运动的稳定性

〔苏联〕H. Г. 契塔耶夫著

国防工业出版社

运动的稳定性

Н. Г. 契塔耶夫著

王光亮譯

國防工業出版社

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社（Гостехиздат）1955年出版Н.Г.契塔耶夫所著的Устойчивость Движения第二版譯出，可供数理方面一般参考之用。

全書共分十章，計有：稳定性問題，里雅普諾夫直接法的一般定理，在位勢力之下的平衡的稳定性，論常系数綫性微分方程，干扰力对于平衡的作用，初步近似的稳定性，有一个零根的情形，有一对純虛根的情形，非稳恒的运动，周期运动等；对于运动的稳定性有深入細致的討論。因此，亦可用作数学，物理，力学各专业的选修教材。

本書由昆明工学院王光亮同志譯出，并由云南大学張燮同志校訂。

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ
〔苏联〕Н.Г.Четаев
ГИЗТЕХ 1955 第二版
*
运动的稳定性
王光亮譯
*
国防工業出版社 出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
国防工业出版社印刷厂印装
*
$850\times1168\ 1/32$　印張 $6\ 1/8$　154千字
1959年3月第一版　1965年2月第二次印刷　印数：2,401—3,650册
統一书号：15034·269　定价：（科八-1）1.20元

目　录

原　　序

稳定性問題，在原理上与应用上都有它的价值。在工程技术与物理学中，經常会遇到关于稳定性的問題；求解这些問題时必須采用里雅普諾夫的精确方法，因为对于它們采用比較粗率的方法是不能令人滿意的。就日常的工程实踐而言，里雅普諾夫的方法及其应用的研究是越来越必要的了。

上面的理由，决定了本書所追求的基本目的之一。在本書里面，叙述了里雅普諾夫的一些研究，作者認为它們对于运动稳定性的应用問題是最重要的。但作者并不打算把所得到的一切結果都講出来。我們只是叙述里雅普諾夫的結果而不加粉飾；列举常系数綫性微分方程組理論中的必要知識；叙述它的某些結果。有些例子（关于飞机的縱向稳定性等等）是由具有无穷个自由度的系統的周知的模型化出发的，我們列举了这种例子而未討論模型化是否正确。

我們經常引証里雅普諾夫的著作"关于运动稳定性的一般問題"；为了方便起見，用本書各节号碼后面的方括号中的数字代表上述著作的相应节数。

本書第二版是第一版的重印本；这里改正了一些发現了的印刷錯誤，并将某些問題代以其他問題。

在本書第一版刊行以后，关于运动稳定性理論方面又有許多新成就，这些成就在第二版中并沒有談到。要完全描述它們，是需要很多書籍的；在下列諸家的精心巨著中都未能将它們講得完全

---

❶ Немыцкий В.В. и Степанов В.В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949。

❷ Малкин И.Г., Методы Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949。

Малкин И.Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952。

詳尽：В.В.涅梅茨基与В.В.斯捷班諾夫❶、И.Г.瑪尔金❷、А.И.卢里耶❶、Г.Н.杜波辛❷、М.А.爱泽尔曼❸、Ф.Р.剛特瑪赫❹、А.М.列多夫❺。此外，Н.Н.波格留波夫、К.П.别尔西茲基，Н.П.叶茹金、М.Г.克列因、Е.А.巴尔巴辛、Н.Н.克拉索夫斯基以及其他学者的研究，都值得按照各个作者的特殊风格来另写专書。

---

❶ Лурье А.И.,Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехизбат, 1951。

❷ Дубошин Г.Н., Основы теории устойчивости движения, Изд-во МГУ, 1952。

❸ Айзерман М.А.,Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, 1952。

❹ Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Гостехиздат, 1954。

❺ Летов А.М.,Устойчивость нелинейных регулируемых систем, Гостехиздат. 1955。

第一章　稳定性問題

两个注解

1．动力学是关于物質系統的实际平衡与运动的科学。伽里略和牛頓发現了它的原理，并由重体下落的实驗与行星运动的观測来証明了它們的可靠性。但对应于平衡方程与运动微分方程的严密数学解案的力学系統的每种状态，却不一定全与实际情形相符。例如說，任何人都沒有看見过，重鉛笔能够用削尖的一端豎立在光滑的水平桌面上。对应于类似的严格解案的状态之所以不能实現，原因是这样的：在物質系統的初始状态中，有未曾考慮到的小力与微小的偏差出現，它們实际上不可避免地存在着，而且对于平衡与运动的影响有时很弱，有时很强。在扰动之下变更得很小的平衡与运动叫做稳定的，反过来便是不稳定的。

