大气科学中的统计诊断与预测

苏炳凯 编著

南京大学出版社

DA QI KE XUE ZHONG DE TONG JI ZHEN DUAN YU YU CE

大气科学中的统计诊断与预测

苏炳凯　编

南京大学出版社
1986·南京

内 容 简 介

本书系统地论述现代统计天气分析与预报的基本理论和方法，及其在大气科学中的应用。

书中主要内容有：因子库、正交变换、维数压缩、分类识别、统计定量、线性平稳模型、气象扰动谱分析、模式输出统计（MOS）和预报评价等。依现代信息控制论观点，概括为由输入、识模、预测和输出等四个子系统构成一个完整的统计诊断与预测系统。

本书可作为大气科学的大学生和研究生的教材或教学参考书；还可供气象台、站和海洋科学、环境科学、地球物理科学、生命科学等有关专业人员参考。

大气科学中的统计诊断与预测

苏炳凯 编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　溧水第二印刷厂印刷

1988年2月第1版　1988年2月第1次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：23.375

字数：606千　　印数：1—2000册

ISBN 7-305-00039-6

P·4　　定价：4.70元

责任编辑　　新　平

前　言

概率统计不仅在自然科学和社会科学的各个领域，而且在大气科学的诸分支，如天气预报、大气环流、数值预报、卫星气象、雷达气象、气候变化及预报、气候影响、应用气候、大气湍流、大气污染、人工影响天气实验等方面都有广泛的和有效的应用。

对统计天气预报而言，它是根据大量气象历史资料，以量的形式研究天气变化的统计规律，并用于预报。这个量的特点不是确定性的，而是随机性的。统计推理不注重量本身的物理含义，而依赖于历史资料。20世纪60年代前，所采用的方法都属经典统计预报法，即依据前兆因子预报未来的天气。随着大型电子计算机的使用，概率论与数理统计学的发展，特别由数值天气预报的发展，提供了有效的数值预报产品，从而产生出完全预报法（PP）、模式输出统计法（MOS）。

本书是作者在南京大学大气科学系多年授教的统计天气预报课程扩编而成，一方面考虑到概率统计的基础内容，另一方面也注意到现代统计天气分析与预报的重要发展。常用的方法有多元统计分析与时间序列分析两类，前者主要包括回归分析、判别分析、聚类分析、主成分分析、因子分析、典型相关等；后者主要包括相关分析、线性平稳模型、正交表示、谱表示等。书中的各章内容安排如下：第一章是预备知识，本书假定读者已具有概率统计、线性代数的基本知识，扼要地介绍矩阵代数、多元正态随机变量、随机过程和统计推断等有关知识，这是以后各章的基础。其余九章，作者按现代信息控制论观点，把上述的常用方法概括成四个子系统，即输入子系统（第九章）；由特征选择之一——正交变换（第三章）、特征选择之二——维数压缩（第四

章）与分类器（第五章）组成的识模子系统；基本的(第二章)、序列的（第六章、第七章）、统计动力的（第八章）预测子系统；输出子系统（第十章）。这四个子系统可构造成一个完整的统计诊断与预测系统，其示意图如下页所示。图中的数字表示章号，实线箭头表示信息的正向传递，虚线箭头表示信息的反馈。

根据实际的研究对象（因子和预报量）是多个变量，全书利用矩阵形式表示统计数学模型，不但推导时简洁明了，且便于理论上进一步研究，在计算中虽不便于手算，但更适合在电子计算机中处理的特点。

