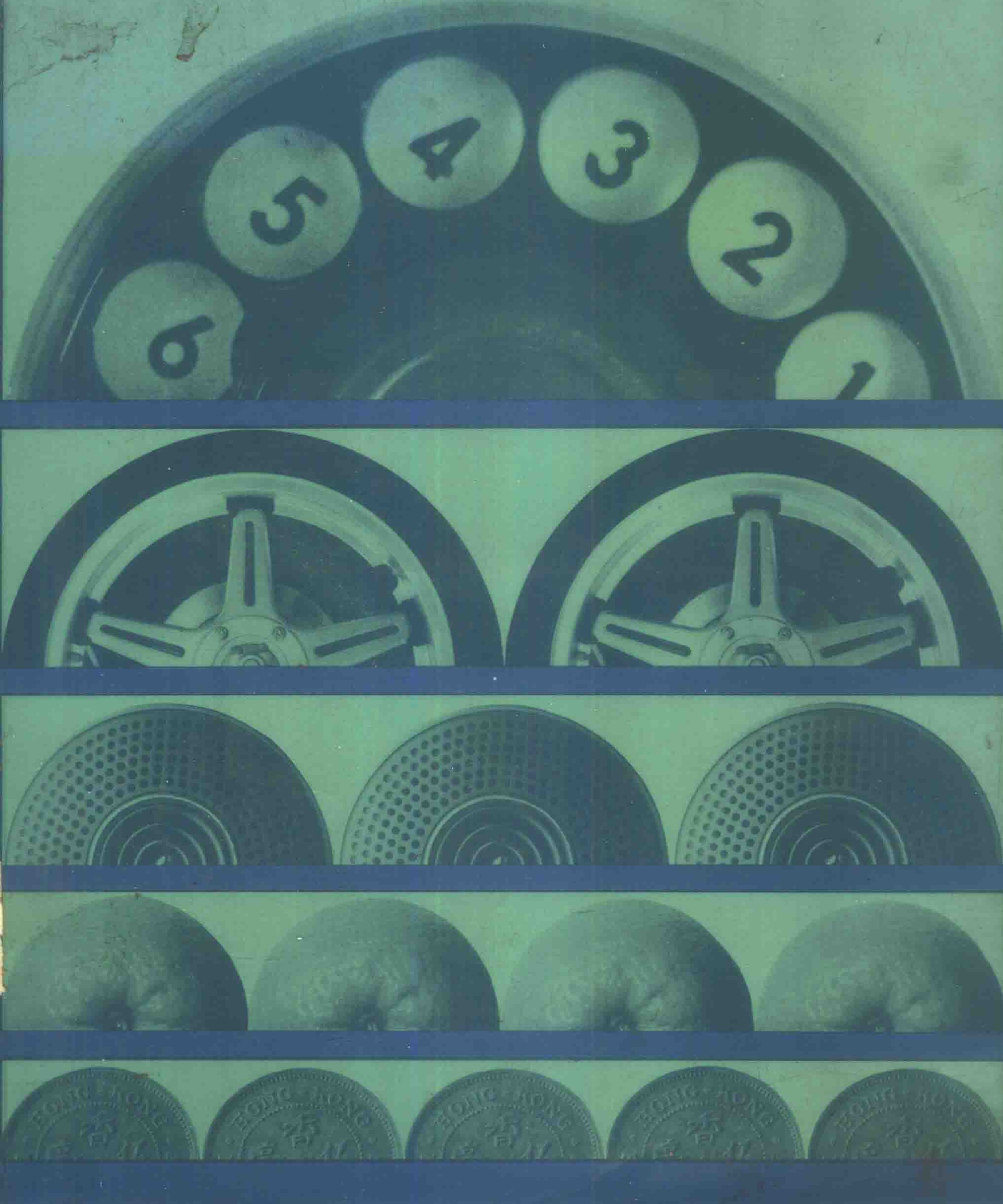
商業數學

概率・規劃・對策與排隊

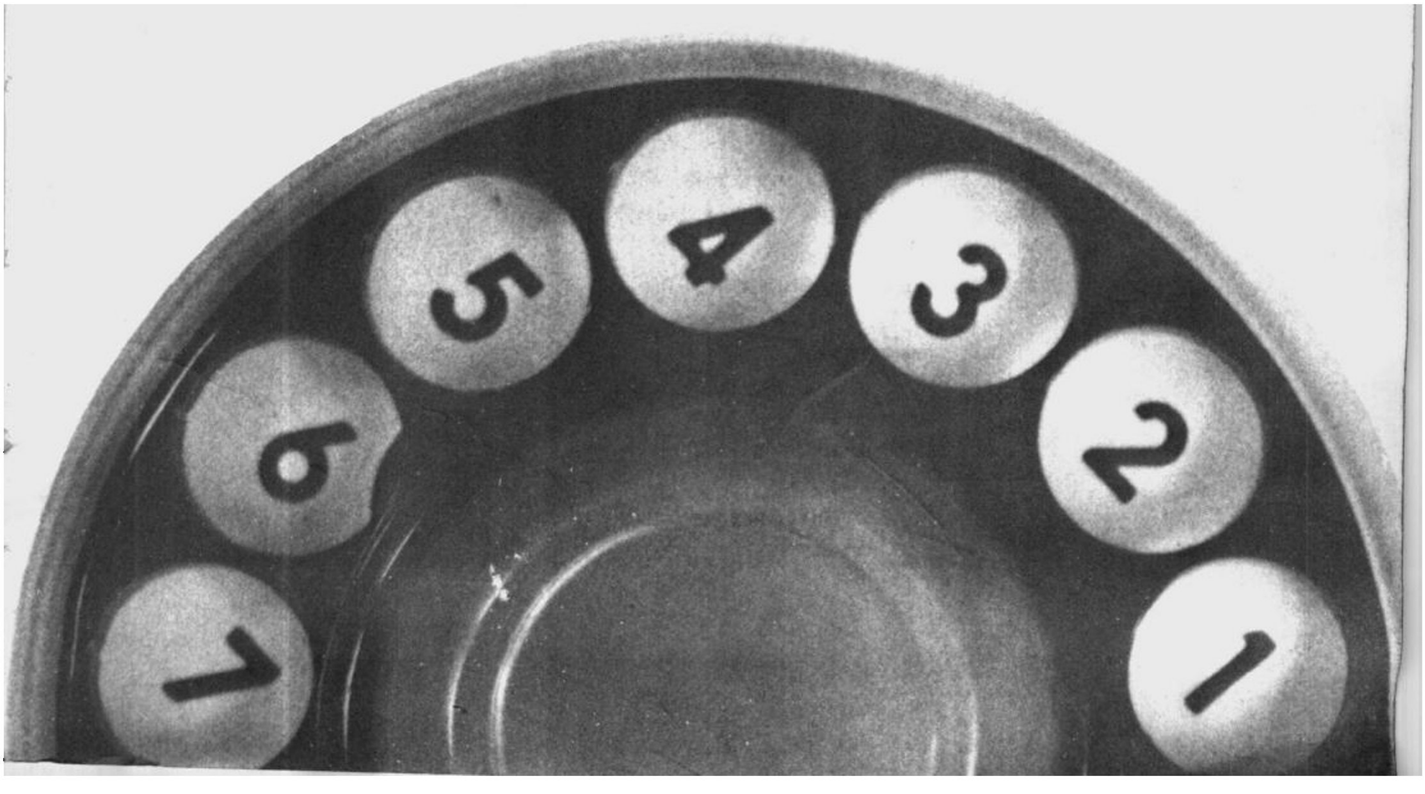
岑嘉評著・商務印書館



商業數學

概率・規劃・對策與排隊

岑嘉評著・商務印書館



商業數學

概率·規劃·對策與排隊

著　者——岑嘉評

出版者——商務印書館香港分館

香港皇后大道中35號

印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司

香港九龍炮仗街75號

版　次——1980年11月初版

1983年3月重印

©1980　1983　商務印書館香港分館

ISBN　962　07　2002　4

序

數學是生活的一部分，無論我們做什麼工作，都離不開數學。隨着現代社會的發展，我們每天所面對的問題，越來越複雜；需要處理的問題，也越來越多，因此，許多事情，往往需要我們作出迅速合理而有效的決策，但這是有賴於數學從旁協助，否則，就會浪費不少人力、物力及財力，甚至時間。本書的目的，就是以通俗的形式，介紹一些基礎數學知識，包括概率、規劃、對策與排隊等。這些數學知識，有助於我們處理日常生活的問題，書中所介紹的馬科夫鏈、線性規劃論、對策論及排隊論，都是在1930年後，才逐漸發展的數學，時至今日，這些數學知識，已應用到我們的日常生活中，因此，作爲一個受過教育的現代人，對於這方面的數學知識，也應該略知一二。

