

■ 姚孟臣 主 编
赵达夫
胡金德 副主编
邵光砚

2003年MBA联考 综合能力考试 应试指南与模拟试卷

数 学 分 册



机械工业出版社
China Machine Press

■ 姚孟臣 主 编

赵达夫
胡金德 副主编
邵光砚

2003年MBA联考 综合能力考试 应试指南与模拟试卷

数 学 分 册



机械工业出版社
China Machine Press

本书由机械工业出版社出版。未经出版者书面许可,不得以任何方式抄袭、复制或节录本书中的任何部分。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

2003年MBA联考综合能力考试应试指南与模拟试卷·数学分册/姚孟臣等主编.-北京:机械工业出版社,2002.8

ISBN 7-111-10787-X

I. 2… II. 姚… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第060980号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:魏杰 版式设计:赵俊斌

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002年8月第1版·2002年9月第3次印刷

787mm×1092mm 1/16·12印张

定价:17.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

目 录

第一部分 解题指南：两种题型的常用解法

条件充分性判断	(3)
选择题(问题求解)	(15)

第二部分 2003 年 MBA 联考综合能力考试数学部分模拟试卷、参考答案及答案解析

2003 年 MBA 联考模拟试卷(一)	(31)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(二)	(37)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(三)	(43)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(四)	(48)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(五)	(54)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(六)	(60)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(七)	(65)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(八)	(71)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(九)	(77)
2003 年 MBA 联考模拟试卷(十)	(83)
模拟试卷(一)参考答案	(89)
模拟试卷(二)参考答案	(99)
模拟试卷(三)参考答案	(110)
模拟试卷(四)参考答案	(120)
模拟试卷(五)参考答案	(130)
模拟试卷(六)参考答案	(139)
模拟试卷(七)参考答案	(148)
模拟试卷(八)参考答案	(157)
模拟试卷(九)参考答案	(168)
模拟试卷(十)参考答案	(177)

第一部分

解题指南：两种题型的常用解法

条件充分性判断

解题说明:

本大题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论. 阅读条件(1)和(2)后选择:

A: 条件(1)充分,但条件(2)不充分.

B: 条件(2)充分,但条件(1)不充分.

C: 条件(1)和(2)单独都不充分,但条件(1)和条件(2)联合起来充分.

D: 条件(1)充分,条件(2)也充分.

E: 条件(1)和(2)单独都不充分,条件(1)和条件(2)联合起来也不充分.

可见,此种类型试题结构为:

题干中的结论

条件(1)

条件(2)

若以 B 表示题干中的结论,以 A 表示条件(1)或条件(2),或条件(1)与(2)的联合.

解题要求为: 判断 A 是否是 B 的充分条件,也就是判断命题“ $A \Rightarrow B$ ”的真假.

常用的求解方法有以下几种:

解法一 直接法(即由 A 推导 B)

若由 A 可推导出 B , 则 A 是 B 的充分条件; 若由 A 推导出与 B 矛盾的结论, 则 A 不是 B 的充分条件. 解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法, 应熟练掌握.

例 1 要保持某种货币的币值不变

(1) 贬值 10% 后又升值 10%

(2) 贬值 20% 后又升值 25%

分析 设该种货币原币值为 a 元 ($a \neq 0$).

由条件(1)经过一次贬值又一次升值后的币值为:

$$a(1 - 10\%) \cdot (1 + 10\%) = a \cdot 0.9 \cdot 1.1 = 0.99a$$

显然与题干结论矛盾.

所以条件(1)不充分.

由条件(2)经过一次贬值又一次升值后的币值为:

$$a(1 - 20\%) \cdot (1 + 25\%) = a \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = a$$

题干中的结论成立.

所以条件(2)充分.

故应选择 B.

例 2 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 可以确定 $S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 250$

$$(1) a_2 + a_3 + a_{98} + a_{99} = 10$$

$$(2) a_2 + a_3 + a_{97} + a_{98} = 12$$

分析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

由条件(1)得

$$a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 97d + a_1 + 98d = 10$$

即

$$4a_1 + 198d = 10$$

所以

$$2a_1 + 99d = 5$$

$$S_{100} = \frac{100(a_1 + a_{100})}{2} = 50(2a_1 + 99d) = 250$$

因为题干结论成立, 所以条件(1)充分.

