

- 288684

高等学校教材试用本

土 力 学

北京地质学院编



中国工业出版社

高等学校教材試用本



土 力 学

北京地质学院編

中国工业出版社

本書系在北京地质学院水文地质及工程地质专业土力学教学讲义的基础上编写的，書中簡要地介绍了土力学的基本理論，为了便于計算起見并
列有計算图表。

关于土的物理力学性质的研究，在土质学中專門論述，故在本書中未
列入这部分內容。

本書可作为高等院校土力学教学試用書及供有关工程技術人員参考。

土 力 学

北京地质学院編

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

（北京市書刊出版事业許可証出字第110号）

地质印刷厂印刷

新华書店科技发行所发行·各地新华書店經售

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $12^{1/4}$ ·字数 291,000

·1961年9月北京第一版·1961年9月北京第一次印刷

印数0001—1,537·定价(10—6)1.50元

統一書号: 15165·912 (51—38) 15

目 录

第一章 緒 論	5
§ 1—1 土力學研究的內容及其任務.....	5
§ 1—2 土力學在國民經濟建設上的意義.....	5
§ 1—3 土力學與其有關課程的聯繫.....	7
§ 1—4 土力學發展簡史.....	7
第二章 地基土內應力的分布	9
§ 2—1 概述.....	9
§ 2—2 地基土內一點應力的計算.....	9
§ 2—3 應力分布的空間問題.....	19
§ 2—4 應力分布的平面問題.....	31
§ 2—5 考慮到土的天然條件及建築物基礎性質時的應力分布問題.....	38
§ 2—6 直接測量土內應力分布的實驗資料.....	46
第三章 地基土的變形	48
§ 3—1 概述.....	48
§ 3—2 根據土在無側脹條件的原理計算沉降量.....	50
§ 3—3 根據土在無側限條件的原理計算沉降量.....	59
§ 3—4 根據彈性理論計算基礎沉降量的方法.....	63
§ 3—5 基礎沉降與時間的關係.....	75
§ 3—6 基礎沉降量的計算結果與實測結果的比較.....	93
§ 3—7 地基的載荷試驗.....	95
§ 3—8 沉降計算結果的應用.....	99
第四章 地基的強度及穩定性的計算	102
§ 4—1 概述.....	102
§ 4—2 莫爾破壞理論及塑性（極限）平衡的條件.....	104
§ 4—3 地基內塑性平衡區的发生和发展.....	106
§ 4—4 地基極限荷載的計算.....	110
§ 4—5 擋水建築物及地基穩定性的計算.....	123
§ 4—6 天然地基的允許強度.....	133
第五章 土坡穩定性的計算	140
§ 5—1 概述.....	140
§ 5—2 砂類土土坡穩定性的計算.....	141
§ 5—3 確定粘性土土坡穩定性的檢驗計算法.....	143
§ 5—4 確定粘性土穩定土坡的斷面繪制法.....	160
§ 5—5 考慮水動力因素影響土坡穩定性的計算.....	164

第六章 挡土结构上的土压力.....167

(一) 挡土墙上的土压力

§ 6-1 概述.....	167
§ 6-2 确定挡土墙上土压力的分析法.....	169
§ 6-3 确定挡土墙上土压力假设土体滑动面为平面的图解法.....	172
§ 6-4 确定挡土墙上土压力假设土体滑动面为曲面的图解法.....	179

(二) 地层压力

§ 6-5 概述.....	182
§ 6-6 M·M·普罗托加蘭諾夫平衡拱的假說.....	183
§ 6-7 地层压力的計算.....	187
§ 6-8 地层压力的模型試驗.....	190

第一章 緒 論

§ 1—1 土力學研究的內容及其任務

土力學是研究工程建築物與土（地基土）相互作用過程中土體內應力與應變之間相互關係的一門科學。其目的在於正確地設計建築物的尺寸，計算土的強度和穩定性，從而保證建築物安全存在和正常使用。

眾所周知，任何工程建築物的勘測、設計和施工，要達到合理、經濟和安全，必須要解決一系列的工程地質問題，在解決工程地質問題時，常常要求我們用數量來評價和預測各種工程地質現象，這就是土力學的任務。因此，土力學是一門考慮到土的性狀和建築物特點的理論性計算的科學，它給各種工程地質現象提出定量的評價。

例如，由於建築物的荷重將引起土體的變形，從而使建築物基礎發生沉降和不均勻沉降的問題，就必須事先進行計算沉降量使其在許可的範圍內。正確地根據建築物的特點和土的性質提出地基土的許可耐壓力，是評定建築物的穩定性和設計建築物不可缺少的資料。開挖路塹及修築堤壩時確定土的穩定邊坡以及確定擋土結構上土壓力的大小等，都要求我們根據土力學方面的理論去進行科學的分析和計算。

必須指出的是：土力學在研究問題時，對複雜的自然現象（如地質構造、土的性質、地下水運動特徵等等）作了許多的簡化和假設，故運用這些成果去解決工程實際問題時，往往必須要作一些修正和補充，使之能較接近實際情況。

作為工程地質工作者研究土力學來言，不僅在上述方面具有重大意義，而且根據土力學的理論對指導勘探設計工作具有十分重要的意義。例如，根據地基土中應力分布的特徵和滑動綫網的輪廓，從而合理地布置勘探孔的位置和深度（如圖1—1和圖1—2所示）。