本書雖然以工管、社會、經濟及生化系等同學爲對象，但是具有一般中學數學水平的讀者，也可以拿來參閱。又本書是爲非數學專業人仕而寫，自然不可能要求達到專業數學的水平。雖然如此，對於數學知識的概念及定理的應用，筆者仍然盡可能作出詳細的說明，務求深入淺出。

本書初稿，曾在中文大學作爲工商管理系一年級數學課程的試教本，在試教期中，得到周紹棠博士、張清如先生、謝蘭安先生、朱明綸先生，提供了不少寶貴意見。又蒙關仕儒先生幫忙詳細審閱全部底稿，並提出許多改進意見，謹此對他們致以衷心的感謝。

岑 嘉 評

一九七九年八月一日

目 錄

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　排列與組合

排列與組合是數學方法的一種，它面對的實際問題是：

當某類事物由幾個不同因素所影響而出現不同結果時，如何根據各種因素的變化可能性去計算出該類事物究竟會有多少種不同的結果。

舉個簡單的例子：拍電報時每個字以一個四位數來表示，每個位的數字是從 0 到 9，換句話說，字由四個因素決定，每種因素含有10種變化，用這個辦法可表示出多少種不同的字呢？答案是10^4個，即是說一萬個，這個數據是重要的，因爲如果我們不能選出一萬個常用字足以表達日常的電報稿件的話，我們可能要用五位數以增大字的容量爲十萬個。反過來說，如果我們能用一千個字便能表達所有電報稿件，則每個字用三位數已經可以了。因爲中文的常用字約爲七千個，因此，用五位數便太浪費，而用三位數則不夠用，這就是電報號碼採用四位數的原因。

假設由於某種技術上的原因，我們要求每個字的電報號碼均由不同數字組成，例如，1253，2840 皆對應某個字，而9001不代表任何字，則此四位數來說，雖然每個位的數字皆有機會取由 0 至 9 之中的任何一個值，但是如果第一個位取 1，則其餘的位數不能再取 1 爲值，用這個方式所能表達的字數，顯然不再是10^4了。

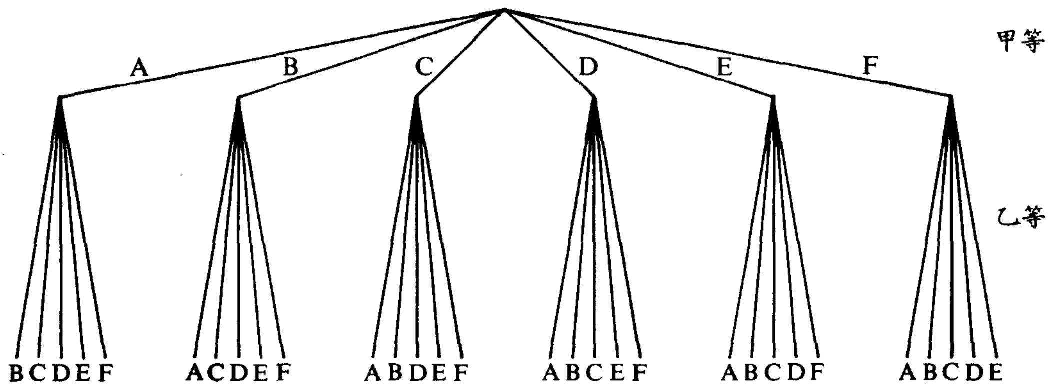
由上述的例子看出在不同問題中，事物的結果受不同因素影響的方式每每不是一樣的，因而其計算公式亦不一樣。這一章就把各種方式的不同計算公式介紹給大家。大家不但在本章中將會看到它們在日常生活中的應用，而且在本書以後各章中看出它的基礎作用。