由条件(2)得

$$a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 96d + a_1 + 97d = 12$$

即

$$4a_1 + 196d = 12$$

所以

$$2a_1 + 98d = 6$$

$$S_{100} = 50(2a_1 + 99d) = 50(6 + d)$$

由于 d 的值无法确定, 所以 S_{100} 的值无法确定.

所以条件(2)不充分.

故应选择 A.

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处不可导

$$(1) f(a)=0 \text{ 且 } f'(a) \neq 0$$

$$(2) f(a)=0 \text{ 且 } f'(a)=0$$

分析 令 $\varphi(x) = |f(x)|$,

$$\varphi'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)|}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{x - a} \right| = |f'_+(a)| = |f'(a)|$$

$$\varphi'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} - \frac{|f(x)|}{|x - a|} = -|f'_-(a)| = -|f'(a)|$$

因为 $f'(a) \neq 0$, 则 $\varphi'_+(a) \neq \varphi'_-(a)$, 故 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 不可导.

故应选择 A.

例 4 已知 $x \ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $\int_1^e \frac{af(x)}{x} dx = 3$

(1) $a=2$

(2) $a=1$

分析 因为 $x \ln x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \ln x)' = \ln x + 1 \\ \int_1^e a \cdot \frac{f(x)}{x} dx &= a \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx = a \left[\int_1^e \ln x d \ln x + \int_1^e \frac{1}{x} dx \right] \\ &= a \left[\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x \right] \Big|_1^e = \frac{3a}{2} = 3 \end{aligned}$$

所以 $a=2$.

故应选择 A.

例 5 A, B 是 n 阶矩阵, $A+B$ 可逆

(1) A, B 满足 $A^2 + AB + B^2 = 0$

(2) $BX=0$ 惟一零解

分析 由 (1) $A^2 + AB + B^2 = 0$, 得 $A(A+B) = -B^2$, 若对 B (或 A) 没有任何其他条件, 不能推出 $A+B$ 可逆 (如 $B=0$, 则 $A^2=0, A+B=A$ 不可逆).

由 (2) $BX=0$ 惟一零解, 故知 B 可逆, 但 $A+B$ 不一定可逆, 如取 $A=-B$, 则 $A+B=-B+B=0, A+B$ 不可逆.

由 (1) 及 (2) 得, $A(A+B) = -B^2, B$ 可逆, 得 $(-B^2)^{-1}A(A+B) = E$. 从而由定义知 $A+B$ 可逆且 $(A+B)^{-1} = (-B^2)^{-1}A$.

故应选择 C.

例 6 A, B 都是 3 阶矩阵, $|A+B| = 4(|A| + |B|)$

(1) $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = [\beta_1, \alpha_2, \alpha_3]$

(2) $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_3]$

分析 由 (1)

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad B = [\beta_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad |A+B| &= |[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] + [\beta_1, \alpha_2, \alpha_3]| = |\alpha_1 + \beta_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3| \\ &= 4|\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2, \alpha_3| = 4(|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |\beta_1, \alpha_2, \alpha_3|) \\ &= 4(|A| + |B|) \end{aligned}$$

由 (2)

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], \quad B = [\alpha_1, \alpha_2, \beta_3]$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad |A+B| &= |[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] + [\alpha_1, \alpha_2, \beta_3]| = |2\alpha_1, 2\alpha_2, \alpha_3 + \beta_3| \\ &= 4|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \beta_3| = 4(|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_3|) \\ &= 4(|A| + |B|) \end{aligned}$$

故应选择 D.

例 7 设随机变量 $X \sim N(0, 4), Y \sim U(0, 4)$, 求 $E(2X - 3Y)$

(1) X 与 Y 独立

(2) X 与 Y 不独立

分析 由于只要 $E(X), E(Y)$ 存在, 就有

$$E(2X - 3Y) = 2E(X) - 3E(Y)$$

考虑到

$$X \sim N(0, 4), \quad E(X) = 0$$

$$Y \sim U(0, 4), \quad E(Y) = \frac{4}{2} = 2$$

故应选择 D.

