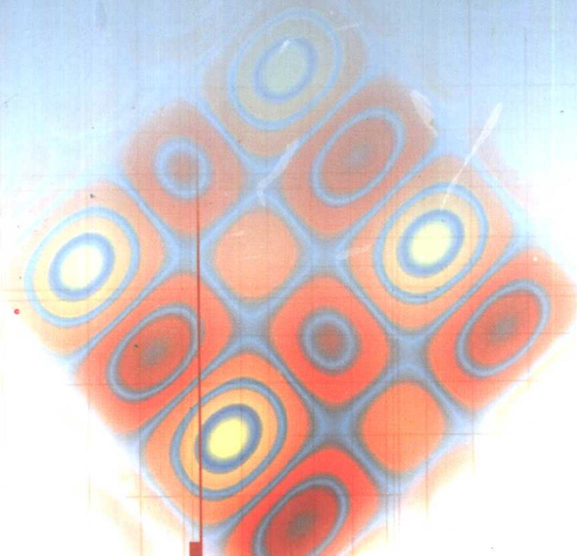
线性代数习题课教程

解题方法、技巧与证明

林升旭



华中科技大学出版社

线性代数习题课教程

——解题方法、技巧与证明

华中科技大学出版社

2002

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题课教程—解题方法、技巧与证明/林升旭
武汉:华中科技大学出版社，2002年5月
ISBN 7-5609-2657-6
Ⅰ．线…
Ⅱ．林…
Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．O151.2

线性代数习题课教程—解题方法、技巧与证明 林升旭

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:张兴田 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室
印 刷:武汉市首壹印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:11 字数:264 000
版次:2002年3月第1版 印次:2002年5月第2次印刷 印数:5001—10000
ISBN 7-5609-2657-6/O·250 定价:12.80元

前 言

学习“线性代数”的读者会有这样的感受：概念甚多，定理（结论）密集，方法灵活，演算技巧性强，容易出错，特别对于一些论证问题，不知如何入手. 这的确是学习该课程中普遍存在的问题，究其原因，作者认为主要有两点：其一是目前课内教学学时偏紧，教学进度快，课堂上几乎没有充足的演题和指导的时间，因而读者对所学知识未能理顺综合、融汇贯通. 其二是本课程内在的特征. 线性代数主要研究的对象是矩阵及线性变换，矩阵的运算与我们习以为常的数的运算尽管有相同之处，但又有较大的反差. 符号抽象，运算和变换灵活，而且一些基本概念和定理具有相当多的等价命题，这些命题其实也是求解及论证问题的思路和方法.（例如第二章 § 2. 2 内容提要中列举的 n 阶可逆矩阵主要充要条件的命题就多达五个以上）. 因此如果没有经过一定系统地演练，则很难谈得上对该课程内容的理解掌握，运用自如. 因而如何能较好地掌握线性代数的基本概念，基本方法与理论，运用最佳解法，准确快速地切入题目，是每一个读者亟待解决的问题. 作者根据目前工科高等学校线性代数课程教学基本要求，结合多年从事该课程教学实践的经验和资料积累，博采众长，编写了这本教学辅导书，以期能指导读者学习和复习考试，帮助读者拓宽思路，掌握各种题型的解题方法和技巧，提高解题速度和能力.

本书编写的结构体系如下：

[内容提要] 概述了每一节的基本概念，基本方法和基本定理.

[疑难解答] 解答读者在学习过程中存在的疑惑问题，纠正通常易错的运算.

[例题解析] 为强化每节的主要内容，精选同步题型，归类、解析、比较、总结，指出解题思路和最佳做法.

[综合范例] 题型有填空题，选择题，计算题和证明题.其中有相当数量的几何与代数相关联的例题，也有历年来全国考研的代表性题目.例题综合性强，方法更具技巧性.

[自测题，答案与提示] 选取了相当数量的模拟考题，其中有全国考研的部分考题，也有我们在历年教学中的部分试题.各题给出了答案及简单解析，以供读者自测自检.

本书题目涵盖面广，典型丰富，并做了分类，从基础到综合，循序渐进，逐步展开.解题力求简明清晰，易学易懂，本书是学习该课程和考研复习的读者的良师益友，也是年轻教师教学辅导的参考书.

在编写过程中，得到了华中科技大学于寅教授等人的大力帮助和悉心指导，在此表示衷心的感谢.

限于作者的水平，其中错漏不足之处有所难免，敬请读者赐教指正.