現在我們以下列簡單問題，導入本章論題。

§ 1　乘法原理

設：某股票公司經紀要向顧客推薦六種股票作爲投資的對象，在其中選出一種爲甲等，又在其餘部分選出其中之一爲乙等，問共有多少種選法？

解決這問題的最基本方法是圖解法。設該六種股票是A、B、C、D、E、F。其中任何一種皆有機會被選爲甲等，共有六個選法，假如選定A股票是甲等的話，那末，只有B、C、D、E、F股票有機會被選爲乙等，根據題意，可繪成下列圖表：



由此圖表可見，共有三十種方法。

上面的例子，說明了下面的基本原理：

設某類事物可分成m種，而每一種又可分成n種型式，那末，這些事物共可分成mn種型式。

上面這個原理，稱爲**乘法原理**。事實上，我們可以把它推廣到它們所用來分類的因素有三個、四個或更多的情形。下面是一些應用乘法原理的例子。

例一　人數五，編號的椅子六張，問共有幾種坐法。

解：

第一人共有六種坐法，第二人共有五種坐法，餘此類推，根據乘法原理，得出共有

$$6\times5\times4\times3\times2=720$$ 種坐法

例二　香港汽車牌照字首，由英文字母中任意選擇二字組成，如AH，AW，BB，BJ等，但並無BF牌照，問可有多少種不同牌照字首。

解：

因牌照可以重複出現，故各字母都有26種選擇方法，利用乘法原理，應共有

$26\times26=676$ 種

但因 BF 不存在，故共有675種不同字首。

例三 某公司有陳先生、李先生、張先生、黃先生、何太太、區先生、周太太各董事，問：

1．要選出董事長、副董事長、司庫各一人（不能兼職）共有多少種選法？

2．要選出董事長爲女性，副董事長爲男性，司庫一人（不能兼職），共有多少種選法？

解：

1．選董事長共有七種方法，副董事長有六種方法，司庫有5種選法，所以共有

$7\times6\times5=210$ 種方法。

2．女董事長共有兩種選法，男副董事長共有5種選法，司庫共有5種選法，共有

$2\times5\times5=50$ 種方法

例四 設某餐室備有8元的菜5種，5元的菜2種，3元的菜4種，現吳先生預計以16元的菜錢吃午餐，且打算每種價錢的菜都試一試，問他有多少種點菜的方法？

解：

因爲吳先生只預算出16元，他必須點8元、5元、3元的菜各一，所以他共有

$5\times2\times4=40$ 種點菜方法

乘法原理可以用在各種場合裏，因此通常以“事件”來敘述：

設某一種事件可有 n_1 種不同做法，第二種事件有 n_2 種不同的做法，……，第 t 種事件有 n_t 種不同做法，則依次連續做此 t 件事件，共有 $n_1n_2\cdots\cdots n_t$ 種不同做法。

讀者應注意，在乘法原理中，事件與事件之間，假設是互不相關連的。假如事件與事件之間是互相關連的，那末乘法原理不一定可以應用，例如朱小姐有8條裙子，7件恤衫，穿着時裙子及恤衫要顏色互相配合（兩件事件互相有關），就不能用乘法原理來計算了。

§2 排列

I．沒有重複的直線排列

由 n 個不同的物件中，選擇出 r 個（$n\geqslant r$）物件，依不同的次序排成一列，排列數記爲 P_r^n，例如由 a，b，c，d 中，任意取兩個符號的排列數是：ab，ac，ad，

$bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc$。它的排列數是

$$P^4_2 = 12$$

一般來說，排列數可表示成

$$P^n_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

這是因為在每一個排列中，都有 r 個位置，第一個位置，可以在這 n 個不同物件中，任選一個填入，所以有 n 種選法，第二位置僅有 $n-1$ 種選法，第三位置僅有 $n-2$ 種選法，如此這般到第 r 個位置，便有 $n-(r-1)$ 種選法，按照乘法原理，立即得出

$$P^n_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

例五　某次賽馬，出馬八匹，已知其中一匹黑馬，在任何賽事中，均無法得到冠軍的，問該場賽事之馬匹名次，共有幾種排列方法?(假定並無雙冠軍或雙亞軍之類的同名次情況出現）

