职工业余初级中学课本

平面几何

PINGMIAN JIHE

（试用本）

下　　册

人民教育出版社

职工业余初級中学課本

平 面 几 何

（試用本）

下 册

职工业余教育教材編輯組編

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

河北人民出版社重印

河北省新华书店发行

河北人民出版社印刷厂印刷

統一书号：K7012·517 字数：92千

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：$4\frac{1}{4}$

1965年第一版

第一版1966年1月第一次印刷

天津：1—3,900册

定价 0.30 元

目　录

第四章　四边形

第五章　圆

第六章　正多边形

章　相似形

第四章　四边形

I　平行四边形

4.1 多边形　图4.1是从房屋、钳工用的V形铁和六角钢上所看到的一些平面图形. 它们都是由不在同一条直线上的几条线段顺次首尾相接组成的封闭图形. 不在同一条直线上的几

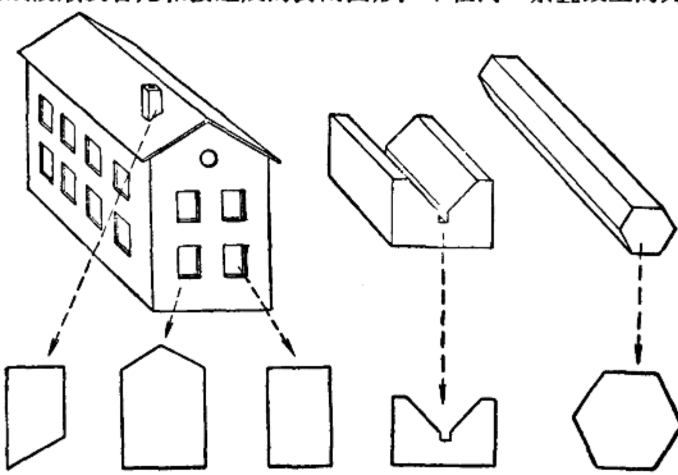


图　4.1

条线段顺次首尾相接所组成的封闭图形叫做**多边形**. 很明显，三角形是一种多边形.

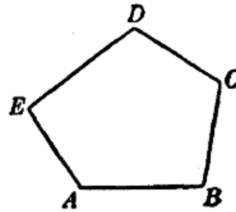
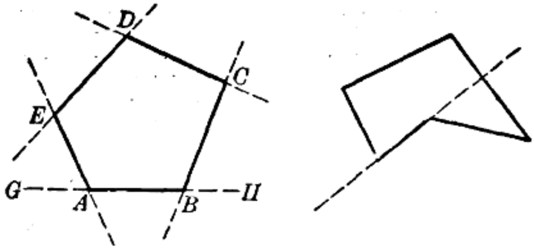


图　4.2

组成一个多边形的各条线段叫做**多边形的边**. 例如，在图4.2中，AB、BC、CD、DE、EA是多边形的边.

把多边形的每一条边向两方延长，如果多边形的其他各边都在延长所得直线的同旁，这样的多边形就叫做**凸多边形**．例如，图 4.3 甲的多边形是凸多边形，图 4.3 乙的多边形就不是凸多边形．



甲　　　　乙

图　4.3

本书所研究的多边形，如果不特别说明，都是指凸多边形．

多边形的相邻两边的公共端点叫做**多边形的顶点**．例如，图 4.2 中的 A、B、C、D、E 是多边形的顶点．

多边形可以用表示它的各顶点的字母来表示，这些字母要按照顶点的排列顺序依次写出，例如，图 4.2 中的多边形记作多边形 $ABCDE$．

多边形的相邻两边所组成的角叫做**多边形的内角**，简称**多边形的角**．例如，在图 4.3 甲中，$\angle EAB$、$\angle ABC$、$\angle BCD$、$\angle CDE$、$\angle DEA$ 都是多边形的角．多边形的角的一边和另一边的反向延长线所组成的角叫做**多边形的外角**．例如，在图 4.3 甲中，$\angle EAG$、$\angle CBH$ 等都是多边形的外角．