在力学里面，并沒有一般的原則，用来选擇对应于稳定状态的解案；它具有关于理想化系統的科学的特性，而在将它精确地用到自然界时，原則上每次都要解决稳定性的問題。托里契利在他那个时代所考慮的重体靜力学中提出了一种原理，这种原理的来源远在上古，利用它只能給出稳定的平衡位置。

托里契利原理的产生，是由于另一种原理，这种原理可以用来解决靜力学的各种問題而很便利。它的內容如下：在保持平衡的重体組中，重心是处在侭可能最低的位置的❶。

在动力学中并沒有类似的原理，用来选擇对应于稳定运动的严格解案，虽然有許許多多杰出的力学家們都研究过稳定性問題，如拉格朗日，凱尔文勛爵，劳斯，茹可夫斯基，邦加萊等。拉格朗日推广了托里契利原理而証明了力学系統的孤立平衡的稳

❶ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т.1, ч.1, отдел первый, n°16。譯自法文，第2版，Гостохиздат，1950。

定性定理，当作用于系統的力的力函数在这个平衡位置上具有极大値时。劳斯发展了循环坐标的略去法，并将上述拉格朗日定理加以簡单的轉換而找出了某些循环运动的稳定性判断法。

里雅普諾夫在他的名著“关于运动稳定性的一般問題”中（卡尔科夫，1892年）❶，解决了按古典形式提出来的运动稳定性的一般問題。

2. 工程技术也提出了关于付諸实現的計划的实际性問題，而这种計划本質上是根据設計的力学系統的平衡方程或者运动微分方程的某些解案的。由于这些問題必須解决，使得技术人員不可避免地要遇到稳定性問題，原因是这样的：在作設計时，一定有某些假設随之而生，而工程結构本身，却必須在計划中所未完全考虑到的作用力之下工作。

例如，倘若要造旅客飞机，那么对于它的計划运动必須要保証一定的稳定性，使得所造成的飞机在航行时能够保持平稳，而在起飞与着陆时都不致发生意外。傳动杆軸必須如此計算，使得不論在发动机的实际操作情形下发生何种振动，它都不会由于振动而損坏。欲使大炮最灵敏而准确，必須制造如此的大炮，炮彈与炸葯，使得炮彈的彈道具有一定的稳定性与正規性。

我們还可以举出很多例子，它們都指出了如此的事实：在解决关于实际运动的問題时，必須从力学方程的可能解案中保留对应于稳定状态的解案，而且当我們在实际上打算避免某个解案时，可以用适当的方法将力学系統的构造稍加修改，使得对应于这个解案的状态是不稳定的。

問題的提出

3. ［1］❷. 我們考虑一个全定的力学系統。假設$q_1, \cdots, q_k$是

❶ Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950。

❷ 象在序文中所講过的，方括号中的数字代表A.M.里雅普諾夫的著作的相应节数。

它的独立的拉格朗日坐标，而 $q'_1, \cdots, q'_k$ 是广义速度。在动力学問題中，当力已經用一定的方式給出时，各个变数 q_j 便滿足某組 k 个二阶常微分方程。这組方程的特解

$$q_j = f_j(t) \qquad (j=1,\cdots,k)$$

对应于所論系統的某种确定的运动。在一定的方面将这种运动与所論系統在同样的力之下的其他可能运动相比較，那么上述运动叫做无扰运动，而与它比較的其余各种运动叫做受扰运动。

假設 t_0 是初始时刻，而 q_{j0} 与 q'_{j0} 代表变数 q_j 及其关于时間的导数 q'_j 的初始值。假設对于无扰运动而言，我們有

$$q_{j0} = f_j(t_0), \qquad q'_{j0} = f'_j(t_0),$$

而对于受扰运动，則有

$$q_{j0} = f_j(t_0) + \varepsilon_j, \qquad q'_{j0} = f'_j(t_0) + \varepsilon'_j,$$

