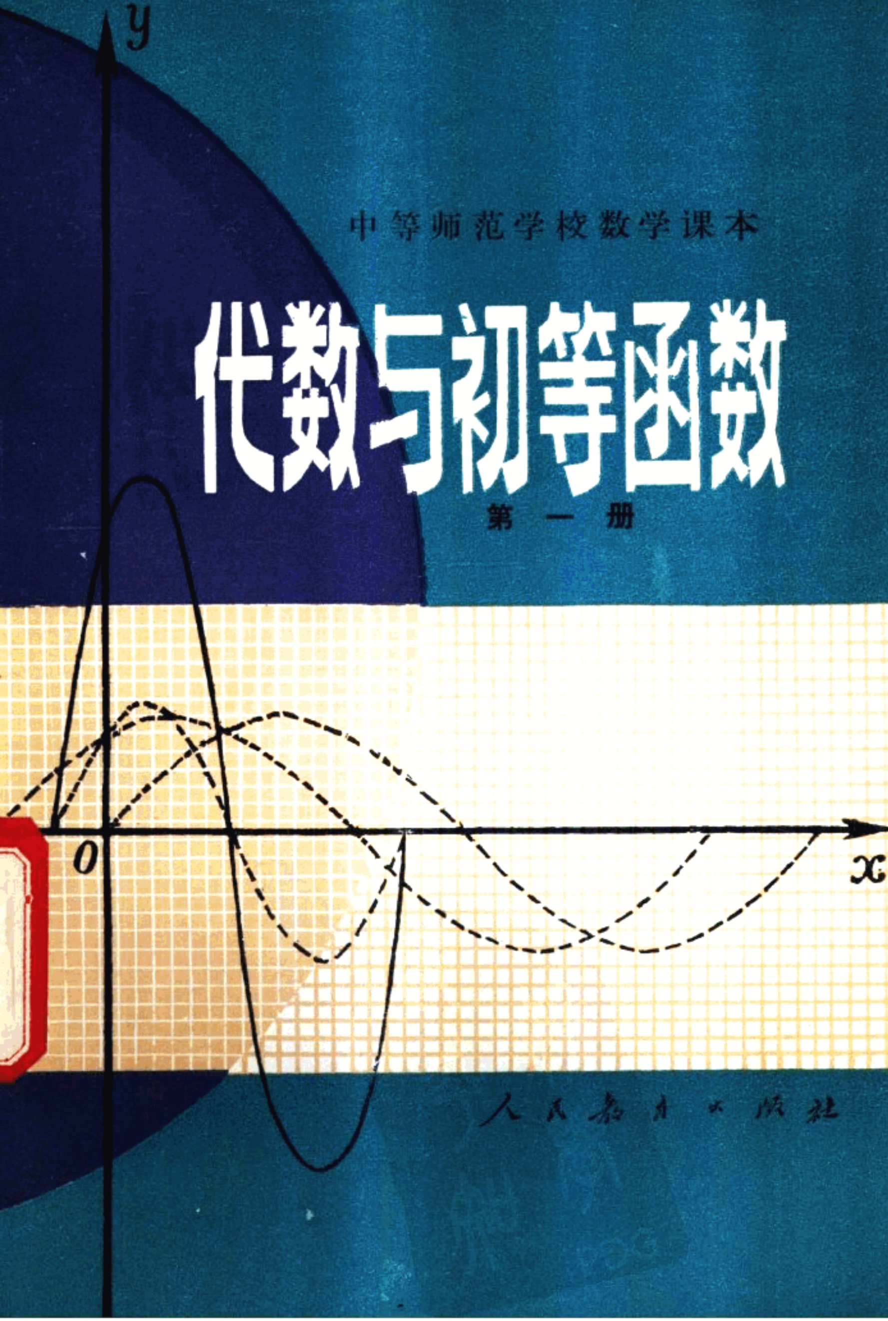
中等师范学校数学课本

代数与初等函数

第一册



人民教育出版社

本书是由教育部委托湖南省教育厅组织编写的．初稿编成后，教育部委托湖南省教育厅和人民教育出版社召集有北京、上海、河北、辽宁、吉林、江苏、浙江、福建、湖北等省、市代表参加的审稿会议，对初稿进行了审查．会后，由编者根据审查意见进行了修改。

目　录

带 * 部分为选学内容.

