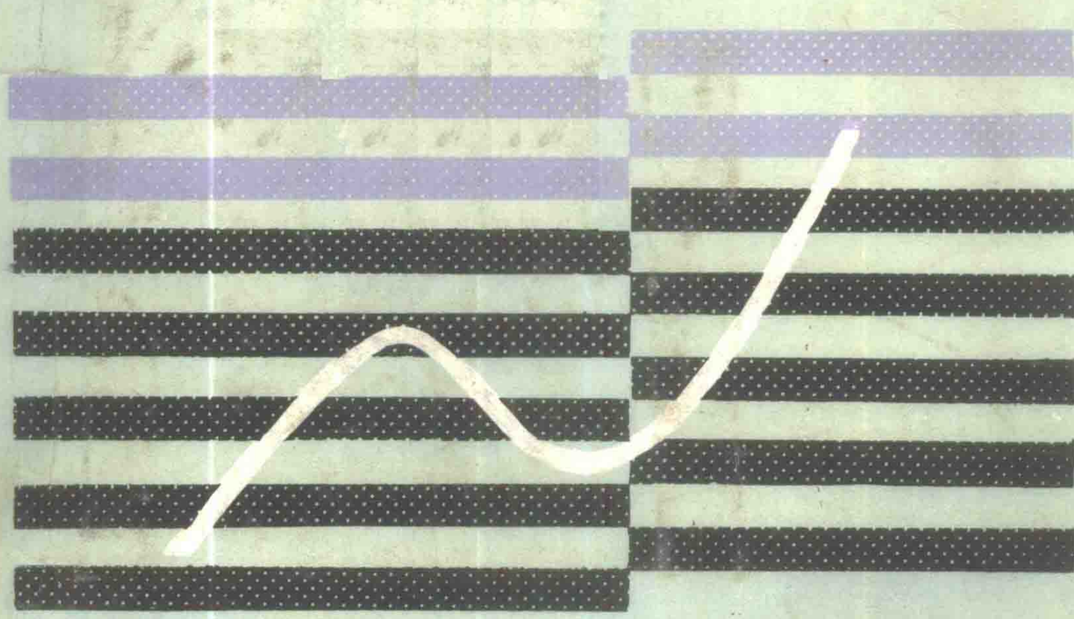
高等学校教材

高等数学

上册

主编 汪浩

副主编 孙兴 刘森石



国防科技大学出版社

高 等 学 校 教 材

高等数学

GAODENG SHUXUE

上 册

●主　编　汪　浩

●副主编　孙　兴　刘森石

●国防科技大学出版社

内 容 简 介

本书是根据国家教委1987年公布的“高等数学课程教学的基本要求”和国防科技大学制订的“高等数学教学大纲”，在总结了卅余年教学实践经验的基础上编著而成的。全书分为上、下两册。上册包括一元函数微积分、矢量代数与空间解析几何；下册包括多元函数微积分、级数、广义积分与含参数积分、常微分方程等。

本书十分重视基础理论和基本运算，合理地配备了质量、数量、类型相互兼顾的例题和习题，重点章节还选有难度较大的综合题目。本书适合作高等工科院校本科生教材，也是各类专业人员，高教自学考生的一本较好的数学参考书。

高 等 数 学

上 册

主　　编　汪 浩

副 主 编　孙 兴　刘森石

责任编辑　王松林

封面设计　陆荣斌

●

国防科技大学出版社出版发行

湖南省新华书店　经销

国防科技大学印刷厂　印装

●

开本：787×1092　1/16　印张：$20\frac{1}{4}$　字数：471千字

1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷　印数：00 001～5 000册

ISBN 7-81024-035-8

O·4　　定价：3.40元

前　言

本书为总结我校三十五年来高等数学的教学和教材建设的经验，在我校原基础数学教研室于1984年编写的《高等数学》（第一、二、三册）的基础上，根据国家教委1987年公布的“高等数学课程教学基本要求”、我校新制订的“高等数学教学大纲”和广大读者的意见改编而成。全书分上、下两册。上册的内容为一元函数微积分、矢量代数与空间解析几何；下册的内容为多元函数微积分（含线、面积分）、级数（含福里哀级数）、广义积分与含参数积分、常微分方程。