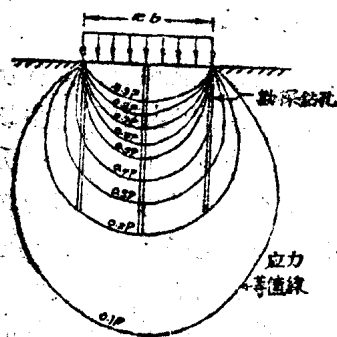


圖 1—1 根據應力分布範圍布置勘探鑽孔

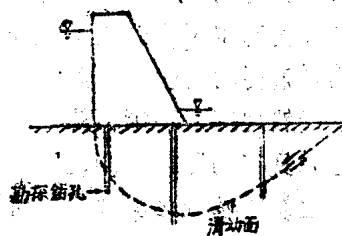


圖 1—2 根據滑動綫網的範圍布置勘探鑽孔

§ 1—2 土力學在國民經濟建設上的意義

隨著社會主義經濟建設飛速的發展，各種工程建築物大量的興建，特別是許多高層和重型建築物的興建，使得建築物的荷重大大增加，為了確保工程建築物的安全與經濟，要

求我們对建筑物地基土的承载能力必須加以研究与分析。如果不根据土力学、土质学等方面的理論去科学地分析地基土的承载能力，而盲目地进行施工，将会造成严重的事故和浪费人民的财产。要做到多快好省地进行建筑物的勘测、設計与施工达到安全、經濟和适用的目的，土力学与其他科学一样是担负此项任务中的重要組成部份之一。

由于忽视对工程建筑的地基土进行工程地质研究，及对建筑物稳定性缺乏严密的理論計算和定量评价，造成地基土稳定性不够而使得建筑破坏，这类严重的事故在資本主义国家里是很多的。例如在水工建筑方面，絕大多数水坝的傾复破坏都是由于建筑物的地基土稳定性不够而引起，如1928年的圣弗兰西斯坝（美国加利福尼亚）、1911年的奥斯汀坝（美国宾夕凡尼亚）、1802年的班脱斯坝（西班牙）等就是上述之例。这些水工建筑物的破坏，不仅在經濟上造成巨大的損失，而且造成重大的死亡事故，这种損失是无法計算的。如由于圣弗兰西斯坝的傾复破坏造成死亡人数达400人，班脱斯坝的破坏造成死亡人数达680人。在土木建筑方面，如加拿大溫尼佩格城的特朗斯康谷仓由于地基土稳定性不够，谷仓建成不久发生巨大的不均匀沉降，沉降量达8.80米之多，建筑物傾斜达27度。意大利的比薩斜塔在建成后的766年中下沉达2.40米，由于不均匀沉降（一边达3.20米，一边达1.60米）而引起傾斜。墨西哥城的高等矿业学校由于不均匀下沉而破坏了建筑物外形。諸如此例，皆說明在建筑物兴建前，結合工程建筑物的特点进行工程地质研究并对地基土稳定性提出定量评价的重要性。

在我們伟大的祖国大規模的基本建設初期，党和政府就十分重视对地基土进行工程地质勘测。早在1951年間，人民日报就及时指出了某些工程建筑物由于忽视地基勘测工作而影响施工进程的恶果，从而加强了工程地质勘测工作，避免了工程建筑物修建后的严重事故。

近几年来，随着經濟、文化及科学事业的发展，有許多重要的建筑物必須建筑在指定的地点，而这些地区的地基土多为軟弱土层，如果不根据土质学、土力学、工程建筑学等方面的理論知識去綜合分析地基土的許可压力，盲目加大建筑物基础的安全設計，这样虽然地基是很稳定，建筑物很安全，但是浪费了巨大資金也是不許可的。所以，土力学在保证建筑物設計达到既安全又經濟方面具有十分重要的意义。

解放以来，在党的领导下，土力学在我国有了很大的发展，在社会主义經濟建設的工程建筑上起了很大的作用。例如，上海地区地表下广泛分布的粘土层較厚，过去該地区所有的高层建筑物和重要的工业厂房都普遍采用桩基。近年来，許多中小型工业厂房和高层建筑物都采用了天然地基，基础埋置在上部亚粘土层中。又如北京城內的許多建筑地区，分布有人工填土和具有高压縮性的近代淤泥土，过去传统說法，这些天然土层不允许作为建筑物地基土，建筑物基础必須埋置在所謂“老土”中。1954年以后，生产实践大大丰富了土质学、土力学的内容，又根据这些科学知識进行了分析研究，打破了上述陈旧的傳說，开始在人工填土和近代淤泥土上进行建筑。1958年在天安門广场附近兴建的占地面积达80000平方米的高大建筑物群，就是利用了四老河河床的淤泥土和人工填土作为天然地基的。再如东北某企业厂房建筑在沼泽地带，天然地面标高变化达9米，厂房南北两端有淤泥夹层，中部有砂砾夹层，夹层厚度变化很大，如将淤泥土全部挖除，估計土方将达80—90万立方米，如用桩基須打桩15000根。后来按极限状态設計决定采用天然地基，根据沉降計算資料，各部份沉降在10—13厘米范围內。在設計时采取了一系列措施解决了不均匀

沉降問題。由于采用了天然地基，不但節約了200万元的巨額投資，并且縮短了工期2—3个月。諸如上例，一方面說明了我們偉大的社会主义祖国在土力学方面取得了巨大的成就，另方面也說明了土力学在国民經济建設中居有重要地位。