编　者

2002年元月于华中科技大学

目 录

第一章 行 列 式

§1.1 n 阶行列式的概念及性质

一、内容提要

1. 排列的逆序

定义 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 元排列. 在一个 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果一对数前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，则称这两个数构成一个**逆序**，这个排列中逆序个数的总和就称为该**排列的逆序数**，记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$.

2. 排列的奇偶性及对换性质

定义 一个排列的逆序数为奇(偶)数，称此排列为奇(偶)排列.

在一个排列中，交换两个数字的位置，其余数字不动，称对排列做一次**对换**. 相邻两数字的对换称为**邻换**.

(i) 一次对换改变排列的奇偶性.

(ii) 任一个 n 元排列都可经过有限次数的对换变为自然排列，且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同.

(iii) 全体 n 元排列的个数为 $n!$ 个，奇排列与偶排列数各一半.

3. n 阶行列式的定义

定义 n^2 个数 $a_{ij}=(i,j=1,2,\cdots,n)$. 排成 n 行 n 列的如下形式的一个数

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\sum_{[i_1\cdots i_n]}(-1)^{\tau[i_1 i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

称为 n 阶行列式，有时记 $D=\det A$. 其中乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的 n 个元素取之不同行不同列，其符号由列下标排列的逆序 $\tau[i_1,i_2,\cdots,i_n]$ 确定.

对角行列式，上(下)三角行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. n 阶行列式的性质

1) **转置** $D^{\mathrm{T}}=D$

2) **数乘** 用数 k 乘行列式等于将行列式的某一行(列)的元素都乘 k 倍. 或者说行列式中的一行(或列)有公因数 k，则把 k 提到行列式外面来.

3) **对换** 把行列式任两行(列)对换，则行列式变号.

4) **拆项** 行列式的 i 行(列)的每个元素都为两个元素之和，则该行列可表为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

5) **消元** 将行列式一行(列)的 k 倍加到另一行(列),其值不变.

推论 1 如果行列式中有两行(列)相同,则行列式为零.

推论 2 如果行列式中两行(列)成比例,则行列式为零.

理解并能较熟练的运用行列式的性质,是化简行列式和计算行列式最重要的一环.

二、例题解析

1. 排列逆序,奇偶性及对换

例 1.1-1 计算下列排列的逆序数,并讨论奇偶性.

(1) 2 6 4 3 5 1;　　　(2) 4 1 5 3 7 2 6;

(3) $n(n-1)\cdots 21$;　　　(4) $1\,3\,5\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots 42$.

解 计算排列的逆序,一种是从后面往前依次计算各数字的逆序数,另一种是从前面往后面计算各数字的逆序数.这里用前一种方式计算.

(1) 在排列 2 6 4 3 5 1 中,数字"1"有 5 个逆序,数字"5"有 1 个逆序,数字"3"有 2 个逆序,数字"4"有 1 个逆序,数字"6"有 0 个逆序,数字"2"有 0 个逆序,即

$$\tau[2\ 6\ 4\ 3\ 5\ 1] = 5+1+2+1+0+0=9,$$

该排列为奇排列.

同理可算

(2) $\tau[4\ 1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6] = 1+4+0+2+0+1+0=8$,

该排列为偶排列.

(3) $\tau[n, n-1, \cdots, 2, 1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+$

$1=\frac{n(n-1)}{2}$,该排列当 $n=4k,n=4k+1$ 为偶排列,当 $n=4k+2,n=4k+3$ 时为奇排列.

(4) 对于排列 $13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42$ 中,前面 n 个数字 $13\cdots2n-1$ 为顺序排法,只考虑后 n 个偶数的逆序就行了. 数字"$2n$"的逆序为0,"$2n-2$"的逆序为2,数字 $2n-4$ 的逆序为4,…,数字"4"的逆序为 $2n-4$,数字"2"的逆序为 $2n-2$,故

$$\begin{aligned}&\tau[13\cdots(2n-1)2n(2n-2)\cdots42]\\&=0+2+4+\cdots+2n-2\\&=2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1).\end{aligned}$$

不论 n 为奇数和偶数,$n(n-1)$ 为偶数,故该排列为偶排列.

例 1.1-2 问 i,j 取何值,排列 $32i4j6$ 为偶排列.

解 排列 $32i4j6$ 中,i,j 可取数字为两种情况,(1) $i=1,j=5$, (2) $i=5,j=1$. 当 $i=5,j=1$,则排列逆序为

$$\tau[3\ 2\ 5\ 4\ 1\ 6]=0+4+1+0+1+0=6.$$

该排列为偶排列. 而 $i=1,j=5$,对应的排列则为奇排列.