其中 ε_j，ε'_j 是某些实常数，我們規定叫它們做干扰值。給出了这些常数时，受扰运动便完全决定，因为作用于系統上的力是假定不变的。

所謂接近于无扰运动的受扰运动，便是如此的运动，其中的干扰值相当小。此时对于与无扰运动接近的受扰运动而言，这两个运动中的坐标 q_j 和速度 q'_j 在初始时刻 t_0 都是相差很小的（根据定义），而由連續性可知，在与 t_0 相接近的时刻 t 它們也相差很小，但在离 t_0 相当远的时刻，这种差值却不一定很小。

受扰运动与无扰运动的偏差，在实际上可由某些与运动有关而在观測或者实驗中能够測量出来的数量的差値看出来。有时所观測的数量并非坐标 q_j 与速度 q'_j，为了不致遺漏此种情形起見，我們考虑数量 q_j, q'_j 与时間 t 的某些已知的連續实函数 $Q_1, \cdots, Q_n$。对于无扰运动而言，将函数 Q_s 施以代换 $q_j = f_j(t)$ 与 $q'_j = f'_j(t)$ 以后，它們便成为 t 的某些已知函数，我們用 $F_1, \cdots, F_n$ 来表示这些函数；又对于受扰运动而言（对于它們保留以前的記号

Q_s），它們却成为时間 t 与干扰值 ε_j，ε'_j 的某些函数。

当一切干扰值 ε_j，ε'_j 都等于零时，不論 t 为何值，差式

$$x_s = Q_s - F_s$$

也都等于零。但若干扰值 ε_j，ε'_j 不全为零而假定它們都可以任意小，那么便有如此的問題发生：是否可以找出一組任意小的常数，使得差式 x_s 的絕对值永远不大于它們。

我們专講如此的情形：所論問題的解案，是与干扰开始发生的初始时刻 t_0 无关的。茲列举里雅普諾夫的定义如下：

設 $L_1, \cdots, L_n$ 为一組任意給定的正数。倘若对于任何 L_s 而言，不論它們多么小，总可以找出一組如此的正数 $E_1, \cdots, E_k$，$E'_1, \cdots, E'_k$，使得对于滿足条件

$$|\varepsilon_j| \leqslant E_j, \qquad |\varepsilon'_j| \leqslant E'_j$$

的任何干扰值 ε_j，ε'_j 与任何大于 t_0 的 t 而言，都成立着不等式組

$$|Q_s - F_s| < L_s,$$

那么无扰运动关于数量 $Q_1, \cdots, Q_n$ 便是稳定的；在相反的情形下，則为不稳定。

也可能有这样的情形发生：倘若所考慮的干扰值是完全任意的，則滿足上述定义的界限 E_j，E'_j 便找不出来；但对于滿足某种限制条件

$$f = 0 \text{ 或 } f > 0$$

的干扰值而言（这里 f 是干扰值 $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ 的某个函数，当所有一切干扰值都等于零时，这个函数也等于零），上述界限却可以找得到。在这种情况下，我們說，无扰运动关于受到上述限制的干扰值是稳定的。

在里雅普諾夫稳定性的定义中，利用了数目的概念而不是无穷小量的概念。因此，里雅普諾夫稳定性概念的要旨，并不在于

当干扰值 $\varepsilon_j, \varepsilon'_j$ 趋近于零时 $|Q_s-F_s|$ 值的变化性質，而在于当給定了关于无扰运动的函数Q_s的稳定性差式$|Q_s-F_s|$的数值估計时估計干扰值的数值。这样，我們便不能肯定，当数目 ε_j，ε'_j 趋近于零时，按里雅普諾夫意义的稳定性具有在无穷小干扰值之下的无穷小稳定性的极限意义。

受扰运动的方程

4. 稳定性問題的解法是与差式

$$x_s=Q_s-F_s$$

所滿足的微分方程的研究有关的。我們規定，把这些方程叫做受扰运动的方程，而它們的明显解案$x_1=0,\cdots,x_n=0$叫做无扰运动。倘若稳定性問題是对于力学系統的独立变数来研究的，那么由受扰运动的微分方程便可以定出这些变数的偏差或者变分的变化規律。

作为一个例子，我們考虑某个全定的力学系統，它受到具有力函数的力的作用。設$q_1,\cdots,q_k$为此系統的坐标，$p_1,\cdots,p_k$是冲量，而$H(t,q_1\cdots,q_k,p_1,\cdots,p_k)$是罕密尔登函数。此时运动方程可以写成周知的典則形式：