解：

八匹馬的排列數是

$$P^8_8 = 8!$$

該匹黑馬名列第一的可能性共有 7 !，所以共有

$$8! - 7! = 7 \times 7!$$
$$= 35280 \text{ 種排列方法}$$

例六　問由100到999之間,有多少個三位數，它們每個數字都是由不同的奇數所組成的？

解：

照題意725一數，因它的十位數是偶數，不合所求，又575一數，因重複使用5也不合所求，因此必須由1，3，5，7，9五個數字中任選三個來排列，不許重複，所以共有

$$P^5_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

例七　用0，1，2，3，4，5六個數字，所有數字不得重複，排列成能以5整除的三位數，問共有若干個？

解：

凡能用5整除的數，它的末位數字必定是0或5，假如末位數規定是5，那末，它的排列數是 P^5_2，假如末位數規定是0，那末，它的排列數也是 P^5_2，但首位是0，末位是5的排列數是

$$P^4_1 = 4$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

這是一個二位數，必須刪去。

所以共有

$$P_2^5+P_2^5-P_1^4=36 \text{ 個三位數}$$

Ⅱ. 重複排列

在 n 個不同物件中，每次取 r 個，准許重複 r 次的排列稱爲重複排列，排列數是 n^r 個，這是因爲這個排列共有 r 個位置，而每一個位置都有 n 個物件可供選擇，所以排列數爲 $n\cdot n\cdots\cdots n$ 至 r 個因式 $=n^r$（其中 r 可大於 n）。例如有信五封，隨意投入三個郵箱，那末，共有

$$3^5=243 \text{ 種不同方法}$$

這是因爲對每一封信，都有三個郵箱可供投寄，即

$$n=3$$

現在共有五封信，即

$$r=5$$

所以排列數應是 3^5。

Ⅲ. 物件不完全相異的排列

在 n 個物件中，設有 t 個是相同的，其餘的都不同，將這 n 個物件，依不同的次序來排列，不許重複，那末，排列數是 $\dfrac{n\,!}{t\,!}$。這是因爲，設所求的排列數是 x，又將 t 個相同的物件，變爲不同，得到 t 個物件的排列數爲 $t\,!$ 因此，物件完全相異的總排列數是 $x\cdot t\,!$ 由於 n 個物件完全相異的排列公式是

$$P_n^n=n\,!$$

所以

$$x\cdot t\,!=n\,!,\quad x=\frac{n\,!}{t\,!}$$

這個公式可以推廣如下：假如 n 個物件中，分爲 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_r$ 個相同物件的小組，則其排列數爲 $\dfrac{n\,!}{t_1!\,t_2!\cdots\cdots t_r!}$。

例八 將一元硬幣 7 枚，五角硬幣 3 枚，一角硬幣 8 枚，分給兒童18人，並規定各得一枚，問有若干方法？

解：

18枚硬幣，分給18人，應有18！種方法，但其中有 7 枚一元硬幣，3 枚 5 角硬幣，8 枚一角硬幣，故有 $\dfrac{18\,!}{7\,!\,3\,!\,5\,!}$ 種方法。

例九 將英文字 *RECEIVE* 的字母任意排列，問共有幾種不同的排列法？

解：

因 *RECEIVE* 共由七個符號組成，所以共有 $7!$ 排列法，又因字母 E 重複了三次，所以共有

$$\frac{7!}{3!}=\frac{5040}{6}=840 \text{ 種不同的排列法}$$

例十 大學校園是正方形，有直路12條，橫路6條，數學大樓在校園東北角，社商大樓在校園西南角，問由社商大樓到數學大樓共有幾種不同的走法？（走動的方向只准向東或向北行走）

解：

直路12條，每條被橫路6條分爲5段，橫路6條，可被直路分割爲11段，由校園的一角走到另一角，無論如何，必要經過直路5段，橫路11段。假如將直路5段均以 a 表示，橫路11段以 b 表示的話，那末，所選擇的情形是 $aaaabbbbabbbbbbb$，$aabbaabbabbbbbbb$，……等，所以共有 $\dfrac{16!}{11!5!}$ 種不同的走法。

Ⅳ. 圓形排列

由 n 個不同物件中，每次取出 r 個，不許重複，環繞成一圓形來排列，那末，排列數是 $\dfrac{P^n_r}{r}$，這是因爲圓形上的 r 個物件，全體順時針（或反時針）方向移動 1 個位置，……，$r-1$ 個位置時，與未移動時之排列相同，但將這個圓形展開成直線來看，那末，這種移動法，就變成 r 種不同的排列。換言之，在直線上排列 r 種，在圓形排列上則變爲一種，所以它的排列數是 $\dfrac{P^n_r}{r}$。