连结多边形的不相邻的两个顶点的线段叫做**多边形的对角线**．例如，在图 4.4 中，AD、BE、BF 是多边形的对角线．

多边形各边长度的和叫做**多边形的周长**．例如，在图 4.4 中，$AB+BC+CD+DE+EF+FA$ 是多边形的周长．

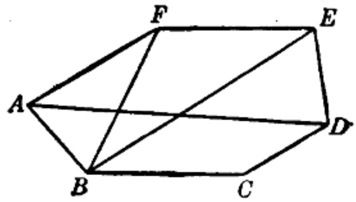


图　4.4

边数多于三条的多边形，按照它的边数，分别叫做**四边形、五边形**等等．

四边形的一条对角线把它分成两个三角形(图 4.5)．因为三角形三个内角的和等于 $180°$，所以，**四边形四个内角的和等于 $360°$**．

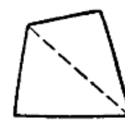


图　4.5

练　习　三十二

1. 一个 n 边形有几个顶点和几个角？从一个顶点画出的对角线有几条？

2. 四边形的周长是 42 cm，四条边的比是 2:3:4:5，求四条边的长．

3. 已知一个四边形的三个角分别等于 $44°$、$92°$ 和 $125°$，求它的第四个角的度数．

4.2 平行四边形　两组对边分别平行的四边形叫做**平行四边形**．例如，在图 4.6 中，$AB\parallel DC$，$BC\parallel AD$，四边形 $ABCD$ 就是平行四边形．

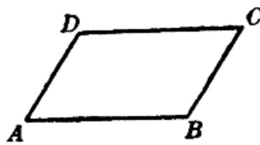


图　4.6

在生活中，我们常常看到平行四边形．例如，在图 4.7 中的铁栅栏门

和花砖的图案上都可以看到平行四边形.

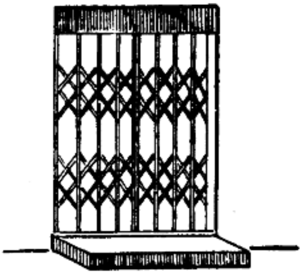


图 4.7

平行四边形用符号“▱”来表示，例如，图 4.6 的平行四边形 $ABCD$ 记作 ▱$ABCD$.

平行四边形对边间的距离叫做**平行四边形的高**.

4.3 平行四边形的性质

平行四边形有下面的一些性质：

(1) 对边相等；

(2) 对角相等；

(3) 两条对角线互相平分.

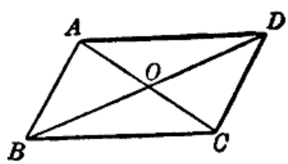


图 4.8

已知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 和 BD 相交于 O (图 4.8).

求证：(1) $AB=CD$, $BC=AD$;

(2) $\angle ABC=\angle CDA$, $\angle BAD=\angle DCB$;

(3) $AO=CO$, $BO=DO$.

证明：

(1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$\because$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$,

$\therefore\quad \angle BAC=\angle DCA, \angle BCA=\angle DAC.$

又 $AC=AC$,

$\therefore\quad \triangle ABC\cong\triangle CDA.$

$\therefore\quad AB=CD, BC=AD.$

(2) $\because\quad \triangle ABC\cong\triangle CDA,$

$\therefore\quad \angle ABC=\angle CDA.$

$\because\quad \angle BAC+\angle DAC=\angle DCA+\angle BCA,$

$\therefore\quad \angle BAD=\angle DCB.$

(3) 在$\triangle AOD$ 和$\triangle COB$ 中,

$\angle AOD=\angle COB.$

上面已经证出

$AD=BC, \angle DAO=\angle BCO.$

$\therefore\quad \triangle AOD\cong\triangle COB.$

$\therefore\quad AO=CO, BO=DO.$

例 1 平行四边形的周长是 20 厘米，相邻两边的比是 3:1，求各边的长.

解: 设平行四边形的较短的一条边长 x 厘米，那么较长的一条边长 $3x$ 厘米. 根据平行四边形的对边相等的性质，得

$$2(3x+x)=20,$$
$$8x=20,$$
$$\therefore\quad x=2.5.$$
$$3x=2.5\times 3=7.5.$$

答: 平行四边形的相邻两边的长是 2.5 厘米和 7.5 厘米.

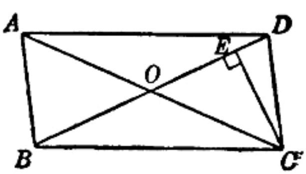


图 4.9

例 2 如图 4.9, $\square ABCD$ 的对

角线 AC 和 BD 相交于 O, $CE \perp BD$, 已知 $CE=3$ cm, $BD=7.2$ cm, $\angle DBC=25^\circ$. 求 BC 和 AC 的长.