本书重视加强基础理论，注意培养读者具有初步的抽象思维、准确表述和逻辑推证的能力。函数、极限、连续三章中的定义、定理都着重运用数学语言和数量形式给予精确的表述。函数一章加深了单调性、有界性的内容，给出了无界概念的精确表述。章末写了“命题、充要条件”的附录。极限一章中通过大量例子和五个定理，从不同角度加深读者对极限概念的理解和运用。不过分引导读者根据ε如何找N和δ，而侧重于培养读者正确运用极限的概念和理论，以求逐步提高抽象思维和推理论证的能力。介绍了数列极限与其子数列极限的关系。在极限存在定理一节中，增加了确界概念，并以“有上界的数列必有唯一的上确界”为公理，推证了“有界数列必有确界”、“单调有界数列必有极限存在”、数e以及柯西准则的必要条件。我们认为增加的这些内容，不仅是高等数学中较为重要的基本概念和基本理论，而且是现代数学的基础知识。高级工程技术和科研人员，在大学的学习中接触或根本不接触这些知识，对今后的工作和学习将会产生很大的差异。何况这些知识的学习，对于开发读者的智力，培养读者的能力是大有俾益的。一致连续概念、隐函数存在定理、重积分的一般变换、含参数积分等内容，都基于上述的考虑做了介绍。这些内容在书中都有相对的独立性，使用本书时可酌情取拾。

本书充分注意到，重要的概念和理论只有经过必要的反复，才能使读者理解和掌握。对极限、连续两章中的重要概念、理论和方法，有意识地在微分学应用、级数、含参数积分等后续内容中通过例题和习题适当地反复运用。有些习题是为后续内容的讲解做准备而配置的。

本书十分重视基本运算，采取适当加强综合运算的办法提高读者基本运算的能力。极限运算的重点放在用两个重要极限和等价代换的综合运算上。微分法的重点是熟练掌握复合函数的微分法。积分法的重点是变量替换法和分部积分法，而其中凑微分法又是熟练掌握积分法的基础。对微分法和积分法不仅选有大量的例题和习题，而且配有检查熟练程度的综合运算题。此外，本书每节都配有一定质量、足够数量和不同类型的习题。前六章的每章后还选了一定难度的综合题。每册书后附有习题答案或提示。上册后附有常用的平面曲线的图形。

本书执笔者，第一章至第六章为刘森石副教授，第七章至第九章为孙兴副教授，第十章至第十四章为梅志强副教授，第十五、十六章为阎岘峰副教授，第十七章为李志申副教授，第十八章为蔺文彪副教授，第十九章为符积桄副教授。所有各章由孙兴、刘森石俩同志分别统审，沙钰副教授复审，最后由汪浩教授定稿。此外在复审中吴克裘教授、李运樵教授阅读了部分内容；在改编过程中得到我校系统工程与应用数学系领导和国防科技大学出版社的大力支持，在此一併致谢。限于编者水平，书中的缺点和不当之处在所难免，恳切地希望广大读者予以批评指示，俾再版时改进。

编　者

一九八七年十一月于国防科技大学

目　录

第一章　函　　数

1.1　实数与区间

一、实　数

中学里已学过集合（简称**集**）的基本知识。诸如集的概念、集的元素、集的表示法、空集、子集、相等集以及集的运算等知识，假定读者都已经熟悉。下面介绍实数系的一些知识。

高等数学里所论的“数”，如无特别声明都指实数。所论的“集”是实数集，简称**数集**，用希腊字母 Ω 或其它字母来表示。全体实数所成的集，称为**实数系**，常用 $\boldsymbol{R}$ 记之。实数系由有理数系和无理数系所组成。有理数系是由全体正整数、负整数、正分数、负分数和零所组成的集，常记为 $\boldsymbol{Q}$. 全体正整数（自然数）、负整数和零所组成的集，称为**整数系**。

凡有理数都可写成 p/q 的形式，其中 p 为整数，q 为正整数，且 p、q 互质。无理数不能写成这种形式。

在实数系里，任何两个实数之间，有且只有大于、小于、等于三者之一的关系成立，称为**实数系的有序性**。

全体实数与数轴上的点是一一对应的，即每一实数恰好对应数轴上的一个点，数轴上每一个点恰好对应一个实数。有理数在数轴上对应的点称为**有理点**，无理数在数轴上对应的点称为**无理点**。与数轴上的点相对应的数称为该**点的坐标**。实数既然与数轴上的点一一对应，因此，今后常把实数 a 和在数轴上代表它的点不加区别，把实数 a 常说成点 a 或 a 点。

任何两个相异的有理数 a 与 b 之间，必存在别的有理数，例如 $(a+b)/2$. 因而它们之间有无穷多个有理数。同样，任何两个相异的无理数之间也必存在无穷多个有理数。

实数的代数运算法则和有理数的代数运算法则一样，不再赘述。

二、实数的绝对值

实数 x 的绝对值记为 $|x|$，**定义**为

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

它有下述**基本性质**：

（1）对于任何数 x，恒有 $|x|\geqslant 0$. 当且仅当 $x=0$ 时才有 $|x|=0$.