第一章　集合与对应

一　集　　合

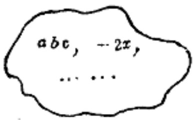
在初中我们已见过一些集合的例子．现在我们来学习集合的一些简单知识．

1.1　集合

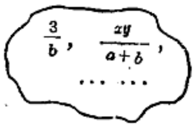
在初中数学课本中讲过一些集合，例如：

（1）“所有的正数组成正数的集合，所有的负数组成负数的集合”；

（2）



整式的集合



分式的集合

（3）“在 AB 的垂直平分线 MN 上的点到 A、B 两点的距离都相等，并且，到 A、B 两点的距离相等的点都在 MN 上，所以直线 MN 就是到 A、B 两点的距离相等的点的集合”；

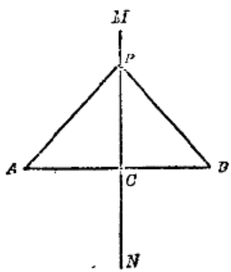


图　1—1

（4）“矩形集合”，“菱形集合”，“平行四边形集

合”.

在小学数学课本中，也渗透了集合的一些思想．例如，有这样的一些插图：把几个人、几个三角形等，用一个圈把它们圈起来．这些都分别表示集合．

象这样，把具有某种属性的一些对象，看作一个整体，便形成一个集合．集合里的各个对象叫做集合的元素．例如，（3）是由线段AB的垂直平分线MN上所有的点组成的集合，MN上的每一个点都是这个集合的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．这就是说，我们可以判断任意一个对象是或者不是这个集合的元素．例如，对于由所有的直角三角形组成的集合，边长分别是3cm、4cm、5cm的三角形是这个集合的元素．边长分别是4cm、4cm、5cm的三角形不是这个集合的元素．

表示集合的方法，常用的有列举法和描述法．

把集合的元素一一列举出来，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫做列举法．

例如，由数1，2，3，4，5组成的集合，可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如，由整式x^2，$3x+2$，$5y-x$，x^2+y^2组成的集合，可以表示为

$$\{x^2, 3x+2, 5y-x, x^2+y^2\}.$$

由“全体自然数组成的集合”，可以表示为

$$\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

在这里，虽然“全体自然数”不能全部写出来，但是，我们可以按某种规律，比如从小到大的顺序，列举出其中一些有代表性的元素，使其他任何一个元素都可以根据已列举

出的元素所体现的规律写出来。

把描述集合中元素的公共属性或表示集合中元素的规律，写在大括号内用来表示集合，这种方法叫作描述法。

例如：

由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}；

由某农机站所有的拖拉机组成的集合，可以表示为

{某农机站的拖拉机}；

由15和18的所有的公倍数组成的集合，可以表示为

{15和18的公倍数}；

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合，可以表示为

$\{x:x-3>2\}$*；

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点组成的集合，可以表示为

$\{(x,y):y=x^2+1\}$；

由所有两位质数组成的集合，用列举法表示是

{11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97}.

用描述法表示是

{两位的质数}，

或是

$\{x:9<x<100$，x 为质数$\}$.

人们常常用图形来形象地表示集合。比如用一条封闭的

---

*有的书上用一短竖线“|”代替“:”，表示为 $\{x|x-3>2\}$.