例 1.1-3 求下列五阶行列式的对应项所带的符号.

(1) $a_{13}\,a_{41}\,a_{52}\,a_{34}\,a_{25}$, (2) $a_{21}\,a_{43}\,a_{12}\,a_{54}\,a_{35}$.

解 1) 将项的元素所处的行下标按自然顺序排列为

$a_{13}\,a_{41}\,a_{52}\,a_{34}\,a_{25}\rightarrow a_{13}\,a_{25}\,a_{34}\,a_{41}\,a_{52}$,列下标排列的序为

$$\tau[3\ 5\ 4\ 1\ 2]=3+3+1+0+0=7,$$

排列为奇排列,该项带负号.

$a_{21}\,a_{43}\,a_{12}\,a_{54}\,a_{35}\rightarrow a_{12}\,a_{21}\,a_{35}\,a_{43}\,a_{54}$,列下标排列的序为

$$\tau[2\ 1\ 5\ 3\ 4]=1+1+0+1+0=3,$$

排列为奇排,故该项带负号.

例 1.1-4 写出 4 阶行列式中含 a_{23} 且带负号的那些项.

解 在 4 阶行列式中,含因子 a_{23} 的项其形式为:$a_{1i_1}\,a_{23}\,a_{3i_3}\,a_{4i_4}$,其中 i_1,i_3,i_4 任取 1,2,4 的一个数字. 故对应项的列下标排列有 6 个,其逆序为:

$\tau[1\ 3\ 2\ 4] = 1 + 0 = 1$, $\quad \tau[1\ 3\ 4\ 2] = 2 + 0 = 2$,

$\tau[2\ 3\ 1\ 4] = 2 + 0 = 2$, $\quad \tau[2\ 3\ 4\ 1] = 3$,

$\tau[4\ 3\ 1\ 2] = 2 + 2 + 1 = 5$, $\tau[4\ 3\ 2\ 1] = 3 + 2 + 1 = 6$,

故含 a_{23} 带负号的三项为

$$- a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, \quad - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}, \quad - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

例 1.1-5 设排列(Ⅰ)$i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为 k，求排列(Ⅱ)$i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数.

解 设排列(Ⅰ)$i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，i_1 的逆序为 k_1，由逆序定义知，在 i_1 后面比 i_1 小的数有 k_1 个，也即有 $(n-1)-k_1$ 个顺序，则在排列(Ⅱ)$i_n \cdots i_2 i_1$ 中，i_1 的逆序为 $(n-1)-k_1$. 同样设排列(Ⅰ)中，i_2 的逆序为 k_2，即有 $(n-2)-k_2$ 个顺序，则在排列(Ⅱ)中 i_2 有 $(n-2)-k_2$ 个逆序，…，依此类推，i_{n-1} 在排列 Ⅱ 中有 $[n-(n-1)]-k_{n-1}$ 个逆序，i_n 有 $(n-n)-k_n$ 个逆序. 而 $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$，于是排列(Ⅱ)的逆序为

$$\begin{aligned}\tau[i_n i_{n-1} \cdots i_1] &= [(n-1)-k_1] + [(n-2)-k_2] + \cdots \\ &\quad + (1-k_{n-1}) - k_n \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - (k_1 + k_2 + \cdots + k_n) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} - k.\end{aligned}$$

例 1.1-6 证明在全体 n 元排列中，奇偶排列的个数相等.

证 方法一 设全体 n 元排列中，奇排列集合为 V_1，偶排列集合为 V_2，任取奇排列 V_1 中的一个排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$，将数字 i_p，i_q 对换，其余不动，得出新排列 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 是一个偶排列，因而新排列属于集合 V_2. 反之，取偶排列集合 V_2 中的一个排列作对换，所得新排列为奇排列，属于 V_1，故集合 V_1 与 V_2 的排列一一对应，奇偶排列个数相等，且各为$\frac{n!}{2}$.

方法二 设 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$,

由行列式的定义，D_n 的 $n!$ 项的每一项的绝对值为 1，$D_n=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2,\cdots i_n)}1=0$，$D_n$ 展开式中 1 和 -1 的个数要相等，则 n 元排列 $[i_1i_2\cdots i_n]$ 奇偶个数相等.

Ⅱ．用行列式的定义计算行列式

例 1.1-7 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

证 若行列式的通项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}=0$，则行列式为零.

