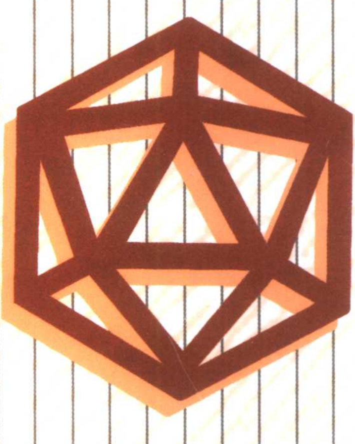
线性代数
全程导学

XIANXING DAISHU QUANCHENG DAOXUE

同济·线性代数(第三版)

周泰文 王家宝 贺伟奇 编著



●大学数学精要辅导丛书(理工科)

湖南科学技术出版社

线性代数
全程导学

XIANXING DAISHU QUANCHENG DAOXUE

同济·线性代数(第三版)

周泰文 王家宝 贺伟奇 编著

大学数学精要辅导丛书（理工科）

湖南科学技术出版社

线性代数全程导学

同济·线性代数(第三版)

编　　著:周泰文　王家宝　贺伟奇

责任编辑:沙一飞　徐　为

文字编辑:陈一心

出版发行:湖南科学技术出版社

社　　址:长沙市湘雅路 280 号

http://www.hnstp.com

邮购联系:本社直销科 0731－4375808

印　　刷:湖南望城湘江印刷厂

(印装质量问题请直接与本厂联系)

厂　　址:望城县高塘岭镇郭亮路 69 号

邮　　编:410200

经　　销:新华书店

出版日期:2002 年 11 月第 1 版第 1 次

开　　本:850mm×1168mm　1/32

印　　张:9

字　　数:235000

书　　号:ISBN 7－5357－3573－8/O·206

定　　价:13.00 元

内 容 简 介

本书共分六章：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换.

各章结构均为：内容提要、典要范例、习题选解、考研题解，但第六章因未列入考研大纲，故没有考研试题，仅对多次自考试题作了详解.

本书为学习《线性代数》辅导书，可帮助各类高校理工科学生、考研志士学好、考好本课程，也可供有关的自考生、教师以及实际工作者参考.

前言

线性代数是高等院校理工科学生的重要基础课之一，它对高素质科技人才科学思维的培养，对后续有关课程的学习和许多实际问题的解决，都起着十分重要的作用．

本书以理工科本科、大专各类院校学生、考研志士为主要对象，根据线性代数课程教学基本要求与考研大纲编写，着眼于培养具有数学素养和创新能力的21世纪的合格人才．本书也可供有关的自考生、教师以及实际工作者参考．

本书特点：

一、“内容提要”简明、系统，以同济大学编的《线性代数》为蓝本，融汇了作者从教多年的经验，每章的知识脉络，一版见全章．

二、“典要范例”精粹、解释详尽，着重分析，启发思维．

三、“习题选解”选型引导，同济习题，解证过半．

四、概括10年考研题解，分章选解，规律可见．

本书由三位作者合作完成．王家宝编写第一、第二两章；贺伟奇编写第三、第四两章；周泰文编写第五、第六两章并负责全书统稿、定稿．由于水平有限，不周之处切望同行、读者指正．

编　　者

于中南大学铁道学院

2002年8月

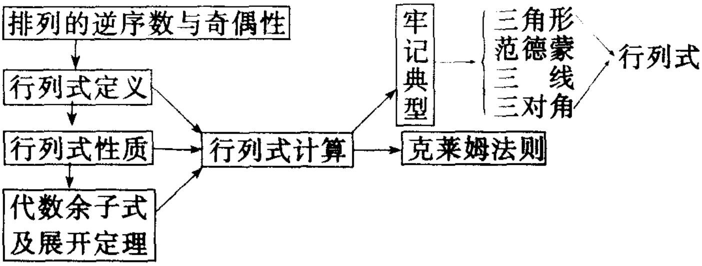
目录

第一章
行列式

HANG LIE SHI

一、内容提要

(一)知识脉络



(二)定义、定理

1. n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;t 是这个排列的逆序数;$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列(共有 $n!$ 个)取和.

2. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)的各元素都乘以同一数 k,等于用 k 乘此行列式.

推论 行列式中某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 两行(列)元素对应成比例的行列式等于零.

推论 两行(列)元素完全相同的行列式等于零.

(5) 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则该行列

式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

(7) 行列式按行(列)展开定理:行列式等于它的任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

上述展开定理及其推论用公式表示即:

按行: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, 当\ i=j \\ 0, 当\ i\neq j \end{cases} (i=1,2,\cdots,n).$

按列: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D, 当\ i=j \\ 0, 当\ i\neq j \end{cases} (i=1,2,\cdots,n).$

(8) 拉普拉斯展开定理:

设 D 是一个 n 阶行列式,由 D 中取定的 k 行、k 列交叉处各元素按原相对位置构成的行列式称为 D 的一个 k **阶子式**,记它为 N. 由 D 中去掉 k 阶子式 N 所在行和列后剩下的元素按原相对位置构成的 $(n-k)$ 阶行列式称为 N **的余子式**,记为 M. 若构成 N 的行指标分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$,列指标分别为 $j_1, j_2, \cdots, j_k$,则称

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$$

为 N 的**代数余子式**.