解: 在直角三角形 BCE 中,

$$\because \quad \sin CBE=\frac{CE}{BC},$$

$$\therefore \quad BC=\frac{CE}{\sin CBE}=\frac{3}{\sin 25^\circ}=\frac{3}{0.4226}\approx 7.1(\text{cm}).$$

$$\because \quad \operatorname{ctg} CBE=\frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \quad BE=CE \operatorname{ctg} CBE=3\times \operatorname{ctg} 25^\circ=3\times 2.1445 \approx 6.4(\text{cm}).$$

$\because$ 平行四边形的对角线互相平分,

$$\therefore \quad BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 7.2=3.6(\text{cm}).$$

$$\therefore \quad EO=BE-BO=6.4-3.6=2.8(\text{cm}).$$

在直角三角形 OEC 中,

$$OC=\sqrt{EO^2+CE^2}=\sqrt{2.8^2+3^2}=\sqrt{16.84}\approx 4.1(\text{cm}).$$

$$\therefore \quad AC=2OC=4.1\times 2=8.2(\text{cm}).$$

答: BC 和 AC 的长分别是 7.1cm 和 8.2cm.

练 习 三十三

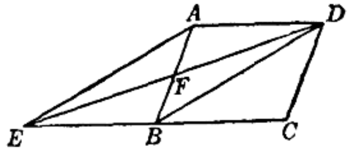
1. 平行四边形的一对相邻的角有什么关系?

2. 如果平行四边形的一组邻边相等, 那么它的四条边是不是都相等? 为什么?

3. 如果平行四边形的一个角是直角, 那么其他的三个角各

等于多少度？

4. 如图，从▱$ABCD$的顶点A作$AE \parallel DB$，和CB的延长线交于E. 连结DE交AB于F. 求证：$BF=AF$.



（第4题）

4.4 平行四边形的判定 我们知道，如果四边形的两组对边分别平行，可以判定这个四边形是平行四边形. 另外，我们还可以根据一些别的条件来判定平行四边形.

一个四边形，如果具有下列条件中的一个条件，这个四边形是平行四边形：

（1）两组对边分别相等；

（2）一组对边平行并且相等；

（3）两条对角线互相平分.

（1）已知：在四边形$ABCD$中，$AB=CD$, $BC=AD$（图4.10）.

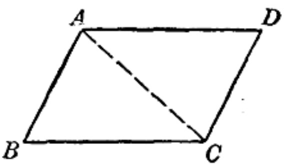


图 4.10

求证：四边形$ABCD$是平行四边形.

证明：连结AC.

在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

$\because$ $AB=CD$, $BC=AD$, $AC=AC$,

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

$\therefore$ $\angle BAC=\angle DCA$, $\angle BCA=\angle DAC$.

$\therefore$ $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$.

$\because$ 两组对边分别平行的四边形是平行四边形，

$\therefore$ 四边形$ABCD$是平行四边形.

(2) 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB=CD$（图4.10）.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：连结 AC.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

∵ $AB \parallel CD$,

∴ $\angle BAC=\angle DCA$.

又 $AB=CD$, $AC=AC$,

∴ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

∴ $BC=AD$.

∵ 两组对边分别相等的四边形是平行四边形，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(3) 已知：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于 O. $AO=CO$, $BO=DO$（图4.11）.

求证：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

∵ $AO=CO$, $BO=DO$,

$\angle AOB=\angle COD$,

∴ $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

∴ $AB=CD$, $\angle BAO=\angle DCO$.

∴ $AB \parallel DC$.

∵ 一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

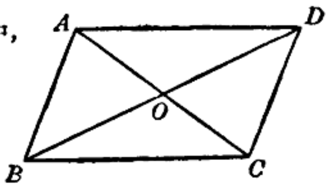


图 4.11

例1 如图4.12，已知：四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都是平行四边形. 求证：四边形 $CDFE$ 也是平行四边形.

证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 都是平行四边形，平行四边形的对边平行并且相等，

∴ $AB \parallel CD, AB=CD$;

$AB \parallel EF, AB=EF$.

∵ 平行于同一条直线的两条直线平行，

∴ $CD \parallel EF$.

又 $CD=EF$.

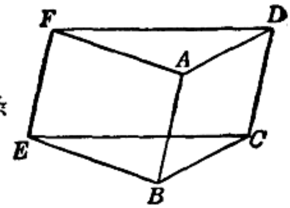


图 4.12

∵ 一组对边平行并且相等的四边形是平行四边形，

∴ 四边形 $CDFE$ 是平行四边形.

例 2 作一个平行四边形，使它的一条对角线等于 28mm，这条对角线和两条邻边的夹角分别等于 44° 和 35°.