§ 1—3 土力学与其有关課程的联系

在§ 1—1节中使我們清楚地了解到，土力学是一門研究建筑物作用下土体内应力与应变关系的科学，因此，它与数学有着密切的联系。自然界的土其性状是十分复杂的，仅根据簡單的松散体理論公式进行計算是远不能得到滿足的。因而要进行更准确的計算，就必须具备有現代高等数学的知識，才能作出較符合实际情况的計算。

必須強調指出，在土力学中进行計算研究时，絕不可忽略对土的性状的研究，單純片面地強調純数学上的演算，而把土当作互不联系的顆粒堆积体，坚持这种观点将走向形而上学錯誤的道路。

自然界的土是各种地质作用綜合作用的結果，是自然历史发展的产物，不同成因的土具有不同的性状，而且是不断在变化着。現代土质学的任务之一就是研究不同土的性状的形成和演变規律。因此，土力学与土质学有着极密切的联系，土力学要作出正确的定量評价，必須建筑在土质学对土的质的方面研究的基础上，絕不可把量和质分割开而片面地去談量，因为量里却充滿了质的差异。

理論力学、材料力学及水力学等，它們是建立土力学基本理論的重要手段。理論力学提供一般进行力的分析方法。材料力学中关于不同材料强度的理論給土力学提供了理論基础。由于土不同于一般材料力学中所研究的材料，所以材料力学只能提供一般的理論和方法。水力学提供了水在土中运动的一般原理，从而帮助了解渗流对地基土强度和变形的影响。

显而易见，現代土力学应该是在研究土的性状的基础上，运用数学力学分析的方法，把理論力学、材料力学和水力学的一般理論知識应用于解决建筑物与土相互作用的規律，从而建立起一門独立的科学——土力学。

§ 1—4 土力学发展簡史

所有的科学都是以人类生产实践活动为基础形成和发展起来的，人們所从事的某种生产規模愈大，則与此有关的科学也发展得愈迅速，土力学也是这样。

在古代人类从事建筑活动时，对建筑物的穩定性問題是有一定認識的，否則，一些古代宏伟的建筑物至今还保存着是不可想象的。古代的一些工程所以能得到解决，主要是依靠工程活动中人的直觀而采取了較大的安全系数，因此，在古代时人們的概念里，把坚硬的岩石才認為是建筑物唯一可靠的地基。

随着生产的发展，随着人类經济、文化生活要求的进展，各种建筑物开始大量的兴建，建筑物不单修筑在坚硬的岩石上，而且要求修筑在松軟的土层上。因此，采用直觀的办法解决建筑物的穩定性問題已不能滿足生产实践的要求了。人們开始凭借以往建筑物成功的或失败的經驗进行类比，从而解决新建建筑物的穩定性問題。随着生产活动的发展，大型工厂、城市桥梁和铁路公路桥梁、巨型海港和河川水工結構物等逐漸开始兴建，簡單的类比法又远不能滿足生产发展的要求。到十八世紀后期，长期来人类生产实践累积了許

多的經驗，相应的科学知識也有了很大的进展，建筑工程活动方面迫切地要求解决：建筑物与土之間相互作用規律性的問題，从理論上来認識和解决建筑物稳定性的問題。

十八世紀后期第一个奠定散体理論的是庫伦，庫伦建立了极限平衡理論的主要原則，并用于計算挡土墙后的土压力。同世紀开始利用散体理論解决建筑物砌置深度的問題。

由于根据散体理論建立起来的計算公式，沒有考虑到土的各种物理力学性质和建筑物与土相互作用过程中的特征，因而在解决地基土强度和稳定性方面具有很大的局限性，地基土內应力分布問題更沒有得到解决。这种矛盾的存在，迫切地要求理論进一步发展，满足生产实践的需要。显而易见，散体理論作为一切理論計算基础是不能滿足的。

十八世紀至二十世紀初期以来，經濟、文化和科学都有了更进一步的发展。土力学方面的研究也同其他科学一样也有相应的进展，不仅在解决地基稳定性方面采取了实验室的研究方法，而且利用弹性理論（1916年）解决了散粒体中应力分布的問題，研究了土体中应力与应变的問題，土力学才开始形成完整的理論体系。作为一門科学的形成來說，土力学还是一門較年青的科学，它應該說是本世紀二十年代形成和发展起来的。

十月革命后，由于苏維埃社会主义制度的优越性，苏联社会主义、共产主义經濟建設飞速的发展，在規模上和速度上都远远超过資本主义。随着巨型水工建筑物的兴建，高层建筑物的兴建，重型工业厂房的兴建，地下鉄道工程的兴建。这些宏伟的工程兴建使苏联在土力学理論得到迅速发展，远超过資本主义国家，許多土力学方面的經典著作先后出版。

我們伟大的祖国是一个具有高度文化历史悠久的国家。早在公元前就兴建聞名世界的都江堰水利工程及开始开挖北京—杭州南北大运河工程。各地的宮殿、桥梁、庙宇、宝塔等建筑物更是难以数計。这些宏伟的工程建筑至今还留存，說明劳动人民的智慧和力量是无穷无尽的，說明了对地基土稳定性的問題有很高的認識水平。但是，由于长期来封建王朝和国民党黑暗的统治，科学沒有得到应有的发展。解放以来，祖国社会主义經濟建設飞跃的发展，展开了全面的、大規模的經濟建設。土力学也同其他科学一样获得了巨大的成就。这不仅体现在各种巨型工程建筑物兴建后安全和經濟上，而且在理論上也有飞速的发展，及时地滿足了生产发展的需要。由于党和政府正确的領導，土力学方面展开了一系列学术活动和經驗交流会，全国各地都建立有專門性的組織。从1953年起在土力学方面开展了以下的一系列的学术活动和經驗交流会：在1953年8月中国科学院召开了“工程地基土壤檢驗會議”。同年中国土木工程学会所屬各地分会开始建立关于土工与土力学的組織。1956年国家建設委员会举行了全国基本建設工作會議，接着国务院科学规划委员会还成立了关于土工的協調小組，制訂了1957年的計劃。根据計劃，在中国科学院与国家建設委员会領導下，于1956年中国土木工程学会成立了“土工学术專門委员会”，并在1957年参加了“国际土力学及基础工程协会”。同年还派員出席了在英国伦敦召开的“第四届国际土力学及基础工程會議”。1957年建筑工程部召开了地基加固會議。1959年3月建筑工程部召开了全国地基基础經驗交流會議。同年5月在宁波召开了关于全国鉄路泥沼路基經驗交流會議。上述活动，使土力学得到了迅速的发展。