(2) 对于任何数 x，恒有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(3) 设 $|x|\leqslant A$ $(A>0)$，则 $-A\leqslant x\leqslant A$ $(A>0)$；反之，设 $-A\leqslant x\leqslant A$ $(A>0)$，则 $|x|\leqslant A$ $(A>0)$.

(4) 对于任何两个数 x 及 y，恒有

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|;\qquad |x+y|\geqslant ||x|-|y||;$$
$$|xy|=|x||y|;\qquad |x/y|=|x|/|y|\ (y\neq 0).$$

下面只证(3)与(4)的前两式，其余留给读者证明。

[证](3) 因 $|x|\leqslant A$ $(A>0)$，故当 $x\geqslant 0$ 时，有 $0\leqslant x\leqslant A$；当 $x<0$ 时，有 $0<-x\leqslant A$，即 $-A\leqslant x<0$. 因此，无论那种情形，恒有 $-A\leqslant x\leqslant A$ $(A>0)$.

反之，因 $-A\leqslant x\leqslant A$ $(A>0)$，故当 $x\geqslant 0$ 时，有 $|x|=x\leqslant A$；当 $x<0$ 时，有 $-|x|=x\geqslant -A$，或即 $|x|\leqslant A$. 因此，无论那种情形，恒有 $|x|\leqslant A$ $(A>0)$.

[证](4)的第一式。由(2)，恒有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$ 及 $-|y|\leqslant y\leqslant |y|$. 从而恒有

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|.$$

当 x，y 不同时为零时，$|x|+|y|>0$，由性质(3)恒有 $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；当 x，y 同时为零时，关系显然成立。故恒有 $|x+y|\leqslant |x|+|y|$（此式称为**三角不等式**）。

[证](4)的第二式。由 $|x|=|x+y+(-y)|\leqslant |x+y|+|y|$，得 $|x|-|y|\leqslant |x+y|$；同理，又得 $|y|-|x|\leqslant |x+y|$，或即 $|x|-|y|\geqslant -|x+y|$. 总之，恒有

$$-|x+y|\leqslant |x|-|y|\leqslant |x+y|.$$

即恒有 $|x+y|\geqslant ||x|-|y||$. 证毕。

三、区间与点的邻域

在高等数学里常用的数集是区间与点的邻域。

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ $(a<b)$ 的一切数 x 所组成的数集 $\Omega=\{x|a\leqslant x\leqslant b\ (a<b)\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$. 在数轴上它表示由点 a 到点 b 的线段上点的全体。

同理，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b). 在数轴上它表示由点 a 到点 b 但不包含点 a 和点 b 的线段上点的全体。

类似地，定义**半开半闭区间** $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 及 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；**无穷区间** $(-\infty,+\infty)=\{x|\text{一切数 } x\in R\}$，$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$ 及 $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$.

满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ $(\delta>0)$ 的一切数 x 所组成的数集，称为**以点 x_0 为中心的 δ 邻域（简称点 x_0 的 δ 邻域）**。由于不等式 $|x-x_0|<\delta$ $(\delta>0)$ 与不等式 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ $(\delta>0)$ 等价，故点 x_0 的 δ 邻域就是开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ $(\delta>0)$.

有时需要将点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0，即 $0<|x-x_0|<\delta$ $(\delta>0)$ 或 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$.

习 题 1.1

1. 试证，对于任何二数 x 与 y，恒有

$$|x-y|\geqslant ||x|-|y||.$$

2. 试证，对于任何三数 a、b_1、b_2，恒有

$$\left|\sqrt{a^2+b_1^2}-\sqrt{a^2+b_2^2}\right|\leqslant|b_1-b_2|.$$

若将(a,b_1)、(a,b_2)视为平面直角坐标系中两点的坐标，问此不等式有何几何意义？

3. 用数学归纳法证明不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{(*)}.$$

4. 证明，设数$x>-1$，则对于大于1的自然数n，恒有$(1+x)^n\geqslant1+nx$.

5. 对于任何数a_i、$b_i$$(i=1,2,\cdots,n)$，试证明柯西(Cauchy)—施瓦兹(Schwarz)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

1.2 函数的概念

在考察某种事物运动过程或生产过程时，常会遇到两种不同的量，一种量在过程中不断变化，可以取不同数值，叫做**变量**；另一种量在过程中保持不变只取某一定值，叫做**常量**。事物的运动是绝对的，静止是相对的。常量也是相对的。例如，重力加速度g实际上是变量，却常看成常量。正如把静止看成运动的特例一样，常量也可看成变量的特例。

研究一个问题时，常涉及好几个变量，它们之间往往是相互依赖的。在高等数学里，主要研究变量之间一种确定的依赖关系，即所谓**函数关系**。下面介绍由罗巴契夫斯基(H.N.Lobachevsky)与狄利克莱(P.Dirichlet)提出的函数定义。