曲线围成的图形来表示一个集合；封闭曲线内的点或表示元素的符号，就表示集合的元素。

图 1—2

在集合里，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，我们就认为是同一个集合。

例如：

{－3，0，2，5}和{0，2，－3，5}是同一个集合；

{线段AB上的点}和{线段BA上的点}是同一个集合。

一个元素在一个集合里不能重复出现。

根据集合的元素的个数的情况，集合分为有限集和无限集。由有限个元素组成的集合叫做**有限集**，否则叫做**无限集**。例如，由小于20的正整数组成的集合是有限集；由所有的整数组成的集合是无限集。所有有理数的集合、所有无理数的集合、所有实数的集合也都是无限集，线段上所有点的集合，直线上所有点的集合也都是无限集。

注意，a和$\{a\}$是不同的。a表示一个元素，$\{a\}$表示只有一个元素a的集合。

在研究集合时，为了方便起见，常用大写拉丁字母表示集合，小写拉丁字母表示元素。如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，表示为$a \in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于集合A，表示为$a \notin A$。例如，设B表示

集合{1，2，3，4，5}，则

$$5 \in B,\ 7 \notin B,\ \frac{1}{2} \notin B.$$

我们常用N表示自然数的集合，Z表示整数的集合，Q表示有理数的集合，R表示实数的集合。

练　习

1. 举出三个集合的实例。
2. （口答）说出下面集合里的元素：
   （1）{与2的差的绝对值等于3的数}；
   （2）{平方等于1的数}；
   （3）{12的约数}；
   （4）{一年中有31天的月份}；
   （5）{京广铁路经过的省（市）}。
3. 用适当的方法表示下列集合：
   （1）大于10小于20的质数的集合；
   （2）大于3小于15的偶数的集合；
   （3）由1，3，5，7，9组成的集合；
   （4）由太阳系的九大行星：水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星组成的集合；
   （5）由长江、黄河、珠江和黑龙江组成的集合；
   （6）周长等于20厘米的三角形的集合；
   （7）大于2的奇数的集合；
   （8）不等式$x^2+5x+6>0$的解的集合。
4. 在__处填上符号$\in$或$\notin$：

   1 __ N，0 __ N，-3 __ N，$\frac{2}{3}$ __ N，$\sqrt{2}$ __ N；

1 ___ Z, 0 ___ Z, -3 ___ Z, $\frac{2}{3}$ ___ Z, $\sqrt{2}$ ___ Z;

1 ___ Q, 0 ___ Q, -3 ___ Q, $\frac{2}{3}$ ___ Q, $\sqrt{2}$ ___ Q;

1 ___ R, 0 ___ R, -3 ___ R, $\frac{2}{3}$ ___ R, $\sqrt{2}$ ___ R.

1.2 子集

1. 子集 对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么，集合A就叫做集合B的子集，表示为

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A,$$

读作“A包含于B”或“B包含A”.

例如 $N\subseteq Z$，$N\subseteq R$，$Z\subseteq R$.

对于任何一个集合A，因为它的任何一个元素都属于它本身，所以

$$A\subseteq A.$$

也就是说，任何一个集合都是它本身的子集.

如果A是B的子集，并且在B中至少有一个元素不属于A，那么，集合A就叫做集合B的**真子集**，表示为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A.$$

例如，自然数集是N的子集，但不是N的真子集；N是R的子集，也是R的真子集.

集合B和集合B的真子集A之间的关系，可以用图1—3中B和A的关系来说明.

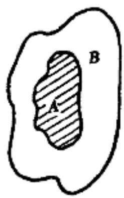


图 1—3

容易知道，对于集合A、B、C，

如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么$A\subseteq C$。

事实上，设x是A的任意一个元素．因为$A\subseteq B$，所以$x\in B$．又因为$B\subseteq C$，所以$x\in C$，故知$A\subseteq C$。