例 8 $P(B - A) = P(B) - P(A)$ 成立

(1) A 与 B 相互独立

(2) $A \subset B$

分析 由于

$$B - A = B \cdot \bar{A}$$

由条件(1), A 与 B 相互独立, 有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

而 $P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = P(B)(1 - P(A)) \neq P(B) - P(A)$

由条件(2), $A \subset B$, 有

$$B = A + (B\bar{A})$$

因此, 由于 A 与 $B\bar{A}$ 互斥, 有

$$P(B) = P(A) + P(B\bar{A}) = P(A) + P(B - A)$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

故应选择 B.

解法二 定性分析法(由题意分析, 得出正确的选择)

当所给题目比较简单明了, 又无定量的结论时, 可以分析当条件成立时, 有无结论成立的可能性, 从而得出正确选择, 而无需推导和演算.

例 1 对于一项工程, 丙的工作效率比甲的工作效率高

(1) 甲、乙两人合作, 需 10 天完成该项工程

(2) 乙、丙两人合作, 需 7 天完成该项工程

分析 条件(1)中无甲与丙间的关系, 条件(2)中亦无甲与丙间的关系, 故条件(1)和(2)显然单独均不充分.

将两条件联合起来分析:在完成相同工作量的前提下,甲与乙合作所需时间比乙与丙合作所需时间多.故甲的工作效率当然比丙的工作效率低,题干结论成立.所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

例 2 在一个宴会上,每个客人都免费获得一份冰淇淋或一份水果沙拉,但不能同时获得二者,可以确定有多少客人能获得水果沙拉

(1) 在该宴会上,60%的客人都获得了冰淇淋

(2) 在该宴会上,免费提供的冰淇淋和水果沙拉共 120 份

分析 由于条件(1)中不知客人总数,所以无法确定获得水果沙拉的客人的人数.而由于条件(2)中只给出客人总数,所以仍无法确定获得水果沙拉的客人的人数,故条件(1)和(2)单独显然均不充分.

由条件(2)知客人总数,由条件(1)可知获得水果沙拉的客人占总客人数的百分比,必可确定获水果沙拉的客人的人数,所以条件(1)和(2)联合起来充分.

故应选择 C.

例 3 $\forall x \in (a, b), f'(x) > 0$

(1) $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调递增且可导

(2) $f'(a) = 0, x \geq a$ 时, $f''(x) > 0$

分析 条件(1)不充分,因为满足(1)的 $f(x)$ 可能存在 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f'(x_0) = 0$, 例如 $f(x) = x^3$, $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上严格递增且可导, 但 $f'(0) = 0$ 不满足 $f'(x) > 0$. 条件(2)充分, 因为 $f''(x) > 0$ 保证了 $f'(x)$ 严格单调递增, 因为 $f'(a) = 0$, 即 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$. 所以条件(2)是充分的.

故应选择 B.

例 4 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 线性相关

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性相关

(2) $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不能由其余向量线性表示

分析 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性相关, 存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1} = \mathbf{0}$$

成立, 则

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_{s-1} \alpha_{s-1} + 0 \alpha_s = \mathbf{0}.$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_{s-1}$ 不全为零, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

(2) $\alpha_i, i=1, 2, \dots, n$ 不能由其余的向量线性表示 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}, \alpha_s$ 线性无关, 故(2)不是充分条件.

故应选择 A.

例 5 事件 A, B, C 相互独立

$$(1) P(ABC) = P(A)P(BC)$$

$$(2) \begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(AC) = P(A)P(C) \end{cases}$$

分析 由条件(1)可以推出事件 A 与 BC 独立,并不能保证 A, B, C 相互独立.而条件(2)说明事件 A, B, C 两两独立,也不能保证 A, B, C 相互独立.但是,将条件(1),(2)联立起来后,由于

$$P(ABC) = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C)$$

加上条件(2)就是 A, B, C 相互独立的充要条件了.

故应选择 C.

解法三 逆推法(由条件中变元的特殊值或条件的特殊情况入手,推导出与题干矛盾的结论,从而得出条件不充分的选择)

注意 此种方法绝对不能用在条件具有充分性的肯定性的判断上.

例 1 要使不等式 $|1-x| + |1+x| > a$ 的解集为 R

$$(1) a > 3$$

$$(2) 2 \leq a < 3$$

分析 由条件(1) $a > 3$,取 $a=4$,不等式化为 $|1-x| + |1+x| > 4$,此不等式化为:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x > 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ 2 > 4 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < -1 \\ -2x > 4 \end{cases}$$

所以 $x > 2$ 或 $x \in \phi$ 或 $x < -2$

所以不等式的解为 $x < -2$ 或 $x > 2$ 与解集为 R 矛盾.