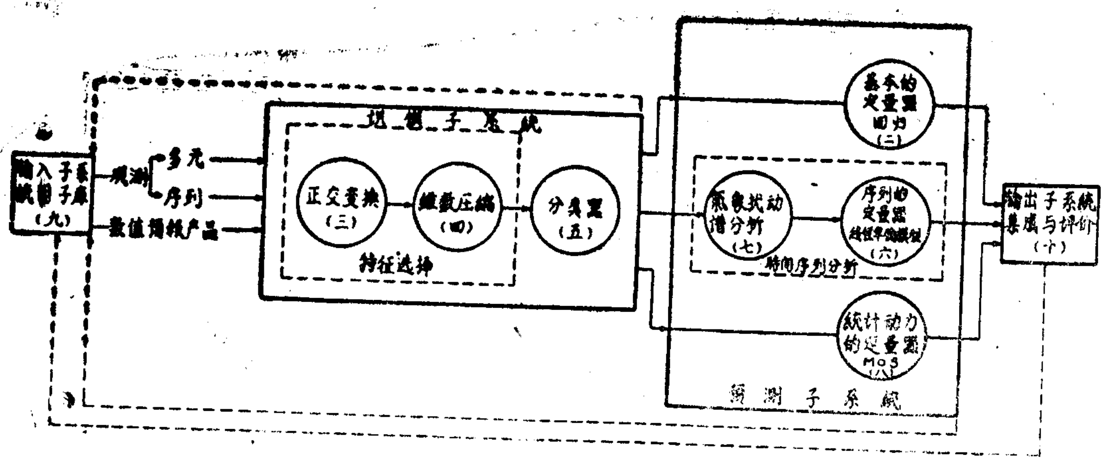
对于本书，么枕生教授提出了宝贵的意见，在编写过程中一直受到陆渝蓉教授、伍荣生教授和李可位同志热情的支持与关怀，金汉良研究员和卢文芳副教授对某些章节提出了有益的建议，石宗祥先生绘制了书中的插图。谨向各位致以衷心的感谢。

本书收集部分有关的内容和实例，对他们的支持深表谢意。

由于水平有限，书中肯定有许多缺点和错误，欢迎读者批评指正。

苏炳凯　于南京大学大气科学系

1985年12月



大气科学中的统计诊断与预测系统示意图

目　　录

第一章　预备知识

现代统计天气预报中，多元统计分析的研究对象是多元正态随机变量；时间序列分析的研究对象是随机过程。这些研究都需要矩阵代数、统计推断等基本知识，为此，在本章内扼要地介绍有关这方面的基本概念和结果。其中有的仅是陈述而不给证明，熟悉该内容的读者可以跳过本章，阅读时最好把文中未证明的结果作为练习，这对阅读以下各章会带来很多方便。

§1.1　矩阵

1.1.1　矩阵的基本性质

实矩阵$\boldsymbol{A}$是 $n\times m$ 个实元素 $a_{ij}(i=\overline{1,n}，j=\overline{1,m})$ 的一个有顺序的矩形排列，即

$$\boldsymbol{A}\triangleq\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nm} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{n\times m} \qquad (1.1\text{-}1)$$

称为 n 行 m 列矩阵，且用加粗的大写字母表示。特别，当 $n=1$ 时，矩阵退化为 m 维行向量；当 $m=1$ 时，矩阵退化为 n 维列向量；当 $n=m$ 时，称$\boldsymbol{A}$为 n 阶或 m 阶方阵。

矩阵的代数运算定义如下：

加法　设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$都是 $n\times m$ 的阵，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\triangleq(a_{ij}+b_{ij})_{n\times m} \qquad (1.1\text{-}2)$$

数乘　设 c 为一个数，则

$$c\boldsymbol{A}\triangleq(ca_{ij})_{n\times m} \qquad (1.1\text{-}3)$$

乘法　设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$的阵，$\boldsymbol{B}$是$m\times l$的阵，则

$$\boldsymbol{AB}\triangleq\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\cdot l} \qquad (1.1\text{-}4)$$

根据上述定义，容易证明下列的运算性质：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad \text{加法交换律}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \qquad \text{加法结合律}$$

$$\left.\begin{aligned}(c+d)\boldsymbol{A}&=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A}\\ c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B}\end{aligned}\right\} \qquad \text{数乘分配律}$$