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\qquad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}。$$

假定我們打算取一个对应于典則方程的特解

$$q_j=q_j(t),\quad p_j=p_j(t)$$

的运动，而就变数q_j,p_j来研究它的稳定性。此时对于受扰运动而言，坐标q_j与冲量p_j的值便是：

$$q_j=q_j(t)+\xi_j,\quad p_j=p_j(t)+\eta_j,$$

其中ξ_j,η_j分别为q_j,p_j的偏差或者变分。为了簡便起見，我們用q_j,p_j来代表函数$q_j(t),p_j(t)$，并注意到，受扰运动也是所論系

統在同样的力之下的运动之一，于是我們便有下列方程:

$$\frac{d(q_j+\xi_j)}{dt}=\frac{\partial H(t,q_i+\xi_i,p_i+\eta_i)}{\partial p_j},$$

$$\frac{d(p_j+\eta_j)}{dt}=-\frac{\partial H(t,q_i+\xi_i,p_i+\eta_i)}{\partial q_j},$$

其中利用了如次的簡写記号:

$$H(t,q_i+\xi_i,p_i+\eta_i)=$$
$$=H(t,q_1+\xi_1,\cdots,q_k+\xi_k,p_1+\eta_1,\cdots,p_k+\eta_k)。$$

将上列方程右边按照微小偏差 ξ_j,η_j 展开为泰勒級数，并利用无扰运动的方程，則得

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\partial p_i}\eta_i\right)+X_j,$$

$$\frac{d\eta_j}{dt}=-\sum_i\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial p_i}\eta_i\right)+Y_j,$$

其中X_j,Y_j代表倚賴于偏差ξ，η 的高于一次的項。这就是受扰运动的方程。倘若在上列方程里面略去X_j,Y_j各項，那么所余的初步近似式也叫做邦加萊变分方程。

当我們提出力学系統的所論无扰运动关于某些函数$Q_1,\cdots,Q_n$的稳定性問題，而这些函数倚賴于 t，q,p并且关于q,p是解析函数时，則由明显的差式

$$x_s=Q_s(t,q_i+\xi_i,p_i+\eta_i)-Q_s(t,q_i,p_i)=$$
$$=\sum_i\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial Q_s}{\partial p_i}\eta_i\right)+\cdots$$

可以推出

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial Q'_s}{\partial q_i}\xi_i+\frac{\partial Q'_s}{\partial p_i}\eta_i\right)+\cdots,$$

其中Q'_s代表函数Q_s关于时間的完全导数，它們是按照运动方程而取的:

$$Q'_s = \frac{\partial Q_s}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_s}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)。$$

倘若各个函数Q_s彼此独立，而且它們的个数是$n=2k$，那么按照前列关系式将ξ_i, η_i用x_s表出时，即可将受扰运动的微分方程化为正規形式:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s,$$

其中X_s是$x_1, \cdots, x_n$的解析函数，其系数为时間的已知函数，而且当各个变数x_s都等于零时，函数X_s也等于零。

也有这种情形发生：倘若所研究的函数Q_s的个数n小于力学系統的自由度的二倍，那么受扰运动的方程也可能化为正規形式。我們現在假設数目n与函数Q_s是这样的，使得受扰运动的方程可以化为上述正規形式。

5.〔2〕. 以后我們要講受扰运动的微分方程

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{1}$$

它們是由力学系統的原有运动方程以及函数Q_s的形式导出的；此时假設：任一組数值相当小的实干扰值$\varepsilon_j, \varepsilon'_j$都对应于变数$x_s$的某組初始实数值$x_{s0}$，并且不論給出一个如何小的正数$A$，我們总可以使上述$x_{s0}$滿足不等式

$$\sum_s x_{s0}^2 < A,$$

只要令干扰值$\varepsilon_j, \varepsilon'_j$的絶对值不超过相当小而不为零的数目$E_j$，$E'_j$即可。我們还要假設，不論所給的正数$E_j$，$E'_j$如何小，总可以找出一个如此的正数$A$，使得不大于$A$的数目$x_{10}^2 + \cdots + x_{n0}^2$对应于一組或者几組实数$\varepsilon_j$，$\varepsilon'_j$，而它們的絶对值$|\varepsilon_j|$，$|\varepsilon'_j|$分别小于$E_j, E'_j$。