所以条件(1)不充分.

由条件(2) $2 \leq a < 3$,取 $a=2$,不等式化为 $|1-x| + |1+x| > 2$,此不等式化为:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x > 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ 2 > 2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < -1 \\ -2x > 2 \end{cases}$$

所以 $x > 1$ 或 $x \in \phi$ 或 $x < -1$

所以不等式的解为 $x < -1$ 或 $x > 1$ 与解集为 R 矛盾.

所以条件(2)也不充分.

条件(1)和(2)联合,得 $\begin{cases} a > 3, \\ 2 \leq a < 3, \end{cases}$ 所以 $a \in \phi$,显然条件(1)和(2)联合起来也不充分.

故应选择 E.

例 2 三个球中,最大球的体积是另外两个球体积和的 3 倍

$$(1) \text{三个球的半径之比为 } 1:2:3$$

(2) 大球半径是另两球半径之和

分析 由条件(1) 设三球半径分别为 $r, 2r, 3r$,
所以大球体积

$$V_{\text{大}} = \frac{4}{3}\pi(3r)^3 = 36\pi r^3$$

两小球体积和

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{36}{3}\pi r^3$$

显然 $V_{\text{大}} = 3(V_1 + V_2)$ 成立.

所以条件(1)充分.

由条件(2) 设两小球的半径分别为 $r_1=1, r_2=3$, 大球半径 $r=4$, 所以

$$V_{\text{大}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi$$

$$V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = \frac{112}{3}\pi$$

显然 $V_{\text{大}} \neq 3(V_1 + V_2)$.

所以条件(2)不充分.

故应选择 B.

注意 条件(1)的充分性,是用解法一判断的.只有当条件不充分时,才可用解法三,如对条件(2)不充分的判断.

例 3 设 $F(x) = g(x)\varphi(x)$, $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续,但不可导,又 $g'(a)$ 存在. $F(x)$ 在 $x=a$ 可导

(1) $g(a) \neq 0$

(2) $g(a) = 0$

分析 若 $g(a) = 0$,按导数定义:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)\varphi(x) - g(a)\varphi(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \varphi(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = g'(a)\varphi(a) \end{aligned}$$

即

$$F'(a) = g'(a)\varphi(a)$$

若 $g(a) \neq 0$,则 $F(x)$ 在 $x=a$ 不可导. 否则若 $F'(a)$ 存在,则由商的求导法知 $\varphi(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 可导,与假设 $\varphi(a)$ 不存在矛盾.

故应选择 B.

例 4 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示

(1) $r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < 3$

$$(2) r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$$

分析 由(1) $r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < 3$, 故 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 但与 α_1 没有联系, 不知 α_1 能否可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 故不是充分条件.

由(2) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, α_1 不能由 α_2, α_3 线性表示, 但不知 α_1 能否由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 故也不是充分条件.

由(1) $r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < 3$ 及(2) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 可得 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 用反证法: 若 α_1 可以由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, 则

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) < 3$$

这和 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \geq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$ 矛盾, 故 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

故应选择 C.

例 5 求 $P(A+B)$

$$(1) P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{3}$$

$$(2) AB = \emptyset$$

分析 由加法公式, 有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

可见, 单独使用条件(1)无法确定 $P(A+B)$ 的值, 而由条件(2)可知

$$P(AB) = 0$$

也无法单独确定 $P(A+B)$ 的值.

将条件(1), (2)联合起来, 会导致

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{7}{6} > 1$$

故应选择 E.

解法四 一般分析法(寻找题干结论的充分必要条件)

即: 要判断 A 是否是 B 的充分条件, 可找出 B 的充要条件 C , 再判断 A 是否是 C 的充分条件.

例 1 要使 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 60

$$(1) a=1$$

$$(2) a=2$$

分析 设 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^6$ 展开式的常数项为 T_{r+1} , 因为

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = C_6^r a^r x^{6-3r}$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以} \quad & 6 - 3r = 0 \\
 & r = 2 \\
 \text{因为} \quad & C_6^2 a^2 = 60 \\
 \text{所以} \quad & 15a^2 = 60 \\
 & a = \pm 2
 \end{aligned}$$

所以题干中结论的充要条件是 $a = \pm 2$.