我們深信，今后在党和毛主席的领导下，我們一定能在很短的时间內攀登世界土力学的高峯。

第二章 地基土內应力的分布

§ 2—1 概 述

由于建筑物或土的自重在地基土內所产生的应力，是本章所要研究的主要内容。

土內应力的存在及其分布的规律性，可由工程实践或有关的实验室試驗中观察到。例如，建筑物下地基土的压缩变形，或滑动破坏，就是由于建筑物的荷重在地基土內所产生的应力的表现。即当应力值还小于土本身的强度时，土体只表现出压缩变形；而当应力大过土本身的强度时，则土体开始破坏。如果，我们在实验室将测量应力的仪器，按一定规律埋在地基土內不同深度的不同位置上，当土体上施加荷载时，从测量应力的仪器上，可以讀得一系列的应力值，从而观察到地基土內应力的分布。

由实践及試驗資料的分析，可以得出結論：地基土內的应力分布是有规律的。土內一点的应力不仅取决于外部荷载的性质与大小；而且，随着与荷载作用处的距离的增加其值越小。

在工程建筑上，为了满足建筑物附合既安全、又经济的要求，必须对地基土內的应力分布进行研究。在掌握土內应力分布的规律之后，我们才能有目的地、合理地进行勘探、試驗工作，并为建筑物的設計、施工提供必要的資料。

在目前，研究土內应力分布的方法，大致可分为两类：第一类，主要是理論研究的方法。它主要通过数学、力学的推理与計算进行研究的。在其所依据的理論根据方面，主要的有弹性理論及塑性理論两方面（目前，又出現了一种依弹塑性理論进行研究的新方向）；第二类，是直接测量和模型試驗的方法。它主要通过由直接测量土內应力的数值，或从模型試驗所获得的資料的分析，研究其规律性。但需指出，实际上，以上两类方法都不是孤立进行的，而是同时进行密切結合的。

§ 2—2 地基土內一点应力的計算

1. 基本概念

在研究地基土內应力的时候，是把所研究的土当作是弹性的、連續的和等向性的半无限的物体。实际上，土是松散的物体，是由单独的細的顆粒所組成，其間不粘着，或者一般來說只有不大的內聚力所粘着；那么应用連續物体的一般应力理論在土中就要有些出入。

任何外部荷载以及土本身的重量是通过排列不規則的接触点，或某些結構网由一点传到其他各点，在我们实际研究时不考虑单独顆粒上单独力的作用，而是把这些力連續分配在我们所求得应力的任一微小面积上。H·M·格尔薛凡諾夫教授指出，在这样的考虑下，在松散土，如粘土，应力的不准确性并不大于研究鋼时所得的，而鋼同样是由极小的顆粒（結晶体）所組成的。在粗粒土中，应力的誤差将大于粘土中的，但是并不超过工程計算中通常允許的誤差。

必須指出，应用于土中的应力理論是有它的特殊性的，即飽水的土中应力不能立即完全传到土固体顆粒上去，而对于它的充分发展要求一定的時間，所需時間的多少除决定于

外部荷载的数值外，同时还根据土的透水性，负荷面积的大小，以及传递荷载的基础的刚度。在计算建筑物的天然地基时，相当于土完全稳定时的应力，亦即当所有外部荷载都传到土固体颗粒时的应力，有最大的实际意义。

2. 土内一点的应力

某点的应力状态，即通过该点所有各方向微面上的应力的组合。通过该点各微面上的应力一般是不相等的，这与静水中一点的静水压力在各方向都相等的情况是有区别的。所以，土内一点应力的大小及方向将取决于外力的大小与方向，同时也决定于经过此点所引出的面的方向。

在土内任取一个边长为无限小的微小立方体，如图2-1所示。在这立方体的六个平面上，总共作用着六个垂直于各平面的法应力分量，和十二个平行于各平面的剪应力分量。由于互相平行的各对平面上的应力分量在数值上是相等的，并根据材料力学已证明的剪应力成双定律的原理，所以实际上在这立方体各面上的应力分量只有六个未知量。即三个法应力分量： σ_x 、 σ_y 、 σ_z ；三个剪应力分量： τ_{xy} （或 τ_{yx} ）， τ_{yz} （或 τ_{zy} ）， τ_{zx} （或 τ_{xz} ）。