定义1.2.1 设有两个变量x与y，其中x取值范围为数集Ω_x，如果存在一个法则f，按此法则，对于Ω_x中的每一个x值，总可唯一确定y的值与之对应，则称**变量y是定义在Ω_x上关于变量x的函数**，记为

$$y=f(x)\qquad(x\in\Omega_x).$$

变量x称为**自变量**，变量y又称为**因变量**，数集Ω_x称为**函数的定义域**，法则f称为**函数关系**，对于Ω_x中的每一个x值，因变量y的一切对应值所组成的数集Ω_y称为**函数的值域**。

对于确定的$x_0\in\Omega_x$，记号$f(x_0)$表示变量y对应于$x=x_0$的对应值，称为**函数$y=f(x)(x\in\Omega_x)$在点x_0处的函数值**。

函数的定义域是自变量的取值范围。只要研究函数，首先要明确它的定义域。同一个函数关系，由于定义域不同就是不同的函数。

函数关系f的表达方式是多种多样的，常见的有解析法、图示法及列表法三种。

为了加深对函数概念的理解，介绍几个今后常用的函数。

例 1 设有一克冰，温度为-10℃，将冰加热，温度逐渐上升到0℃，化成水，再将水温上升到10℃．试求当温度t由-10℃到10℃变化时，所吸收的热量Q关于温度t的函数表达式。

［解］ 由物理学知，冰的热容量为0.5，水的热容量为1．从0℃的冰化成0℃的水

(*) “Σ”读作Sigma，它是求和的缩写记号，即

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

需要吸收80卡的热量。

设 $t=-10$℃ 时热量 $Q=0$. 则当温度 t 从 -10℃ 升高到0℃时，热量为 $Q=0.5(t+10)$，$-10\leqslant t<0$；当温度从0℃上升到 10℃时，热量为 $Q=5+80+t$，$0<t\leqslant 10$；当温度 $t=0$℃时，热量 Q 没有定义。故所求的热量 Q 关于温度 t 的函数表示式为

$$Q=\begin{cases}0.5t+5, & -10\leqslant t<0\\ t+85, & 0<t\leqslant 10.\end{cases}$$

（单位为卡）。

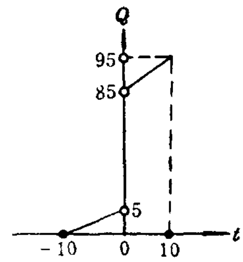


图 1.1

这个函数的定义域是数集 $\Omega_t=[-10,\ 0)\cup(0,\ 10]$，法则 f 是分段给出的，函数的表示式也分段用不同的两个代数式表示。其图形如图1.1所示。

例 2 x 的符号函数又称正负号函数（Signum）规定为

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域 $\Omega_x=(-\infty,\ +\infty)$. 它的图形如图1.2所示。

例 3 "整数部分"函数（又称方括弧函数）规定为

$$y=[x]=n,\ (n\leqslant x<n+1,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

它的定义域 $\Omega_x=(-\infty,+\infty)$. 它的图形如图1.3所示。

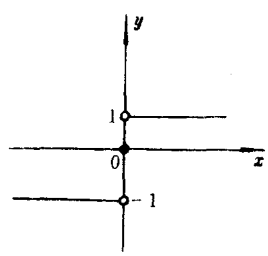


图 1.2

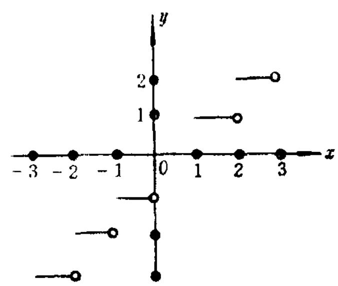


图 1.3

例 4 狄利克莱用如下法则给出一个函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

称为狄利克莱函数。它的定义域 $\Omega_x=(-\infty,\ +\infty)$.

例 5 在边长为 a 的正方形铁皮的四角上各截去边长为 x $(0<x<a/2)$ 的正方形，然后摺起成高为 x 的无盖方盒。求此盒子的容积 V 关于边长 x 的函数表示式。

[解] 此函数的表示式为

$$V=x(a-2x)^2,\ 0<x<a/2.$$

此例中如果不指出 $0<x<a/2$，一般理解函数 $V=x(a-2x)^2$ 的定义域为区间 $(-\infty,\ +\infty)$（即使右端式子成立的一切 x 值），那就不是所求的函数了。