作法:

1. 作$\triangle ABD$，使 $BD=28$mm，$\angle ABD=44°$，$\angle ADB=35°$（图 4.13）.

2. 作 $DE \parallel AB$，$BF \parallel AD$，DE 和 BF 相交于 C.

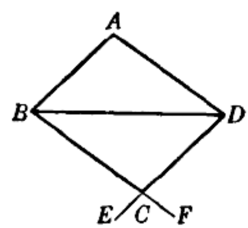


图 4.13

四边形 $ABCD$ 就是所求作的平行四边形.

从上面的例子可以看出，要作一个符合已知条件的平行四边形，可以先根据已知条件作出一个三角形，再以它为基础，作出所求作的平行四边形.

例 3 如图 4.14，▱$ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 相交于 O，E 和 G 分别是 AO 和 CO 的中点，F 和 H 是 BD 上的两点，并且 $BF=DH$. 求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：∵ 平行四边形的两条对角线互相平分，

∴ $AO=CO, BO=DO$.

∵ E、G 分别是 AO 和 CO 的中点，

∴ $EO=\frac{1}{2}AO,\quad GO=\frac{1}{2}CO$.

∴ $EO=GO$.

∵ $FO=BO-BF$,

$HO=DO-DH$,

又 $BF=DH$,

∴ $FO=HO$.

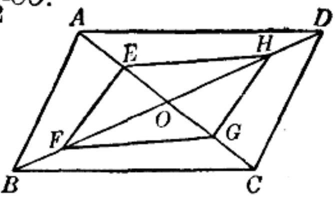


图 4.14

在四边形 $EFGH$ 中，$EO=GO, FO=HO$.

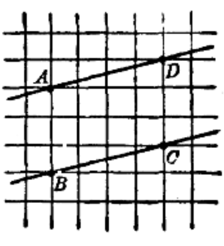
∵ 两条对角线互相平分的四边形是平行四边形，

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

练　习　三十四

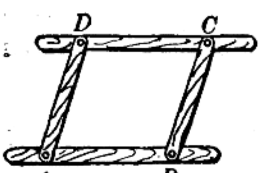
1. 四个角都是直角的四边形，是不是平行四边形？为什么？

2. 延长△ABC 的中线 AD 到 E，使 $DE=AD$，并且连结 BE 和 CE. 为什么四边形 $ABEC$ 是平行四边形？



（第 3 题）

3. 如图，A、B、C、D 是方格纸上的四个点，为什么直线 AD 和 BC 是平行的？



（第 4 题）

4. 画平行线可以用平行尺（如图）. 它是用四根木尺做成的，在 A、B、C、D 处用螺丝钉连接起来，并且 $AB=DC$,

$AD=BC$. 无论怎样活动尺子，它的相对两尺 AB 和 DC 总是平行的. 这是什么道理？

4.5 逆定理 我们讲过下面的两个定理:

(1) 平行四边形的两条对角线互相平分.

(2) 如果一个四边形的两条对角线互相平分，那么这个四边形是平行四边形.

现在把这两个定理的条件和结论列表如下:

	条　　件	结　　论
(1)	一个四边形是平行四边形	这个四边形的两条对角线互相平分
(2)	一个四边形的两条对角线互相平分	这个四边形是平行四边形

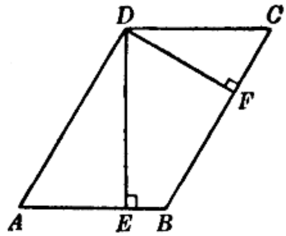
从上面的表里我们可以看到，一个定理的条件和结论分别是另一个定理的结论和条件. 象这样的两个定理叫做**互逆的定理**. 把其中的一个定理作为**原定理**，那么另一个定理就是它的**逆定理**. 例如，上面所说的定理(1)和(2)互为逆定理，把定理(1)作为原定理，定理(2)就是它的逆定理. 又如，“平行四边形的对边相等”和“两组对边分别相等的四边形是平行四边形”，这两个定理也互为逆定理.

必须注意，把一个定理的条件和结论调换后所得到的，不一定还是正确的，就是说不一定能够成为原定理的逆定理. 所以，并不是所有的定理都有逆定理. 例如，把“对顶角相等”这个定理的条件和结论调换，得出的“相等的角是对顶角”就不是正确的. 也就是“对顶角相等”这个定理没有逆定理.

习题二十七

1. 已知平行四边形的一个角比另一个角大 30°，求它的各个角的度数.