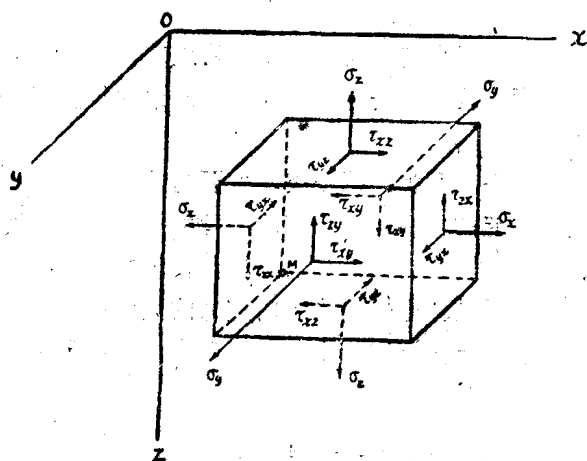


图 2-1 在已知点M附近所截取的无限小立方体各面上应力分量的标号。

不同面上的不同的应力在工程实践上所起的作用是不同的。例如，垂直应力 σ_z ，它主要将引起土在垂直方向的压缩变形，因此，对基础沉降的问题有密切关系。而水平应力 σ_x 、 σ_y ，它主要将引起土的侧向变形，因此，对于距离较近的相邻建筑物基础的互相影响问题上，有密切的关系。至于剪应力 τ ，它主要关系到土的剪切破坏，因此，在研究建筑物地基不至剪切破坏的问题上有直接的关系。所以，我们在不同条件与要求的情况下，将对某些应力分量给予特别的重视，而对另一些应力甚至不予考虑。

但需指出，各应力分量之间并非孤立存在，或单独起作用的，相互之间是有着一定联系的。所以我们需要研究各应力分量之间的关系，也需要知道该点中最大的法应力及剪应力值，以及发生最大法应力及剪应力的面的方向。

3. 土内一点应力关系的数学表示法

在这里我们研究平面问题的应力间相互关系的问题。当研究作用于一力点的平衡条件时，对于用以研究应力的材料性质不作任何限制，即这些条件为纯粹的工程力学的几何关系，并且对任何物体（其中包括土）都是正确的。

我们在土中取出一个三棱柱体，其长度等于1单位，三个无穷小的边分别为 dy 、 dz 、 ds ，如图2-2所示。一般情形下问题在于计算斜面AB上的应力，即已知应力 σ_y 、 σ_z 及 τ 时，计算在与 y 轴成 α 角的斜面上，法应力 σ_α 及剪应力 τ_α ， σ_y 、 σ_z 及 τ 是在承受一定的外荷载下解决土体中应力分配问题时得出的。由于棱柱体的尺寸无限小，对于既定点O之应力将

等于作用于斜面 AB 上的应力。为计算应力 σ_α 及 τ_α ，将全部力 ($\sigma_x dy \times 1$, $\tau dy \times 1$, 及其他) 投影于 σ_α 及 τ_α 方向上，则得出：

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha \quad (2-1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau \cos 2\alpha \quad (2-2)$$

斜面 AB 上的合应力 σ 等于应力 σ_α 及 τ_α 的几何和，即

$$\sigma = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} \quad (2-3)$$

应力 σ_α 及 τ_α 的值有最大及最小的时候，它们随着 α 角的变化而变化，为计算 $\sigma_{\alpha \max}$ 及 $\sigma_{\alpha \min}$ 我们取公式 (2-1)

对 α 微分一次，并使之等于零，由此得出：

$$\operatorname{tg} 2\alpha_n = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-4)$$

因为，一个角与另一角间的差为 180° 的两个角符合同一的正切的值，则当 α_n 角为第一个值时， σ_α 将为最大；当 α_n 在另外的一个值时，则 σ_α 为最小。这个可以用 (2-1) 式的二次导数来决定。

将 σ_α 的一次导数与 (2-2) 式比较，即可得出：

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha = 0$$

亦即在 $\sigma_{\alpha \max}$ 及 $\sigma_{\alpha \min}$ 面上是没有剪应力的。因此，在土内任何一点都有两个互相垂直，而其上只有法应力的面。这两个平面称为主平面，其面上的最大及最小的法应力称为主应力。

为计算 $\tau_{\max}$ 及 $\tau_{\min}$ ，根据 α 角将 (2-2) 式对 α 微分一次，并使之等于零，由此得出与 $\tau_{\alpha \max}$ 及 $\tau_{\alpha \min}$ 相应的 α 的值，即

$$\operatorname{tg} 2\alpha_t = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} \quad (2-5)$$

将 (2-5) 式与 (2-4) 式比较，则得到这样的结论： $2\alpha_n$ 角与 $2\alpha_t$ 角相差 90° ，因而， α_n 角与 α_t 角相差 45° ，即最大及最小剪应力面的方向与主平面的方向成 45° 角。

我们得到了 α_n 及 α_t 的值，将其值代替图 2-2 中的 α 值，即分别得到具体的主平面及最大、最小剪应力面的位置。同时，将 α_n 值代替方程 (2-1) 中的 α ，即可得到主平面上的最大主应力及最小主应力 ($\sigma_{1,2}$)。将 α_t 的值代替方程 (2-1)、(2-2) 中的 α ，即可得到最大及最小剪应力平面上的应力 (σ_{α_t} , $\tau_{\max/\min}$)。