最后，再强调一下函数符号$f(x)$的意义。例如函数$f(x)=(1+\sqrt{x^2+1})/x\ (x>0)$的法则$f$表示

$$f(\quad)=\frac{1+\sqrt{(\quad)^2+1}}{(\quad)},\ (\quad)>0.$$

即括弧中的量作右端的代数运算。因此，有

$$f(a)=\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a},\ a>0.$$

当$a>0$时，有

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1+\sqrt{(1/a)^2+1}}{1/a}=a+\sqrt{1+a^2};$$

$$f[f(a)]=\frac{1+\sqrt{(f(a))^2+1}}{f(a)}=\frac{1+\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{a^2+1}}{a}\right)^2+1}}{(1+\sqrt{a^2+1})/a}$$

$$=\frac{a+\sqrt{2\sqrt{1+a^2}(\sqrt{1+a^2}+1)}}{1+\sqrt{a^2+1}}.$$

又例如函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$$

的法则f表示

$$f(\quad)=\begin{cases}2(\quad)+1, & (\quad)\geqslant 0\\ (\quad)^2-1, & (\quad)<0.\end{cases}$$

因此，$f(-1)=(-1)^2-1=0$；$f(1/2)=2(1/2)+1=2$；

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1, & x-1\geqslant 0\\ (x-1)^2-1, & x-1<0,\end{cases}$$

即

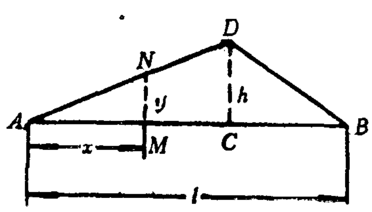
$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant 1\\ x^2-2x, & x<1.\end{cases}$$

习 题 1.2

1. 在半径为R的球内作一个同中心的内接圆柱体。试将此圆柱体的体积v表为圆柱体的高x的函数。

2. 底半径分别为3米，2米和1米，高都是5米的三个圆柱体，把大的放在最下面，按大、中、小的次序把圆柱迭起来成为阶梯圆柱体。试将高为h的阶梯圆柱体的横截面S表为高h的函数。

3. 长为l的弦，两端A、B固定，在C点处（$AC=c$）将弦沿着垂直AB的方向提高h。设$AM=x$表示弦上任意点M的原来位置，$MN=y$表示M点升高的高度。试将高y表为x的函数。



题

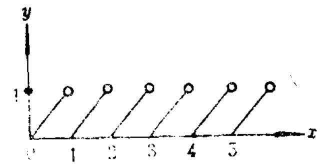
4. 已知一物体与地面的摩擦系数为μ，物体质量为m。设有一与水平方向成θ角的拉力F使物体由静止开始移动。试将拉力F表为角θ的函数。

5. 作出下列函数的图形

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$； (2) $f(x)=x-[x]$；

(3) $f(x)=\sin 2x$； (4) $f(x)=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

6. 在电子技术中经常会遇到如图所示的锯齿波。试写出函数 $y=y(x)$ 的分析表示式.



题 6

7. 单位阶梯函数的定义是

$$H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

求函数 $y=H(x)-H(x-1)$ 的表达式，并作出它的图形。

8. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0, a\neq 1, -\infty<x<+\infty)$. 证明 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$.

9. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求函数 $f(2x)$，$f(x-1)$ 及 $f(2x)+f(x+1)$ 的表示式，并分别作出它们的图形。

10. 设函数 $M(x)=\{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)\}/2$. 证明

$$M(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant g(x) \text{ 时}\\ g(x), & \text{当 } f(x)<g(x) \text{ 时。}\end{cases}$$

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形已知。试画出函数 $M(x)$ 的图形。

1.3 函数的简单性质

了解一个函数具有某些性质（如单调性、有界性、奇偶性、周期性等），对分析研究它时会带来方便。

一、函数的单调性

定义 1.3.1 函数 $f(x)$ $(x\in\Omega_x)$ 在数集 $\Omega(\Omega\subset\Omega_x)$ 上递增（递减）是指：对于数集 Ω 中的任意两数 x_1 及 x_2，且 $x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),\quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

例 1 证明函数 $f(x)=\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是递增的。

［证］ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 中任取两数 x_1 及 x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$\sin x_2-\sin x_1=2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}.$$

由于 $(x_1+x_2)/2\in(0,\pi/2)$，$(x_2-x_1)/2\in(0,\pi/2)$，故 $\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$，$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0$.