注意到上行列式通项中后三元素 $a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$ 的行下标取之第 3，4，5 行，而列下标 $i_3i_4i_5$ 取 1，2，3，4，5 中的三个，这必至少取到 1，2，3 中的一个，因而 $a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$ 必取到行列式左下角零块中的一个 0 元. 故行列式的每一项为零，证得行列式值为零.

例 1.1-8 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & .\cdot^{\cdot} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 **方法一** 用定义法：

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau[n,n-1,\cdots,2,1]}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} \end{aligned}$$

方法二 邻换法：把 D 的 n 列，$n-1$ 列，…2 列，1 列依次经 $n-1$，$n-2$，…，2，1 次邻换成新的行列式的 1 列，2 列，…，$n-1$ 列，n 列，即

$$D = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

方法三　对换法：当 n 为奇数，把 D 的 1 列与 n 列对换，2 列与 $n-2$ 列对换，…，共经过$\frac{n-1}{2}$次对换，变成对角行列式.

$$D = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1},$$

当 n 为偶数，经$\frac{n}{2}$次对换，使

$$D = (-1)^{\frac{n}{2}}\begin{vmatrix} a_{1n} & & & \\ & a_{2n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

两式合并为

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理有

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & ⋰ & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 1.1-9　用行列式的定义求下列行列式中 x^4，x^3 的系数.

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & x+2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & x+3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$.

解　考虑行列式的第一行元素. 含 $a_{11}=x+1$ 的项只有主对角线上元素之积 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 中才有 x^3,x^4,事实上 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+10x^3+35x^2+50x+24$,其余项所含 x 的次数不大于 2.

对于含 $a_{12}=5$ 的项中因不含主对角元 $a_{11}=x+1$,$a_{22}=x+2$,故含 a_{12} 的项中 x 的次数皆不大于 2. 同理含 a_{13},a_{14} 的项中,x 的次数也皆不大于 2. 故行列式中 x^3 的系数为 10,x^4 的系数为 1.

$$(2)\ \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & x & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau[i_1i_2i_3i_4]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}.$$

考虑行列式第一行元素,行列式含 $a_{11}=x$ 的各项中有一项为

$$(-1)^{\tau[1324]}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=(-1)x\cdot 2\cdot x\cdot x=-2x^3,$$

其余项的 x 的次数不大于 2. 含 $a_{13}=x^2$ 的各项中有一项为

$$(-1)^{\tau[3421]}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=(-1)^5x^2\cdot 5\cdot x\cdot 2=-10x^3$$

而其他项的 x 的次数不大于 2. 类似分析可知,含 a_{12} 或 a_{14} 的项皆不含 x^3,x^4,故行列式中 x^3 的系数为 $-2-10=-12$,x^4 的系数为 0.

另法:考察行列式第一列元素.

对含 $a_{11}=x$ 有一项为 $(-1)^{\tau[1324]}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-2x^3$,其他项次数 x 的皆不大于 2. 对含 $a_{41}=2$ 有一项为 $(-1)^{\tau[3421]}a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}=-10x^3$,其他项 x 的次数皆不大于 2.

故行列式中含 x^3 的系数为 -12,x^4 的系数为 0.

Ⅲ. 利用行列式性质计算行列式

例 1.1-10　计算下列行列式

$$(1)\ D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}.\qquad (2)\ \begin{vmatrix} 1 & p & q & r+s \\ 1 & q & r & p+s \\ 1 & r & s & p+q \\ 1 & s & q & p+r \end{vmatrix}.$$

解 (1) 利用消元性质,将第 1 行(－3)倍加到第 3 行上,再由第 3 行与第 2 行成比例,得

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-2&-4&-6\\5&4&8&1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\5&4&8&1\end{vmatrix}=0.$$

(2) 根据行列式的特点,将第 2,3 列加到第 4 列上,再由第 4 列与第 1 列成比例,得

$$D_2=\begin{vmatrix}1&p&q&p+q+r+s\\1&q&r&p+q+r+s\\1&r&s&p+q+r+s\\1&s&q&p+q+r+s\end{vmatrix}$$

$$=(p+q+r+s)\begin{vmatrix}1&p&q&1\\1&q&r&1\\1&r&s&1\\1&s&q&1\end{vmatrix}=0.$$

例 1.1-11 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&1+x&-1\\1&x-1&1&-1\\1+x&-1&1&-1\end{vmatrix}.$$

解 行列式每行元素之和都为 x,故把第 2、3、4 列都加到第 1 列上,提取因子.

$$D=\begin{vmatrix}x&-1&1&x-1\\x&-1&1+x&-1\\x&x-1&1&-1\\x&-1&1&-1\end{vmatrix}$$