最大及最小主应力：

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (2-6)$$

最大及最小剪应力面上的法应力：

$$\sigma_{\alpha_t} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2-7)$$

最大及最小剪应力：

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \quad (2-8)$$

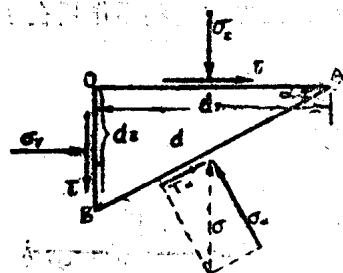


图 2-2 应力的基本微柱体

与图 2-2 及方程 (2-1)、(2-2) 相似的另一种一点的应力关系, 即当已知主平面上的应力 σ_1 、 σ_2 时, 求任意平面上的应力 σ_α 、 τ_α 。力的作用如图 2-3 所示, 用以前相同的办法, 利用作用在稜柱体 (厚 1 单位) 上的力平衡的条件得到未知力 σ_α 及 τ_α 。

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (2-9)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (2-10)$$

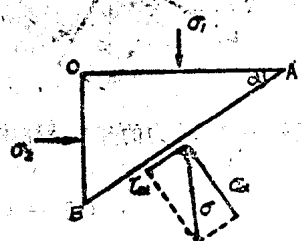


图 2-3 应力的基本稜柱体

如图 2-4 所示。

由方程 (2-9) :

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_2}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

移项 $\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (1)$

由 (2-10) $\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (2)$

(1) 与 (2) 两边平方相加得:

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (2-11)$$

方程 (2-11) 很清楚是圆的方程, 圆心在 $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ 处, 半径为 $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$,

以方程 (2-11) 作图, 如图 2-4:

以纵坐标表示剪应力 τ , 横坐标表示法应力 σ , 在横坐标上取

$$OA = \sigma_1$$

$$OB = \sigma_2$$

以 A、B 的中点 C 为圆心, AB 为直径作圆即为莫尔应力圆。

应力圆的主要特性: 第一, 圆周上任一点的坐标值, 即代表土内一点相应平面上的应力值。如图 2-4 中, 自 B 点作 BD 直线, 使 $\angle ABD = \alpha$, 则 D 点的坐标值, 即 B'D' 面上的应力值。连 OD = p, 即得 B'D' 面上的合应力 p。

当 α 为任意角时,在应力圆上相应的点D即代表任意面上的应力。关于D点的座标能代表B'D'面上的应力问题,简易地证明如下:

在图2-4中:

横座标

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \overline{OC} + \overline{CE} \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\text{纵座标 } \tau_\alpha = \overline{CD} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

以上两式与方程(2-9)及(2-10)相符合,故证明是任意面上的应力。而圆周与横座标相交的两点,如图2-4中的A点及B点,由于其纵座标值为零($\tau=0$),所以,此两点即代表主平面,其横座标值即为主应力值。第二,圆周上任意两点所连成的弧所对的圆周角,即代表该两点所代表的两个平面的夹角。此夹角也可以用该两点所形成的圆心角的一半表示。

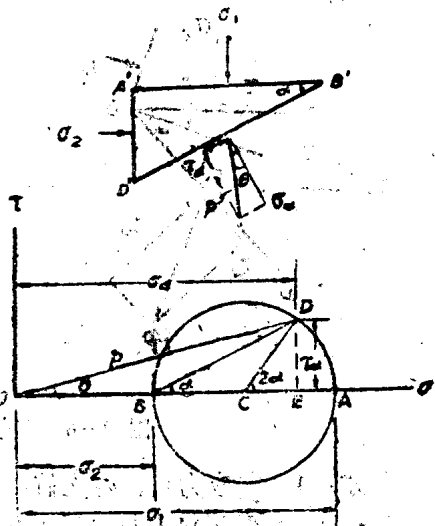


图2-4 莫尔应力圆

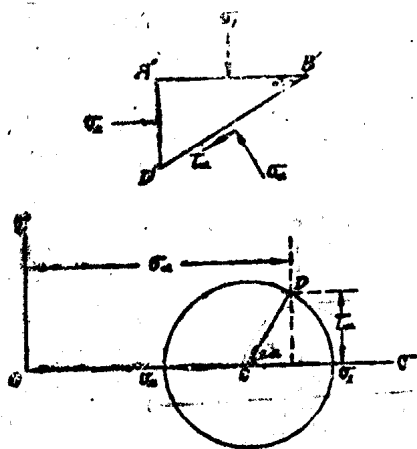


图2-5 由应力圆求 σ_α 、 τ_α

根据以上特性,通过应力圆的图解,可以解决如下问题:当已知主应力 σ_1 、 σ_2 时,可以求得与主平面夹任意角 α 的平面上的法应力及剪应力值,以及求得该平面的位置。如图2-5,在横轴上按比例截得

σ_1 、 σ_2 ,以 $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ 为圆心,以 $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ 为半径作

圆,得应力圆,由圆心引出与横轴夹角为 2α 的直线,交圆周上D点,则D点即代表所求之平面(B'D'平面)。该点的座标(σ_α , τ_α)即为所求平面上的法应力及剪应力。应力圆能解决的另一问题是,当已知任意两个互相垂直的平面上的应力,如(σ_x , τ)及(σ_y , τ),可以求得与其中任一平面夹任意角 α 的平面上的

应力,以及 σ_1 、 σ_2 的方向与数值。如图2-6,在 σ - τ 坐标系内,首先找到代表已知平面(A'B'及A'D')上应力的点的座标,即E(σ_x , τ)及F(σ_y , τ)点,连此两点的直线EF,交横轴于C点,则C点即为应力圆之圆心,(因为已知两平面互相垂直,所以在应力圆上所反映的 $2\alpha=180^\circ$),然后作应力圆,由C点引出与CE夹角为 2α 的直线,交圆周上的D点,则D点的座标(σ_α , τ_α),就是与已知平面(A'B'平面)夹角为 α 的平面(B'D'平面)上的法应力及剪应力。同时应力圆与横座标轴的两个交点(A, B)的座标,就是主应力 σ_1 及 σ_2 。A'C'E的一半即表示主平面与已知平面(A'B')的夹角(β),因此,不难求得主平面的位置。