因此 $\sin x_2>\sin x_1$，$(x_1<x_2)$. 即函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上递增。

定义 1.3.2 函数 $f(x)$ $(x\in\Omega_x)$ 在数集 $\Omega(\Omega\subset\Omega_x)$ 上不减（不增）是指：对于数

集Ω中的任意两数x_1及x_2，且$x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2),\quad (f(x_1)\geqslant f(x_2))\ .$$

例 2 证明函数$f(x)=[x]$在区间$(-\infty,+\infty)$上是不减的。

[证] 在$(-\infty,+\infty)$中任取x_1及x_2，且$x_1<x_2$，则必有$[x_1]\leqslant x_1<x_2$，即$[x_1]<x_2$；又由于$[x_2]$为不超过x_2的最大整数。故必有$[x_1]\leqslant[x_2]$．即$f(x)=[x]$在$(-\infty,+\infty)$上是不减的。

在数集上不减或者不增的函数，通称为在该数集上的**单调函数**；而把在数集上递增或递减的函数，称为在该数集上的**严格单调函数**。容易推知，在数集上递增（递减）的函数必是该数集上的不减（不增）函数。其逆不真。

二、函数的有界性

定义 1.3.3 函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集$\Omega(\Omega\subset\Omega_x)$上有界是指：**存在正常数$M$,对于$\Omega$中的一切$x$，恒有$|f(x)|\leqslant M$.**

定义 1.3.4 函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集$\Omega(\Omega\subset\Omega_x)$上有上（下）界是指：**存在常数$M(m)$，对于$\Omega$中的一切$x$，恒有$f(x)\leqslant M$ $(f(x)\geqslant m)$.**

例 3 试证明，函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\Omega\subset\Omega_x)$上有界的充分必要条件是函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\Omega\subset\Omega_x)$上既有上界又有下界。

[证] 必要性。由于函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\Omega\subset\Omega_x)$上有界，即存在正常数M，对于Ω中的一切x，恒有$|f(x)|\leqslant M$．即恒有$-M\leqslant f(x)\leqslant M$．这表明函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集$\Omega(\Omega\subset\Omega_x)$上既有上界$M$又有下界$-M$．

充分性。由于函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω上有上界，即存在常数M，对于Ω中的一切x，恒有$f(x)\leqslant M$；又由函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω上有下界，即存在常数m，对于Ω中的一切x，恒有$f(x)\geqslant m$．从而对于Ω中的一切x，恒有$m\leqslant f(x)\leqslant M$．若$m=M=0$，则$f(x)\equiv 0$ $(x\in\Omega)$，于是取正数$K=1$,对于Ω中的一切x，恒有$|f(x)|\leqslant K=1$；若m与M不全为零，取正常数$K=\max\{|M|,|m|\}$(*)，对于Ω中的一切x，恒有$-K\leqslant-|m|\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M\leqslant|M|\leqslant K$．即对于Ω中的一切$x$，恒有$|f(x)|\leqslant K$．总之，存在正常数$K$，对于Ω中的一切$x$，恒有$|f(x)|\leqslant K$．即函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω上有界。证毕。

如果函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集$\Omega(\subset\Omega_x)$上不是“有界”，则称**$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\subset\Omega_x)$上无界**。这就是说，不存在正常数M，使得对于Ω中的一切x，恒有$|f(x)|\leqslant M$．换言之，不论什么正数M，对于Ω中的一切x,不可能恒有$|f(x)|\leqslant M$．或说，对于任何正数M，在Ω中总有数x_M，使得$|f(x_M)|\leqslant M$不成立，即使得$|f(x_M)|>M$成立。于是可给出如下的详细定义。

定义 1.3.5 函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\Omega\subset\Omega_x)$上无界是指：**对于任何正数M，总有数$x_M\in\Omega$，使得$|f(x_M)|>M$.**

同理，函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$在数集Ω $(\Omega\subset\Omega_x)$上无上(下)界是指：**对于任何数$M(m)$，总有数$x_M\in\Omega(x_m\in\Omega)$使得$f(x_M)>M(f(x_m)<m)$.**

(*) $\max\{|M|,|m|\}$表示数$|M|$与$|m|$中最大数．max是maximum的缩写；同样，$\min\{a,b,c\}$表示数a,b,c三数中的最小数，min是minimum的缩写。

例 4 证明函数$f(x)=1/x$在区间$(0,+\infty)$上有下界，但无上界。

[证] 存在数$m=0$，对于$(0,+\infty)$中的一切x，恒有$f(x)=1/x>0$. 故$f(x)=1/x$在区间$(0,+\infty)$上有下界。

对于任何数M，总有数$x_M=1/(|M|+1)\in(0,+\infty)$, 使得

$$f(x_M)=|M|+1>|M|\geqslant M.$$

故$f(x)=1/x$在$(0,+\infty)$上无上界。

读者仿此证明函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(-\infty,0)$上有上界，但无下界。