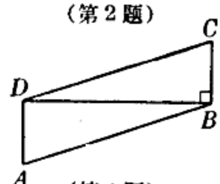
2. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$DE \perp AB$，$DF \perp BC$，$\angle EDF = 60°$，求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 和 $\angle CDA$ 的度数.



（第 2 题）

3. 已知：E、F 是 $\square ABCD$ 的对角线 AC 上的两点，并且 $AE = CF$. 求证：$DE = BF$.

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中，$BD = 120\text{mm}$，$\angle ABD = 19°$，$\angle DBC = 90°$，求 $\square ABCD$ 的各边的长.

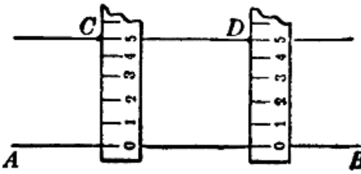


（第 4 题）

5. 已知平行四边形的一个角等于 30°，一条边等于 18mm，这边上的高等于 60mm. 求这个平行四边形的其余三边的长和另一条高，以及这个平行四边形的面积.

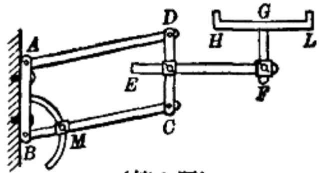
6. 已知 $\square ABCD$ 的两条对角线相交于 O，线段 EF 过 O 点，并且和 AB、DC 分别相交于 E 和 F. 求证：$OE = OF$.

7. 要在工件上划一条直线，使它和已知直线 AB 平行，并且距离等于已知尺寸 d. 老师傅用下面的方法来划：如图，先在直线 AB 的同一旁，作出和 AB 的距离等于 d 的两个点 C 和 D，然后过 C 和 D 作直线，这就是所求的直线. 试说明这个划法的道理.



（第 7 题）

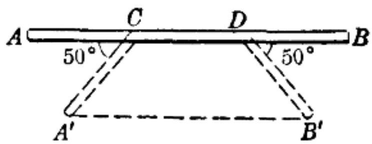
8. 附图表示装在直立的墙壁上的支架. AB 和 CD 的长相等，AD 和 BC 的长相等，$EF\perp CD$, $GF\perp EF$, $HL\perp FG$. 支架可以利用M处的螺栓升高或降低，但是工作台 HL 始终保持水平的位置. 为什么?



（第 8 题）

9. 在两个同心圆中，AB 和 CD 分别是大、小两圆的直径，并且它们不在同一直线上. 求证：四边形 $ACBD$ 是平行四边形.

10. 如图，一根钢条 AB 的长是 225 cm，把它在两个三等分点处 C 和 D 向同旁折转 $50°$ 角，求这根钢条折转后两端 A'、B' 的距离.



（第 10 题）

11. 作一个平行四边形，使它的两条邻边分别等于 35mm 和 24mm，一个角等于 $60°$.

12. 作一个平行四边形，使它的两条邻边分别等于 15mm 和 23mm，一条对角线的长等于 18mm.

13. 作一个平行四边形，使它的两条对角线的长分别等于 20mm 和 36mm，一条边的长是 15mm.

14. 下面的各定理有没有逆定理？为什么？

(1) 等腰三角形的两个底角相等.

(2) 两条平行线和第三条直线相交，内错角相等.

(3) 在三角形中，如果有一个角是直角，那么其余的两个角都是锐角.

(4) 在直角三角形中，斜边大于任何一条直角边.

Ⅱ 几种特殊的平行四边形

4.6 长方形 有一个角是直角的平行四边形叫做**长方形**，**也叫做矩形**（图 4.15）．因为长方形是一种特殊的平行四边形，所以它具有平行四边形的一切性质．此外，长方形还具有下面的特殊性质：

(1) 长方形的四个角都是直角．

(2) 长方形的两条对角线相等．

图 4.15

已知：四边形 $ABCD$ 是长方形（图 4.16）．

求证：(1) $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90^\circ$；

(2) $AC=BD$．

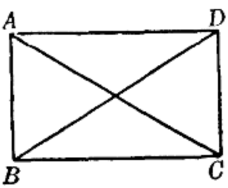


图 4.16

证明：

(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是长方形，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，并且有一个角是直角．

设 $\angle ABC=90^\circ$．

∵ 平行四边形的对角相等，

∴ $\angle CDA=\angle ABC=90^\circ$．

∵ 两条平行线和第三条直线相交，同旁内角的和等于 180°，

∴ $\angle BCD=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$；

$\angle DAB=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$．

因此 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90^\circ$