例题 2-1 在外荷作用下,已知通过土内M点的两个面上的应力,MA面上的法应力 $\sigma_3=4.9$ 公斤/厘米²,剪应力 $\tau_3=-0.7$ 公斤/厘米²,MB'面上法应力 $\sigma_4=2.7$ 公斤/厘米²,剪

应力 $\tau_s = 2.0$ 公斤/厘米²，并已知主平面的方向：（面的实际方向，不是法线方向），如图2—7中，最大主应力面为 MD' ，最小主应力面为 ME' 。

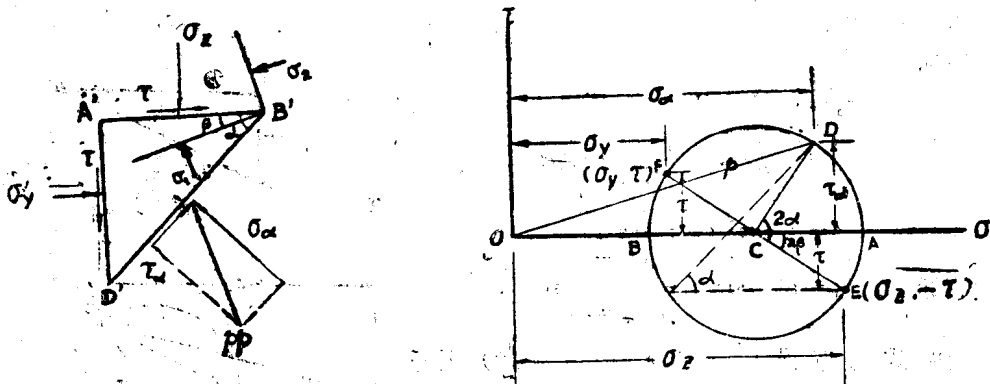


图 2—6 莫尔应力圆求 σ_x 、 τ_s 及 σ_1 、 σ_2

- 试求：1. 主应力 σ_1 、 σ_2 之值；
2. 平面 MA' 与 MB' 的方向及它们的夹角。

〔解〕 以横坐标代表法应力 σ ，纵坐标代表剪应力 τ ，在坐标系上找到坐标为 $(4.9, -0.7)$ 的点A，坐标为 $(2.7, 2)$ 的点B，连AB，作AB的中垂线，交 σ -轴于C，以C为圆心，CA为半径作圆，即应力圆，应力圆交 σ -轴于D及E。

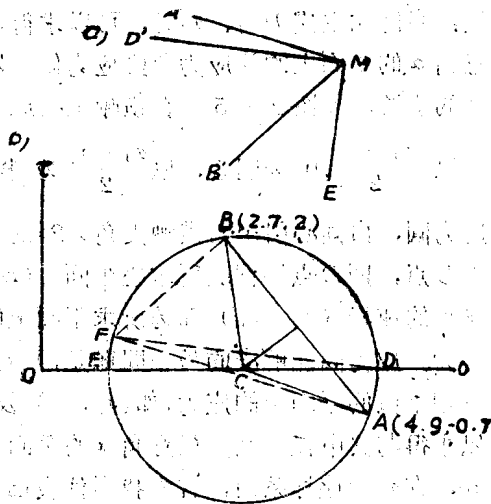


图 2—7 利用应力圆求面的方向

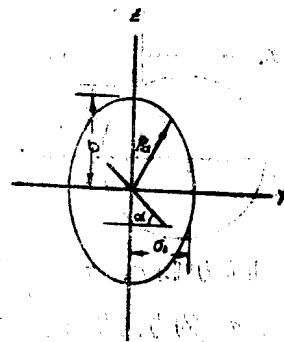


图 2—8 应力椭圆

则量得 $\sigma_1 = OD = 5$ 公斤/厘米² (答 1)
 $\sigma_2 = OE = 1$ 公斤/厘米² (答 1)
自D点作 $DF \parallel MD'$ 交圆于F，连AF、BF，作 $MA' \parallel AF$ ，
 $MB' \parallel BF$ ，则得 MA' 及 MB' 平面的方向。 (答 2)
并量得， $\angle A'MB' = 60^\circ$

5. 应力椭圆

除用数学的或图解的方法能表示及计算土内一点的应力状态外，如果用应力椭圆即能

通过几何图形一目了然地表示土内一点的应力状态。

应力椭圆是由过土内一点各作用面上的合应力矢量的端点所联成的几何图形，如图 2-8。

合应力矢量 p_α 是法应力与剪应力的几何和。一般情况，在坐标 xy 系内，任意平面（与 y 轴成 α 角）上的合应力矢量端点的坐标 (z, y) ，可以下式表示（如图 2-9）。

$$\begin{aligned} z &= \sigma_n \cos \alpha + \tau_n \sin \alpha \\ y &= \sigma_n \sin \alpha - \tau_n \cos \alpha \end{aligned} \quad (1)$$

这里 σ_n 及 τ_n 如用 (2-9) 及 (2-10) 式所表示的值代入，就能以主应力 σ_1 及 σ_2 表示这个坐标：

$$\begin{aligned} z &= (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= \sigma_1 \cos^3 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha \cos \alpha - \sigma_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \sigma_1 \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

$$y = (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \cos \alpha$$

$$y = \sigma_1 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \sigma_2 \sin^3 \alpha - \sigma_1 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sigma_2 \sin \alpha \quad (3)$$