例十一 六男六女，圍坐一桌，規定異性必須相鄰而坐，問共有若干種坐法？

解：

先安排女仕入坐，其排列數爲

$$\frac{P^6_6}{6}=\frac{6!}{6}=5!$$

再安排男子插坐其中；此時圓桌上共有 6 個不同位置，故其排列數爲 $6!$，因此，共有

$$5!\times 6!=86400 \text{ 種不同坐法。}$$

例十二 某公司八人圍圓桌開會，規定董事長與公司秘書二人並肩而坐，問共有

若干不同的坐法？

解：

因限定董事長與秘書二人並肩而坐，宛如一人，這個排列數是

$$\frac{P_7^7}{7}=6\,!$$

又因爲這二人可易位而坐，所以排列總數是

$$2\,!\times 6\,!=1440$$

§3 組　合

I. 沒有重複的組合

由 n 個不同的物件中，任意取 r 個組成一組，不准重複，這些組合的個數，記爲 C_r^n。例如，從 a，b，c，d 四個符號中，每次取出二個符號，可配成 (a, b)，(a, c)，(a, d)，(b, c)，(b, d)，及 (c, d) 等六個組，所以

$$C_2^4=6$$

一般來說

$$C_r^n=\frac{P_r^n}{r!}$$

這是因爲對每一組中的 r 個物件，將它們分別加以排列，必然可得到 $r\,!$ 種不同排列。現共有 C_r^n 組，所以共有 $C_r^n\times r\,!=P_r^n$ 個排列，即

$$C_r^n=\frac{P_r^n}{r!}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r\,!}$$
$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}=\frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$$

例十三　某次考試共有十題試題，考生可任選八題作答。

1. 問考生共有多少個選擇機會？
2. 若規定首三題試題必答，考生的選擇機會如何？
3. 若規定首五題試題中，最少選答四題，那末考生的選擇機會又如何？

解：

因爲考生答題的順序並沒有規定，所以這是一個組合問題。

1. 從十題試題中任答八題，共有

$$C_8^{10}=\frac{10!}{8!(10-8)!}$$

$$=\frac{10!}{8!2!}=\frac{10\times 9}{2}$$

$=45$ 種選擇機會

2．若首三題必答，那末考生只能從餘下的七題中任選五題作答。共有

$$C_5^7=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21\text{種選擇機會}$$

3．若考生將首五題試題全部作答，那末，又能從餘下的五題中任選三題，共有

$C_3^5=10$ 種方法

若從首五題中，選答四題，有

$C_4^5=5$ 種方法

而其餘四題，必須從剩下的另外五題中去選取，亦有

$C_4^5=5$ 種方法

因此，這樣選答的方法共有

$5\times 5=25$ 種

故考生共有

$10+25=35$ 種選擇機會

例十四　在一場乒乓球比賽中，規定每兩個參加者均對賽一局，有兩人因犯規遭淘汰出局，他們每人只比賽了三局，而且他們並無機會對賽，已知在這場比賽中共有84次對局，問這次比賽中最初的參加人數有多少？

解：

設參加比賽共有 x 人，則完全按局比賽的人數爲 $x-2$（兩人被淘汰），顯然，局數爲 C_2^{x-2} 局，加上被淘汰者所比賽的6局，總比賽了

$C_2^{x-2}+6=84$ 局，即

$\frac{1}{2}(x-2)(x-3)+6=84$，因此得方程

$$x^2-5x-150=0$$

求得　$x=15$

II．准許重複的組合

由 n 個不同的物件，任取出 r 個組成一組，准許重複，這些組合數記之爲 H_r^n，求 H_r^n 的公式爲

$$H_r^n=C_r^{n+r-1}$$

爲了說明這個公式，我們考慮下面的例子：

從1，2，3，4四個數字中，任取三個組成一組，准許重複，那麼就分別有三個數字相同，二個數字相同，三個數字不相同的組合出現。例如（1，1，1），（1，2，1）及（1，4，2）等等。現將組合內的數字，順序寫出，由小到大，並依次對每一組加上（0，1，2），就得到（1，2，3），（1，2，4），（1，5，6）等等組合。〔注意：（1，1，2）及（1，2，1）都是相同的組合，所以與組合（0，1，2）配合，所得到的組合都是（1，2，4）。換言之，在三個數字的組合中，將其中兩個數字加以變動，就可得出三個數字都不會重複的組合〕。這些組合，都是用1，2，3，4，5，6六個數字不許重複而組成的，因爲數字的數目是