所以条件(1) $a=1$ 不充分;条件(2) $a=2$ 充分.

故应选择 B.

此题用解法一需要将 $a=1$ 和 $a=2$ 代入,推算两次,而用此种方法只推算一次得出 $a = \pm 2$ 即可.

例 2 要使关于 x 的一元方程 $x^4 - 2x^2 + k = 0$ 有四个相异的实根

$$(1) 0 < k < \frac{1}{2}$$

$$(2) 1 < k < 2$$

分析 方程 $x^4 - 2x^2 + k = 0$ 有四个相异的实根,设 $t = x^2, t \geq 0$,所以方程 $t^2 - 2t + k = 0$ 有两不等正实根 $t_1 > 0, t_2 > 0$,所以

$$t_1 + t_2 = 2 > 0, \quad \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}$$

即

$$4 - 4k > 0$$

$$k > 0$$

所以

$$\begin{cases} k < 1, \\ k > 0, \end{cases} \quad 0 < k < 1$$

所以题干中结论的充要条件是 $0 < k < 1$.

所以条件(1)充分,条件(2)不充分.

故应选择 A.

一道条件充分性判断试题有时可以用多种方法求解,如上面的例 2 也可求解如下:

分析 设 $t = x^2, t > 0$,所以原方程化为:

$$t^2 - 2t + k = 0 \quad (*)$$

原方程有四个相异实根,即(*)有两不等正实根.因为

$$\Delta = 4 - 4k = 4(1 - k)$$

由条件(1) $k < \frac{1}{2}$,所以 $\Delta > 0$,又因为两根之和为 2,两根之积为 k ,由条件(1) $k > 0$,所以这两根一定是不等正实根.题干结论成立,所以条件(1)充分.

由条件(2) $1 < k < 2$,取 $k = \frac{3}{2}$,则(*)化为

$$t^2 - 2t + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \times \frac{3}{2} = 4 - 6 < 0$$

所以方程无实根, 题干结论不成立, 所以条件(2)不充分.

故应选择 A.

例 3 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$ 收敛

(1) $k \geq 0$

(2) $k < 0$

分析

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{1}{k} e^{-kx} \Big|_0^{+\infty}$$

当 $k > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-kx} = 0$. 由于 k 在分母位置, 所以 $k \neq 0$.

即当 $k > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \frac{1}{k}$ 收敛.

所以条件(1), 条件(2)单独都不充分, 联合起来也不充分.

故应选择 E.

例 4 方程 $x^3 - 3x + q = 0$ 有两相异实根

(1) $q = 2$

(2) $q = -2$

分析 $y = x^3 - 3x + q$, $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, 驻点为 $x = \pm 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

极大值 $y(-1) = 2 + q$, 极小值 $y(1) = -2 + q$. 此外

$$y(-\infty) = -\infty, \quad y(+\infty) = +\infty$$

所以当 $q = -2$ 或 $q = 2$ 时方程有两个相异实根.

故应选择 D.

例 5 $A = \begin{bmatrix} x_1 y_1 - 1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 - 1 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 - 1 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵

(1) $\sum_{i=1}^3 x_i y_i = -1$

(2) $\sum_{i=1}^3 x_i y_i = 1$

分析

$$\begin{aligned}
 A \text{ 可逆} &\Leftrightarrow |A| = \begin{vmatrix} x_1y_1 - 1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 - 1 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 - 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & x_1y_1 - 1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ 0 & x_2y_1 & x_2y_2 - 1 & x_2y_3 \\ 0 & x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 - 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ -x_1 & -1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & -1 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i & y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^3 (1 - \sum_{i=1}^3 x_i y_i) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i - 1 \neq 0
 \end{aligned}$$

故由(1) $\sum_{i=1}^3 x_i y_i = -1 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i y_i - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆

但由(2) $\sum_{i=1}^3 x_i y_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 x_i y_i - 1 = 0 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow A$ 不可逆

故应选择 A.

例 6 方程组 $\begin{cases} 3x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 = 0, \\ kx_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解

(1) $k \neq -1, -3$

(2) $k = -1, -3$

分析 由(1) 方程组 $\begin{cases} 3x_1 + kx_2 + x_3 = 0, \\ 4x_2 + x_3 = 0, \\ kx_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解