{34}^4 \\ k_{41}^4 & k_{42}^4 & k_{43}^4 & k_{44}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_2^5 \\ Y_2^5 \\ X_4^5 \\ Y_4^5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^5 & k_{12}^5 & k_{13}^5 & k_{14}^5 \\ k_{21}^5 & k_{22}^5 & k_{23}^5 & k_{24}^5 \\ k_{31}^5 & k_{32}^5 & k_{33}^5 & k_{34}^5 \\ k_{41}^5 & k_{42}^5 & k_{43}^5 & k_{44}^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

将以上各式代入式(a), 得

$$[K] \{\Delta\} = \{P\} \quad (2-12)$$

上式即为结构刚度方程, 表述了结构的荷载列阵 $\{P\}$ 与位移列阵 $\{\Delta\}$ 之间的关系。[K] 称为结构刚度矩阵, 具体形式为

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{11}^4 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{13}^4 & k_{14}^4 \\ k_{31}^1 & k_{33}^1 + k_{11}^2 + k_{11}^5 & k_{34}^1 + k_{12}^2 + k_{12}^5 & k_{13}^2 & k_{14}^2 \\ k_{41}^1 & k_{43}^1 + k_{21}^2 + k_{21}^5 & k_{44}^1 + k_{22}^2 + k_{22}^5 & k_{23}^2 & k_{24}^2 \\ k_{31}^4 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^5 & k_{34}^2 + k_{12}^3 + k_{12}^5 \\ k_{41}^4 & k_{41}^2 & k_{42}^2 & k_{43}^2 + k_{21}^3 + k_{21}^5 & k_{44}^2 + k_{22}^3 + k_{22}^5 \end{bmatrix}$$

观察上式可知, 结构刚度矩阵 [K] 就是由各单元刚度矩阵 [k] 组成。比如对 1 单元, 将起始端和末端的结点位移编号排列起来, 得到向量 $\{\lambda\}^1 = [1 \ 0 \ 2 \ 3]^T$, $\{\lambda\}^1$ 就表明了 [k]¹ 的元素在 [K] 中的位置, 将 $\{\lambda\}^1$ 写在 [k]¹ 的右边和上方 (图 2-7 (a)) 就是 k_{ij}¹ 在 [K] 中的行号和列号。k₁₁¹ → K₁₁, k₂₃¹ → K₀₂, k₃₄¹ → K₂₃, …。其中 k₂₃¹ → K₀₂ 表示 k₂₃¹ 在 [K] 中无位置 (因 [K] 无 0 行)。

一般地, 用单元起始端和末端的结点位移编号排列起来组成单元定位向量 $\{\lambda\}$, $\{\lambda\}$ 反映了单元刚度矩阵 [k] 的元素在 [K] 中的位置 (图 2-7 (b))。[K] 的一般组成规律可写作

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 2 \quad 3 \\ \left[\begin{array}{cccc} k_{11}^I & k_{12}^I & k_{13}^I & k_{14}^I \\ k_{21}^I & k_{22}^I & k_{23}^I & k_{24}^I \\ k_{31}^I & k_{32}^I & k_{33}^I & k_{34}^I \\ k_{41}^I & k_{42}^I & k_{43}^I & k_{44}^I \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{array} \\
 (a) &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4 \\ \left[\begin{array}{cccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{array} \\
 (b) &
 \end{array}
 \end{array}$$

图2-7 平面桁架[k]与[K]的关系
(a)[k]在[K]中的行号与列号; (b)[k]在[K]中的行号与列号

$$k_{ij} \xrightarrow{\lambda_i, \lambda_j \neq 0} K_{\lambda_i \lambda_j} \quad (2-13)$$

上式是结构刚度矩阵组成的一般规律,适用于各种结构(连续梁、桁架、刚架)。对于图2-5所示桁架, $\{\lambda\}^2 = [2 \ 3 \ 4 \ 5]^T$, $\{\lambda\}^3 = [4 \ 5 \ 0 \ 0]^T$, $\{\lambda\}^4 = [1 \ 0 \ 4 \ 5]^T$, $\{\lambda\}^5 = [2 \ 3 \ 0 \ 0]^T$ 。

结构刚度矩阵[K]具有如下性质:

- ①对称性 $K_{ij} = K_{ji}$;
- ②正定性 [K] 是正定矩阵, $|[K]| \neq 0$, 因而方程 $[K]\{\Delta\} = \{P\}$ 有惟一解;
- ③带状性 [K] 是带状矩阵, 非零元素在主对角线附近成带状分布, 其他地方元素为零, 如图2-8所示。

[K] 矩阵每行从对角元素到最后一个非零元素的元素个数称为该行的半带宽。各行半带宽的最大值称为[K]的半带宽。设单元e的定位向量 $\{\lambda\}^e$ 中不为零的最大元素为m、最小元素为l, 则 $[k]^e$ 各元素都落在[K]中由四个元素 K_{ll} 、 K_{lm} 、 K_{mm} 、 K_{ml} 为顶点组成的正方形区域内(图2-8)。这样由单元e产生的半带宽为

$$d^e = m - l + 1 \quad (2-14)$$

从而可得[K]的半带宽

$$d = \max_e \{d^e\} \quad (2-15)$$

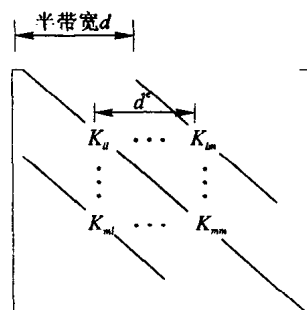


图2-8 带状刚度矩阵[K]

d的大小与结点的编号有很大关系(而与单元编号无关),好的编号可产生较小的半带宽d。当单元的各杆端位移 $\delta_1 \sim \delta_4$ 在结构结点位移 $\{\Delta\}$ 中的位置比较接近,也就是说当单元两端的结点编号比较接近时,半带宽d较小。因此,结点编号时应尽量让单元两端的结点编号接近。

一些大型通用程序一般都具有带宽优化功能,能够经过优化计算后重新对结点编号,以产生较小的半带宽。

由于[K]中半带宽以外的零元素不参加运算(见2.5),当然也不用存贮。因此,采用半带宽存贮既可以节省存贮量,也可以节省计算量。

2.4 位移边界条件的引入

结构中可能有某些点发生指定位移，这时应对结构刚度方程进行处理。

设已知 $\Delta_i = \bar{\Delta}_i$ ，则 P_i 未知。手算时的处理方法是将 $[K]$ 的 i 行 i 列划掉。这种方法在计算机上不适用。因为 $[K]$ 的 i 行 i 列划掉后， $[K]$ 的元素在计算机中的位置发生了变化，要重新排列，较为麻烦。计算机上实际使用的是以下两种方法：

1) 对角元素置 1 法

组集后的结构刚度方程为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (a)$$

将 $[K]$ 的 i 行 i 列置 0，对角线元素 K_{ii} 置 1，右端项 $\{P\}$ 亦作相应修改。即将式 (a) 改成

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 - K_{1i} \bar{\Delta}_i \\ \vdots \\ \bar{\Delta}_i \\ \vdots \\ P_n - K_{ni} \bar{\Delta}_i \end{Bmatrix} \quad (b)$$

按上式就能够求解 $\{\Delta\}$ ，且能保证 $\Delta_i = \bar{\Delta}_i$ 。

2) 对角元素扩大法

将对角元素 K_{ii} 乘以一个大大数（比如 10^{10} ），同时将 P_i 换成 $10^{10} K_{ii} \bar{\Delta}_i$ ，即将式 (a) 改成

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1i} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \cdots & 10^{10} K_{ii} & \cdots & K_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{ni} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ 10^{10} K_{ii} \bar{\Delta}_i \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad (c)$$

上式第 i 个方程为

$$K_{i1} \Delta_1 + K_{i2} \Delta_2 + \cdots + 10^{10} K_{ii} \Delta_i + \cdots + K_{in} \Delta_n = 10^{10} K_{ii} \bar{\Delta}_i$$

由于 $10^{10} K_{ii}$ 较大，故由上式可以得到

$$10^{10} K_{ii} \Delta_i = 10^{10} K_{ii} \bar{\Delta}_i$$

即 $\Delta_i = \bar{\Delta}_i$ 。