拉普拉斯展开定理 行列式等于其任意 k 行(列)中一切 k 阶子式与其代数余子式乘积之和.

设行列式 D 中任意 k 行(列)构成的一切 k 阶子式分别为 $N_1,N_2,\cdots,N_s$,它们对应的代数余子式分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_s$,则

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_sA_s.$$

特别地,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 克拉默法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

中,若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有惟一解

$$x_j=\frac{D_j}{D}\qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中第 j 列元素用方程组右端的常数项代替后所得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 未知量个数与方程个数相等的齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式 $D=0$.

二、典要范例

1. 利用行列式的定义计算行列式

例 1.1 用行列式的定义计算下列各题：

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};$$

$$(2)\ D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解(1) D_n 只有 n 个非零元素，且分布在不同行不同列. 因此在行列式定义中的 $n!$ 项中只有一项不为零，故

$$D_n=(-1)^{t(n-1,n-2,\cdots,3,2,1,n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}.$$

又 $t(n-1,n-2,\cdots,3,2,1,n)=$

$(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1+0=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$,

故
$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

(2) 由行列式的定义知

$$D_5=\sum_{j_1j_2\cdots j_5}(-1)^{t(j_1\cdots j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$

而第1,第4,第5三行中除了第2、第3两列外均为零,因此在以j_1,j_4,j_5为列标的元素中必有一个为零,从而D_5的每一项均为零,故$D_5=0$.

例1.2 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$,试求 $f(x)$中 x^3, x^4 的系数.

解 行列式中含 x^3 的项仅有两项,它们是

$$(-1)^{t(2\,1\,3\,4)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-2x^3,$$
$$(-1)^{t(4\,2\,3\,1)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3x^3.$$

因而 $f(x)$中含 x^3 的项为 $-2x^3-3x^3=-5x^3$,故 x^3 的系数为-5.

行列式中含 x^4 的项只有一项,即

$$(-1)^{t(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=10x^4.$$

故 x^4的系数为10.

2. 用化为三角形行列式的方法计算行列式

这是计算行列式的最基本的方法,难点在于怎样化为上三角或下三角行列式以及如何计算较为简便,这需要多练习,多思考,并注意从范例中得到启发.

例1.3 计算下列行列式:

(1) $D_n=\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$;

$$(2)\ D=\begin{vmatrix} x_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix},x_1x_2\cdots x_n\neq 0.$$

解(1) $D_n \xlongequal[\text{提出公因子}]{r_1+r_2+\cdots+r_n} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{r_i-ar_1}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

$$(2)\ D\xlongequal{r_1+\sum\limits_{i=2}^{n+1}\frac{-a_{i-1}}{x_{i-1}}r_i}\begin{vmatrix} x_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_ib_i}{x_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & x_1 & & & \\ b_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & \cdots & & x_n \end{vmatrix}=$$

$$(x_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i})x_1x_2\cdots x_n.$$

类题

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}=-(\sum_{i=1}^{n-1}a_i^{-1})a_1a_2\cdots a_{n-1}.$$

注 这是一种典型的行列式,常称为“三线行列式”,它的解题

方法和结果可以引用.如

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,\cdots,n)]{r_i-r_1}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}=$$

$$\left(1+a_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_1}{a_i}\right)a_2a_3\cdots a_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

例 1.4 计算下列行列式:

(1) $$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n & n & n\end{vmatrix};$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix}x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1\\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_2\\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-2}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n\end{vmatrix}.$$

解(1) 依次将 D_n 的第 n 列减去第 $n-1$ 列，第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列，…，第 2 列减去第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{t(n\,n-1\cdots 2\,1)}n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n.$$

(2) 依次作行列式变换：$r_{n-1}+xr_n,\cdots,r_1+xr_2$，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_ix^{i-1} \\ -1 & x & 0 & & 0 & 0 & \sum\limits_{i=2}^{n}a_ix^{i-2} \\ 0 & -1 & x & & 0 & 0 & \sum\limits_{i=3}^{n}a_ix^{i-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-2}+a_{n-1}x+a_nx^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-1}+a_nx \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

再按第一行展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-1}\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-1}.$$

3. 按行列式展开定理,降阶计算行列式

这也是计算行列式的重要方法,特别是高阶数字行列式的计算主要用降阶法.

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix}.$$

解法 1 选择含零最多的第 1 列展开,得

$$D=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=13-20=-7.$$

解法 2 先化简,再按某行(列)展开

$$D\xlongequal{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -4 & -3\\ 0 & 5 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-7.$$

例 1.6 计算下列行列式:

(1) $$D=\begin{vmatrix}a & 1 & 0 & 0\\ -1 & b & 1 & 0\\ 0 & -1 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix};$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$.

解(1) 按第 1 列展开后直接计算两个三阶行列式可得

$$D=a\begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}=$$

$$a(bcd+b+d)+(cd+1)=abcd+ab+ad+cd+1.$$

(2) 按第 1 列展开

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \end{vmatrix}=$$

$$x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

注 若按第 1 行展开,计算要复杂一些.因此,使用展开定理时要先分析,选取适当的行(列),再按该行(列)展开,使计算简化.

例 1.7 计算行列式