在这种假設之下，变数x_s的初始值x_{s0}在求解稳定性問題时所占的地位与$\varepsilon_j, \varepsilon'_j$相同，只要滿足方程（1）的变数$x_s$的初始值$x_{s0}$是完全給定的即可。我們永远假設这个条件成立；因此，

以后永远可以用x_{s0}来代替ε_j，ε'_j，并将x_{s0}叫做干扰值。

我們假設：对于任何 $t>t_0$ 而言，受扰运动的微分方程（1）的右边都可以展开为变数 $x_1,\cdots,x_n$ 的整次方冪的收斂級数，只要后者满足条件

$$\sum_s x_s^2<A$$

即可，此时并設所論級数的系数 p_{sr}，$P_s^{(m_1\cdots m_n)}$是 t 的确定的連續实函数，即

$$X_s=p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n+\sum P_s^{(m_1\cdots m_n)}x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n},$$

其中$\sum$是对于满足条件

$$m_1+\cdots+m_n>1$$

的一切非負整数$m_1,\cdots,m_n$来求和的。

里雅普諾夫稳定性的定义，可以用如次的方式轉述于变数 x。倘若对于任給的正数 A 而言，不論它多么小，总可以找出如此的正数 λ，使得任取一組满足条件

$$\sum_s x_{s0}^2\leqslant\lambda$$

的干扰值$x_{10},\cdots,x_{n0}$与任取一个大于t_0的 t 值时，不等式

$$\sum_s x_s^2<A$$

都能成立，那么无扰运动便叫做稳定的；在相反的情形下，则为不稳定。

在稳定性的定义中作了如此的假設：干扰力并不具有这样的意义，使受扰运动也在决定无扰运动时所考虑的同样外力的作用下而施行；又数目 A 是随意的，而且可以任意小。

倘若无扰运动是稳定的，那么在稳定性的定义中所說的条件便成立，它們可能由小而有限的A与 λ 开始。

里雅普諾夫对于 λ 值能够有多大的問題并不感兴趣，虽然他

在証明他的稳定性定理时，曾經对于确定的并有上界的数目 A 而給出了一种实际上合用的方法来作出 λ。

在干扰力之下的稳定性問題是沒有意义的，倘若这些力是毫无約束的話。如果干扰力在各种情形下变化得很少，使得它們的变化不影响函数 X_s 中的一次項，那么便有一个在实用上很重要的初步近似的稳定性問題发生，它与函数 X_s 中所含高于一次的項无关。这个問題已被里雅普諾夫解决了，而且在他的解法中获得了主要的成就。

第二章　里雅普諾夫直接法的一般定理

某些定义

6. 里雅普諾夫所发展的研究稳定性的直接方法，并不在于求出受扰运动的微分方程的积分，而在于找出变数 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的某些函数，使得它們关于时間 t 的完全导数由于方程（1）而具有某些性質。

里雅普諾夫認为，他的这种方法是与邦加莱的重要著作"論微分方程所定的曲綫"❶的研究有关的。

7.〔15〕. 我們要考虑实变数 $t, x_1, \cdots, x_n$ 的实函数，而这些变数是满足条件

$$t \geqslant t_0 \text{ 与 } \sum_s x_s^2 \leqslant H \tag{2}$$

的，其中 t_0 与 H 都是常数，并且恒設 H 不等于零。此时我們永远假設，这些函数都是連續而单值的，并且当各个变数 x_s 全为零时，它們也等于零。

倘若在条件（2）之下（其中 t_0 选得相当大而 H 相当小），所論的函数 V 除了能取零值以外，只能取得同号的值，那么 V 便叫做常号的函数。如果还愿意指出它的符号，那么我們便說，它是正号的或者負号的。

如果常号函数 V 不倚賴于 t，而常数 H 可以选得相当小，使得在条件（2）之下，只有当所有一切变数 x_s 都等于零时函数 V 才会等于零，那么这样的 V 便叫做定号函数，而且为了指出它的符号起見，可以叫它做正定的或者負定的。

明显地依賴于 t 的函数 V，只有在如次的条件下才能叫做

❶ Пуанкаро А., О кривых, опроделяомых дифференциальными уравнениями, Гостехиздат, 1947。