同样可知，对于集合A、B、C，如果$A\subset B$，$B\subset C$，那么$A\subset C$。

为了方便起见，我们引进空集这个概念：不含任何元素的集合叫做空集，用符号$\varnothing$表示。

例如，集合$\{x:x+1=x+3\}$、{小于零的正整数}、{两边之和小于第三边的三角形}等都是空集。

我们规定空集是任何集合的子集．也就是说，对于任何集合A，都有

$$\varnothing\subseteq A.$$

例1　写出集合$\{a, b\}$的所有的子集。

解：$\{a, b\}$的所有的子集是：$\varnothing$、$\{a\}$、$\{b\}$和$\{a, b\}$。

2．集合的相等　对于两个集合A、B，如果$A\subseteq B$，同时$B\subseteq A$，那么，集合A和集合B就叫做相等，表示为

$$A=B.$$

读作“集合A等于集合B”．

集合A等于集合B，也就是集合A与集合B的元素完全相同。

例如，A是方程$x^2+3x+2=0$的根的集合，$B=\{-1, -2\}$，则$A=B$。

例2　写出不等式$3x-2>x+6$的解的集合。

解：不等式$3x-2>x+6$的解的集合是

$$\{x:3x-2>x+6\}=\{x:2x>8\}=\{x:x>4\}.$$

例3　写出方程$2x^2-4x+1=0$的根的集合。

解：方程 $2x^2-4x+1=0$ 的根的集合是

$$\{x:2x^2-4x+1=0\}=\left\{x:x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}\right\}$$
$$=\left\{\frac{1}{2}(2+\sqrt{2}),\ \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\right\}.$$

例 4　设 $A=\{$直角三角形$\}$，$B=\{$三角形：三条边的长为 a、b、c 且 $a^2+b^2=c^2\}$。证明 $A=B$。

证明：设 $x\in A$，即 x 为一直角三角形，根据勾股定理知道，若 a、b 为它的直角边，c 为斜边，则 $a^2+b^2=c^2$，所以 $x\in B$，即

$$A\subseteq B.$$

反之，设 $x\in B$，即一个三角形的三条边 a、b、c，满足关系 $a^2+b^2=c^2$。根据勾股定理的逆定理知道，这个三角形是直角三角形，所以 $x\in A$，即

$$B\subseteq A.$$

由集合相等的定义可知　$A=B$。

练　习

1. 在下面各题中的__处填上适当的符号（$\in$、$\notin$、$=$、$\subset$、$\supset$）：

（1）a__$\{a\}$；　　　　（2）a__$\{a,b,c\}$；

（3）d__$\{a,b,c\}$；　　（4）$\{a\}$__$\{a,b,c\}$；

（5）$\{a,b\}$__$\{b,a\}$；

（6）$\{3,5\}$__$\{1,3,5,7\}$；

（7）$\{2,4,6,8\}$__$\{2,8\}$；

（8）$\varnothing$__$\{0,1,2\}$。

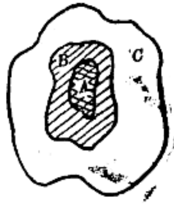
2. 图中 A、B、C 表示集合，说明集合 A、B、C 有什么关系？

3. 写出 $\{a, b, c\}$ 的所有的子集。

4. 写出方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$ 的解的集合。

5. 写出不等式 $3x+2<4x+1$ 的解的集合。

6. 写出方程 $3x^2-6x+2=0$ 的根的集合。



(第 2 题)

7. 写出方程组 $\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=3\end{cases}$ 的解的集合。

8. 设 $A=\{$线段 A_1B_1 的垂直平分线上的点$\}$,

$B=\{$与 A_1、B_1 两点距离相等的点$\}$，证明 $A=B$。

1.3 交集和并集

1. 交集 看下面两个集合:

$$A=\{a, b, c, d\}, B=\{d, r, s, b\}.$$

容易看出，集合 $\{b, d\}$ 是由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的，这时，我们就说集合 $\{b, d\}$ 是集合 A 与 B 的交集，表示为

$$\{a, b, c, d\}\cap\{d, r, s, b\}=\{b, d\}.$$

一般地，对于给定的集合 A、B，由同时属于 A 和 B 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，表示为

$$A\cap B.$$

读作"A 交 B"。

图 1—4 中的阴影部分，表示集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$。

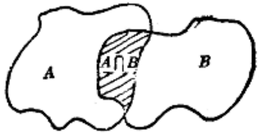


图 1—4

同样地，对于给定的集

合 A_1，A_2，…，A_n，由同时属于 A_1，A_2，…，A_n 的一切元素所组成的集合，叫做集合 A_1，A_2，…，A_n 的交集，表示为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