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \qquad \text{乘法结合律}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})&=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\end{aligned}\right\} \qquad \text{乘法分配律}$$

特别注意，矩阵乘法一般不满足交换律，即$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。

矩阵运算中常用的特殊矩阵：

零矩阵$\boldsymbol{O}$　它的元素全部为零。零矩阵可以分解，即分解为两个非零矩阵的乘积。例如

$$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&10\\1&5&\sqrt{2}\\1&5&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

可见，分解不是唯一的。因此，若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则不能直接断定$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$中至少有一个零解。

么矩阵$\boldsymbol{J}$　它的元素全部为1。

对角阵　如果一个方阵的对角线以外的元素都是零，则称这个方阵为对角阵。

单位阵$\boldsymbol{I}$　对角线元素全为1的对角阵，称作单位阵。对任一方阵$\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{A} \qquad (1.1\text{-}5)$$

三角阵　$\boldsymbol{A}$是方阵，如果$j<i$时，$a_{ij}=0$，则称$\boldsymbol{A}$为上三角阵；如果$j>i$时，$a_{ij}=0$，则称$\boldsymbol{A}$为下三角阵。

转置阵$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　由矩阵 $\underset{n\times m}{\boldsymbol{A}}$ 的行列交换而得，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \triangleq (a_{ji})_{m\times n} \tag{1.1-6}$$

由定义（1.1-6）式易得

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.1-7}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A} \tag{1.1-8}$$

对称阵　实方阵$\boldsymbol{A}$的转置就是它本身，即

$$\boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{1.1-9}$$

则$\boldsymbol{A}$称为实对称阵。若复方阵$\boldsymbol{B}$有

$$\boldsymbol{B} = \tilde{\boldsymbol{B}} \triangleq (\boldsymbol{B}^{*})^{\mathrm{T}} \tag{1.1-10}$$

则称$\boldsymbol{B}$为Hermite矩阵。式中 * 表示复共轭运算。

非奇异阵　$\boldsymbol{A}$是方阵，若$|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则称$\boldsymbol{A}$为非奇异阵；反之，$|\boldsymbol{A}| = 0$，则称$\boldsymbol{A}$为奇异阵。非奇异阵的行与列都是线性无关的。

逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$　m 阶非奇异阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆是唯一的矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$，满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} \triangleq \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{I} \tag{1.1-11}$$

不难看出

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.1-12}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{1.1-13}$$

$$|\boldsymbol{A}^{-1}| = (|\boldsymbol{A}|)^{-1} \tag{1.1-14}$$

设A_{ij}是$\boldsymbol{A}$的元素a_{ij}的代数余子式，则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots A_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots A_{mm} \end{pmatrix} \tag{1.1-15}$$

正交阵　实方阵$\boldsymbol{A}$满足关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \triangleq \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} \tag{1.1-16}$$

则称$\boldsymbol{A}$为实的正交阵。若复方阵$\boldsymbol{B}$满足关系式

$$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{B}}=\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I} \tag{1.1-17}$$

则称$\boldsymbol{B}$为酉矩阵。显然，它们分别有性质：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.1-18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}^{-1} \tag{1.1-19}$$

［例1-1］ Givens 旋转矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

用它左乘一个二维向量，其作用将向量逆转或顺转θ角。

［例1-2］

$$\boldsymbol{P}_{ij}(\theta)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & i & \quad & j & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

用它左乘一个$\boldsymbol{A}$阵，只需把$\boldsymbol{A}$的 i、j 两个行向量 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}$改变为 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\cos\theta+\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\sin\theta$ 和 $-\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\sin\theta+\boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\cos\theta$，其余元素均不变，这种变化可以看作是 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_j$ 二向量所确定的平面上的一种旋转。

［例1-3］ Givens 反射矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

这种变换具有一种特殊的“反射”性质。

等幂矩阵 实对称阵$\boldsymbol{A}$具有性质$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{A}$为等幂矩阵。