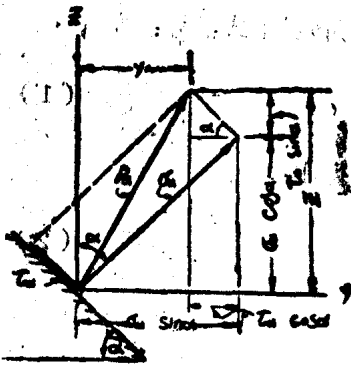


图 2-9 合应力矢量端点的坐标

研究上面描述合应力矢量端点的坐标，自方程式 (2) 及 (3) 中除去独立的参变数 α ，即可以得到这个椭圆方程式。为了这个目的，使方程式 (2) 及 (3) 两边平方以后并且改组成下列形式：

$$\frac{z^2}{\sigma_1^2} = \cos^2 \alpha \quad (2')$$

$$\frac{y^2}{\sigma_2^2} = \sin^2 \alpha \quad (3')$$

由此得到新的方程式

$$\frac{z^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1 \quad (2-12)$$

这是以主应力 σ_1 及 σ_2 为主半径所构成的椭圆的方程式，这个椭圆即称为应力椭圆，如图 2-8 所示。

自应力椭圆坐标原点引出的任何半径矢量，即是过土内一点的某一斜断面上的合应力矢量。

在土内一点所构成的应力椭圆，是这一点充分完备的和一目了然的应力状态的图。

应力椭圆具有不同的形状，依主应力 σ_1 及 σ_2 的比例来决定。

如果，在土内将所研究的各点的应力状态，都以应力椭圆表示，并表示在相应的位置上，则能一目了然的看出地基土内应力分布的规律。如图 2-10，

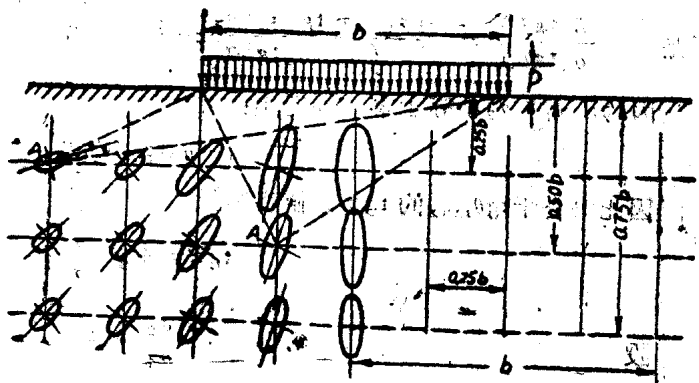


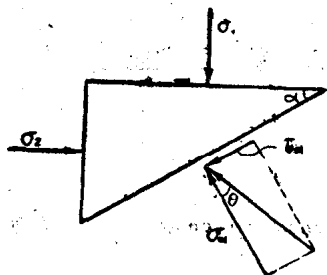
图 2-10 长条面积均布荷载下应力椭圆布置

如图 2-10，

即表示在长条面积均布荷载作用下应力椭圆分布的情况。它反映了土内各点主应力的大小及方向随着距荷载距离的不同，在纵向及横向的变化规律。也就可得出土内应力分布的规律。

6. 最大偏角

在一平面上的合应力矢量线与此平面的法线所组成的角（图 2—11， θ 角），称为偏角。



角。偏角是土内一点的应力状态最重要的特性。因为，偏角反映的是某平面上法应力与剪应力的比例关系，所以，偏角的大小就反映了在此平面上发生剪切危险性的大小，偏角越大，危险性越大。偏角的最大极限称为最大偏角。最大偏角的大小取决于最大与最小主应力之差。如果， σ_1 与 σ_2 之差愈大，则最大偏角 $\theta_{\max}$ 之值也愈大；亦即 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ 之比愈小， $\theta_{\max}$ 之值就愈大。

图 2—11 决定最大偏角的图

为计算最大偏角，在地基土内取一尺寸无限小的直角稜体，使其邻接于直角的两面只受主应力（图 2—11），斜面上合应力与该面的法线组成的偏角 θ 以下式计算：

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\tau_n}{\sigma_n} \quad (1)$$

将 (2—9) 及 (2—10) 式中之 σ_n 及 τ_n 代入公式 (1) 得出：

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha}{2(\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha)} \quad (2)$$

将 (2) 式之分子分母分别除以 $\cos^2 \alpha$ 则得：

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{tg} \alpha}{\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (3)$$

为计算最大的 $\operatorname{tg} \theta$ ，必须从 (3) 式中按 $\operatorname{tg} \alpha$ 找出一级导数，并使其等于零：

$$\frac{\partial(\operatorname{tg} \theta)}{\partial(\operatorname{tg} \alpha)} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha)(\sigma_1 - \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}$$

于是

$$\frac{\partial(\operatorname{tg} \theta)}{\partial(\operatorname{tg} \alpha)} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha)(\sigma_1 - \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha)^2} = 0$$

因为， $\sigma_1 - \sigma_2$ 不等于零，则得出：

$$\sigma_1 - \sigma_2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 0$$

因此符合于 $\operatorname{tg} \theta_{\max}$ 的 $\operatorname{tg} \alpha$ 之值将等于：

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad (4)$$

设

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \xi \quad (5)$$

得出

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \quad (6)$$