由交集定义容易知道：

（1）对于任意两个集合 A、B，都有 $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；

（2）如果 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$。

例 1　设 $A=\{x:x>-2\}$，$B=\{x:x<3\}$，求 $A\cap B$。

解：$A\cap B=\{x:x>-2\}\cap\{x:x<3\}$
$=\{x:-2<x<3\}$。

例 2　设 $A=\{(x,y):4x+y=6\}$，$B=\{(x,y):3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$。

解：$A\cap B=\{(x,y):4x+y=6\}\cap\{(x,y):3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y):\begin{cases}4x+y=6\\3x+2y=7\end{cases}\right\}=\left\{(1,2)\right\}.$$

例 3　设 $A=$｛等腰三角形｝，$B=$｛直角三角形｝，求 $A\cap B$。

解：$A\cap B=$｛等腰三角形｝$\cap$｛直角三角形｝
＝｛等腰直角三角形｝。

由交集的定义知道，两个任意的集合 A，B 所确定的交集是唯一的。实际上，求两个集合的交集，就是规定了一种集与集之间的运算“$\cap$”，这个运算叫做交运算，简称为交。集合 A、B 进行交运算的结果就是交集 $A\cap B$。

交的性质　设 A、B、C 为任意三个集合，那么

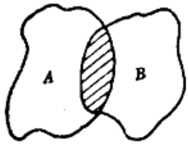
（1）$A\cap B=B\cap A$（交换律）；

（2）$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律）；

（3） $A\cap A=A$（等幂律），

（4） $A\cap\varnothing=\varnothing$。

由图1—5容易看出性质（1）、（2）是成立的。



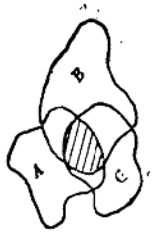


图 1—5

现在，我们来证明这些性质成立。

证明：（1）设$x\in A\cap B$，根据定义知$x\in A$同时$x\in B$，也就是$x\in B$同时$x\in A$，所以$x\in B\cap A$。即

$$A\cap B\subseteq B\cap A.$$

同样可证 $B\cap A\subseteq A\cap B$。

所以 $A\cap B=B\cap A$。

（2）设$x\in(A\cap B)\cap C$，根据定义知$x\in A\cap B$，且$x\in C$。由$x\in A\cap B$，得

$$x\in A\text{且}x\in B,$$

由此可知，$x\in B\cap C$。

所以 $x\in A\cap(B\cap C)$。

即 $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$。

同样可证 $A\cap(B\cap C)\subseteq(A\cap B)\cap C$。

根据集合相等的定义，得 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

（3）设$x\in A\cap A$，根据定义知$x\in A$同时$x\in A$，所以$x\in A$，即$A\cap A\subseteq A$，

同样可证 $A\subseteq A\cap A$，

所以 $A\cap A=A$.

（4）用反证法．设 $A\cap\varnothing\neq\varnothing$，则至少存在一个元素 $x\in A\cap\varnothing$，即 $x\in A$ 同时 $x\in\varnothing$，这个结论与空集$\varnothing$的定义矛盾．所以

$$A\cap\varnothing=\varnothing.$$

2．并集　看下面两个集合：

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\},\ B=\{d,\ r,\ s,\ b\}.$$

容易看出，$\{a,\ b,\ c,\ d,\ r,\ s\}$ 是属于A或者属于B的一切元素所组成的集合．这时，我们就说$\{a,\ b,\ c,\ d,\ r,s\}$是集合A与B的并集，表示为

$$\{a,\ b,\ c,\ d\}\cup\{d,\ r,\ s,\ b\}=\{a,\ b,\ c,\ d,r,s\}.$$

一般地，由属于A或者属于B的一切元素所组成的集合，叫做集合A与B的并集，表示为

$$A\cup B.$$

读作"A并B"．

图1—6中的阴影部分，表示集合A与B的并集$A\cup B$.