三、函数的奇偶性、周期性

定义 1.3.6 函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$是偶（奇）函数是指：

(1) 对于每一个数$x\in\Omega_x$，必有$-x\in\Omega_x$；

(2) 对于数集Ω_x中的一切x，恒有

$$f(-x)=f(x),\quad (f(-x)=-f(x)).$$

例 5 判别狄利克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的奇偶性。

[解] (1) 对于每一数$x\in(-\infty,+\infty)$，则必有数$-x\in(-\infty,+\infty)$；

(2) 对于$(-\infty,+\infty)$中的一切x，当x为有理数时，$-x$亦为有理数；当x为无理数时，$-x$亦为无理数。故对于$(-\infty,+\infty)$中的一切x，恒有

$$D(-x)=D(x).$$

即$D(x)$ $(0<x<+\infty)$是偶函数。

用定义容易判定函数$\sin x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\csc x$都是奇函数，$\cos x$、$\sec x$都是偶函数。且易知奇函数的图形对称于坐标原点，偶函数的图形对称于y轴。

定义 1.3.7 函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$ 是以常数$\omega(\omega\neq0)$为周期的周期函数是指：

(1) 对于每一数$x\in\Omega_x$，必有$x\pm\omega\in\Omega_x$；

(2) 对于数集Ω_x中的一切x，恒有$f(x+\omega)=f(x)$.

根据定义，若常数$\omega(\omega\neq0)$是函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的一个周期，则常数$\pm n\omega(n=1,2,\cdots)$都是函数$f(x)(x\in\Omega_x)$的周期。这个结论可以用数学归纳法证明。因为

(1) 对于每一数$x\in\Omega_x$，有$x\pm\omega\in\Omega_x$，于是应用数学归纳法易得$x\pm n\omega\in\Omega_x(n=1,2,\cdots)$.

(2) 对于Ω_x中的一切x，由于$f(x+\omega)=f(x)$，故$f(x-\omega)=f(x-\omega+\omega)=f(x)$. 即$n=1$时有$f(x\pm\omega)=f(x)$.

设$n=k$时有$f(x\pm k\omega)=f(x)$，则

$$f(x\pm(k+1)\omega)=f((x\pm\omega)\pm k\omega)=f(x\pm\omega)=f(x).$$

故有$f(x\pm n\omega)=f(x)$ $(n=1,2,\cdots)$. 即常数$\pm n\omega$ $(n=1,2,\cdots)$都是函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的周期。

周期函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的一切正周期所组成的数集中，若存在最小的正数ω_0，则称此正数ω_0为周期函数$f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的基本周期。

在三角学中熟知函数$\sin x$ ($-\infty<x<+\infty$)、$\operatorname{tg}x$($x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)都是周期函数，它们的基本周期分别为 2π 与 π . 然而，并不是每个周期函数都有 基本周期。

例 6 证明，任何有理数 r ($r\neq0$)都是狄利克莱函数 $D(x)$ ($-\infty<x<+\infty$) 的周期。

［证］ 记$\Omega_x=(-\infty, +\infty)$. 任取有理数 $r(r\neq0)$.

(1) 对于每一数$x\in\Omega_x$，必有$x\pm r\in\Omega_x$.

(2) 对于Ω_x中的一切 x，当 x 为有理数时，$x+r$亦为有理数，从而$D(x+r)=D(x)=1$；当 x 为无理数时，$x+r$ 亦为无理数，从而 $D(x+r)=D(x)=0$. 不论 x 是有理数还是无理数，都有

$$D(x+r)=D(x).$$

故对于任何有理数$r\neq0$都是狄利克莱函数 $D(x)$ ($-\infty<x<+\infty$)的周期。

还可以证明，任何无理数都不是狄利克莱函数 $D(x)$ ($-\infty<x<+\infty$)的周期。由于正有理数集不存在最小的正有理数，故狄利克莱函数 $D(x)$ ($-\infty<x<+\infty$)不存在基本周期。

周期函数的形式是多样的，切不要以为只有三角函数才是周期函数。在应用中的许多周期函数是由在有限区间上定义的其它函数，特别是线性函数做周期延拓而成。例如函数 $f(x)=|x|$, $-1\leqslant x<1$, 且 $f(x+2)=f(x)$, $-\infty<x<+\infty$. 其图形如图1.4所示。它是由函数$f(x)=|x|$, $-1\leqslant x<1$ 以2为周期延拓成为定义在区间 ($-\infty, +\infty$) 上的周期函数，且为偶函数。在电工学中称它为三角波。

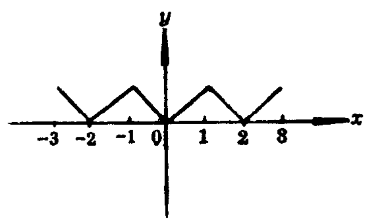


图 1.4

习 题 1.3

1. 证明函数 $f(x)=\sin x$ ($-\infty<x<+\infty$)在区间$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$上是递减的。