$$4+(3-1)=6$$

所以這種組合的個數共有 C_3^6 個。一般來說，n 個不同物件，准許重複的 r 元組合數與 $n+r-1$ 不同物件，而又不許重複的 r 元組合數相同，二者皆爲 C_r^{n+r-1} 。

例十五 擲出三顆骰子有幾種不同的組合。

解：

因標明1，2，3，4，5，6的各面，可重複出現，故可能的擲法爲1，2，3，4，5，6的重複三元組合數，即

$$H_3^6=C_3^{6+3-1}=C_3^8=56 \text{ 種}$$

例十六 問將五種不同的酒任意注入四杯中，不許混合，共有多少種方法？

解：

因每一種酒均可重複地注入每一個酒杯中，故可能之分配法是1，2，3，4，5種酒的四元組合數，即

$$H_4^5=C_4^{5+4-1}=C_4^8=70 \text{ 種}$$

Ⅲ. 組合總數

（i）由 n 個不同物件，取出1個，2個，3個，……，至 n 個物件的組合總數爲 2^n-1，即

$$C_1^n+C_2^n+\cdots\cdots+C_n^n=2^n-1$$

這個公式，可用 C_r^n 的公式及數學歸納法來求得，另一方面，我們可以這樣來考慮：

對於每一件物件，我們都有取與不取兩種方法，所以對於 n 個物件，取捨的方法共有 $2\times2\times\cdots\cdots\times2$ 種（達到 n 個因數），而全部不取的情形則只有一個可能，所以組合的總數是 2^n-1。

（ii）設有 m 個物件，只含 n 種不同的物件，且 $m=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$，此處 p_i 表示第 i 種物件的個數，則由此 m 個物件中取出1個，2個，……以至 m 個物件的組合總數是

$$(p_1+1)(p_2+1)\cdots\cdots(p_n+1)-1$$

因爲對於每個 i，可取 0，1，2，……，p_i-1 或 p_i 個，故有 p_i+1 種取法，而減去完全不取的一種便得到上式。

例十七 韓先生往餐室吃午餐，找回一角、五角、一元及五元輔幣各一枚，問他共有多少種不同的方法去付小賬？（例如付六角、五元一角……等）

解：

因爲要付小賬，不能將全部輔幣取回，每個輔幣都有可拿回或不拿回的兩種可能，所以共有

$C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4=2^4-1=15$ 種不同的方法付小賬

例十八 金先生袋中有五十元鈔票一張，一百元鈔票七張，五百元鈔票兩張，問他可配成多少種不同的款數？

解：

由於一百元鈔票七張與五百元鈔票兩張可配成由一百、二百，……至一千七百元等款數，其效果與由十七張一百元鈔票所能配成的相同，而且我們必須將五百元鈔票兩張，視爲一百元鈔票十張來算，否則會將一種款數認爲是數種不同款數，譬如將一百元的取五張和將五百元的取一張，都是五百元，共値相等，所以是一種情形，不是兩種情形。現共有五十元鈔票一張，百元鈔票十七張，代入公式，便可得到

$(1+1)(17+1)-1=35$ 種款數

Ⅳ. 組合與排列的混合算法

例十九 將 *MATHEMATICS* 一字中的字母，每次任選四個來排列，問共有幾種不同的排列法。

解：

MATHEMATICS 一字，由 a，a，c，e，h，i，m，m，t，t，s 等八個字母構成，今任選四個成一組，有下列情形出現：

(i) 四個字母兩兩相同的，共有

$C_2^3=3$ 種組合法

四個字母兩兩相同的排列數是 $\frac{4!}{2!2!}$，所以排列總數是

$3\times\frac{4!}{2!2!}=18$ 種

(ii) 二個字母相同，其餘兩個字母不同的，共有

$3\times C_2^7=63$ 種組合

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com