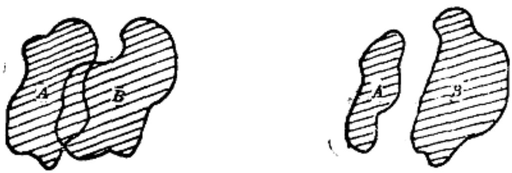


图　1—6

同样地，对于给定的集合 A_1，A_2，…，A_n，由一切至少属于 A_1，A_2，…，A_n 中一个集合的元素所组成的集合，叫做集合 A_1，A_2，…，A_n 的并集，表示为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\ 或\ \bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

由并集的定义容易知道：

（1）对于任意两个集合A、B，都有

$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$；

（2）如果$A\subseteq B$，则$A\cup B=B$。

例4　设$A=\{x:-1<x<2\}$，$B=\{x:1<x<3\}$，求$A\cup B$。

解：$A\cup B=\{x:-1<x<2\}\cup\{x:1<x<3\}$

$=\{x:-1<x<3\}$。

例5　写出不等式$x^2+x-6\geqslant 0$的解的集合。

解：不等式$x^2+x-6\geqslant 0$的解的集合是

$\{x:x^2+x-6\geqslant 0\}=\{x:x\leqslant -3\}\cup\{x:x\geqslant 2\}$。

例6　设$A=$｛锐角三角形｝，$B=$｛钝角三角形｝，求$A\cup B$。

解：$A\cup B=$｛锐角三角形｝$\cup$｛钝角三角形｝

$=$｛斜三角形｝。

由并集的定义知道，两个任意的集合A、B所确定的并集是唯一的。实际上，求两个集合的并集，就是规定了一种集与集之间的运算“$\cup$”，这个运算叫做并运算，简称为并。集合A、B进行并运算的结果就是并集$A\cup B$。

并的性质　设A、B、C为任意三个集合，那么

（1）$A\cup B=B\cup A$（交换律）；

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$（结合律）；

（3）$A\cup A=A$（等幂律）；

（4）$A\cup\varnothing=A$。

由图1—7容易看出性质（1）、（2）是成立的。

现在，我们来证明性质（2）成立。

证明：设$x\in(A\cup B)\cup C$，根据定义知$x\in A\cup B$或

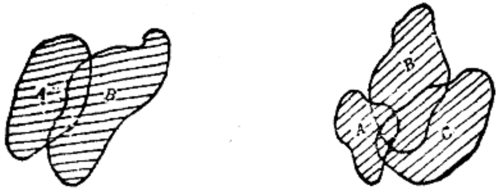


图 1—7

$x \in C$.

1. 如果$x \in A \cup B$，则$x \in A$或$x \in B$.

如果$x \in A$，则$x \in A \cup (B \cup C)$.

如果 $x \in B$，则 $x \in B \cup C$，$\therefore x \in A \cup (B \cup C)$.

因此，如果 $x \in A \cup B$，则 $x \in A \cup (B \cup C)$.

2. 如果$x \in C$，则 $x \in B \cup C$，$\therefore x \in A \cup (B \cup C)$.

由此可知　$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

同样可证　$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

所以　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

同学们自己证明性质（1）、（3）、（4）.

上面我们分别研究了交运算和并运算以及它们的基本运算性质. 现在我们来研究交、并之间的关系和性质：

设A，B，C为任意的三个集合，那么

（1）$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$（交对并的分配律）；

（2）$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$（并对交的分配律）；

（3）$A \cap (A \cup B) = A$（吸收律）；

（4）$(A \cap B) \cup B = B$（吸收律）.

证明：（1）设 $x \in A \cap (B \cup C)$. 根据定义知 $x \in A$ 且