2. 设函数$f(x)$ ($x\in\Omega_x$)在数集Ω_x上递增，而数集$\Omega\subset\Omega_x$，证明函数 $f(x)$在数集Ω上亦递增。反之，设函数$f(x)$ ($x\in\Omega_x$)在某数集Ω($\Omega\subset\Omega_x$)上递增，能否有 $f(x)$ ($x\in\Omega_x$)在Ω_x上递增的结论？为什么？

3. 证明函数$f(x)=x^2$在($-\infty, +\infty$)上有下界而无上界。

4. 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$在$(0,1)$上无界。

5. 设函数$f(x)$ ($x\in\Omega_x$)在某数集Ω($\subset\Omega_x$)上无界。试证函数 $f(x)$在数集Ω_x上必无界。

6. 用定义判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$;　　(2) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ ($a>0, a\neq1$);

(3) $f(x)=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0, a\neq 1)$

7. 设$f(x)$是定义在$(-l, l)$ $(l>0)$上任一函数。试证函数$f(x)+f(-x)$ $(-l<x<l)$为偶函数，$f(x)-f(-x)$ $(-l<x<l)$为奇函数。

8. 设函数$f(x)=x^2$ $(-\pi\leqslant x<\pi)$，且$f(x+2\pi)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$．求$f(0)$、$f(-\pi)$、$f(\pi)$及$f(-3\pi/2)$的值，并作出此周期函数的图形。

9. 设函数$f(x)=x^2$ $(0\leqslant x<2)$，且$f(x+2)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$．求此周期函数在区间$[4, 6)$中的表达式，并作出此周期函数的图形。

10. 证明任何无理数都不是狄利克莱函数$D(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$的周期。

1.4 复合函数、反函数、用参数方程表示的函数

一、复合函数

定义 1.4.1 设函数$z=g(y)$ $(y\in\Omega_y)$，又设函数$y=f(x)$在定义域Ω_x上的值域为Ω_y'，且$\Omega_y'\subseteq\Omega_y$，则在数集$\Omega_x$上可以通过变量$y$的代入，定义变量$z$关于变量$x$的一个复合函数，记作

$$z=g[f(x)],\quad x\in\Omega_x.$$

此时，称变量y为中间变量。

由定义知，函数$z=g(y)$与函数$y=f(x)$的所谓“复合”，实际上就是将函数$z=g(y)$中的中间变量y用函数$f(x)$“代入”。两个函数能否“复合”的关键，在于中间变量y用$f(x)$“代入”是否有意义，这就看定义中$\Omega_y'\subseteq\Omega_y$这一条件是否满足。例如，函数$z=g(y)=\log_a y$ $(a>0, a\neq 1)$的定义域$\Omega_y=(0, +\infty)$，而函数$y=\varphi(x)=\sin x$在定义域$\Omega_x=(-\infty, +\infty)$上的值域$\Omega_y'=[-1, 1]$不含于$\Omega_y$中，因而将$y=\varphi(x)=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$“代入”得到的表达式$z=g[\varphi(x)]=\log_a\sin x$，$x\in\Omega_x=(-\infty, +\infty)$就可能没有意义。如果取函数$y=f(x)=\sin x$，$x\in\Omega_x=(2n\pi, (2n+1)\pi)$，其中$n$为某个整数，此时，由于该函数的值域$\Omega_y'=(0,1]\subset\Omega_y=(0, +\infty)$，故将中间变量$y$用$\sin x$，$x\in(2n\pi, (2n+1)\pi)$“代入”才构成复合函数

$$z=g[f(x)]=\log_a\sin x,\quad x\in(2n\pi, (2n+1)\pi)\ (\text{其中}n\text{为整数})$$

这里再一次看出函数定义中强调定义域的重要性。

二、反函数

定义 1.4.2 设函数$y=f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的值域为Ω_y．如果法则f具有如下性质：对于数集Ω_x中的不同的x值，所对应的函数值y也不同，则存在一个与法则f相逆的法则f^{-1}，使得

(1) 对于数集Ω_y中每一个y值，按照法则f^{-1}，总可唯一确定数集Ω_x中的一个x的值与之对应；

(2) 对于数集Ω_x中的一切x，恒有$f^{-1}[f(x)]=x$.

称函数$x=f^{-1}(y)$ $(y\in\Omega_y)$为函数$y=f(x)$ $(x\in\Omega_x)$的反函数。

定义中法则f所具有的性质（对于数集Ω_x中的不同的x值，所对应的函数值y也不同）是保证法则f^{-1}存在的前提；而法则f^{-1}所适合的两个条件（条件(1)说明f^{-1}是函