科學圖書大庫

# 集合論講義

編著者　劉世超　楊兆慶

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

# 集合論講義

編著者　劉世超　楊兆慶

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫



中華民國六十七年十二月三十日再版

# 集合論講義

基本定價 1.00

編著者 劉世超 中央研究院數學研究所兼代所長
楊兆慶 中央研究院數學研究所助理研究員

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「剛掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

# 我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

**目由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

**徐氏基金會　敬啓**

**中華民國六十四年九月**

# 序

本書以第一作者於民國五十五年至民國五十七年在國立台灣大學數學系講授集合論所用的講稿爲藍本，並參考下列的書籍：

1. K. Godel : The Consistency of the Continuum Hypothesis
2. P. R. Halmos : Naive Set Theory
3. A. A. Fraenkel : Abstract Set Theory
4. W. Sierpinski : Cardinal and Ordinal Numbers
5. A. Abian : The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic

經數月的整理編著而成。承台大數學系同學徐清輝，張開朕，張聖容，李文卿，吳徵眉，胡守仁，劉小詠等提供各章講稿的筆記，又蒙徐氏基金會惠允出版，特表謝忱。集合論範圍甚廣，編者等不才，尙希海內碩學，不吝指教，以期再版時改正。

劉世超　楊兆慶
謹識於南港中央研究院數學研究所
五十八年十一月二十六日

# 目　　錄

一章　緒論

§ 1　前言……………………………………………………1
§ 2　何謂集合……………………………………………3
§ 3　常用的邏輯符號……………………………………4

第二章　等權集合

§ 1　關係與函數…………………………………………7
§ 2　集合的運算…………………………………………8
§ 3　集合的權數…………………………………………11

第三章　連續體假設

§ 1　自然數………………………………………………15
§ 2　有限集合與無窮集合………………………………18
§ 3　連續體假設…………………………………………19

第四章　良序集合

§ 1　良序集合的定義……………………………………25
§ 2　超越歸納法與超越歸納定義法……………………28
§ 3　相似…………………………………………………30

第五章　序數

§ 1　序數的定義…………………………………………33
§ 2　序數的性質…………………………………………34
§ 3　序數與一般良序集合………………………………38

第六章　基數

§ 1　基數的定義……………………………………………… 41
§ 2　基數的性質……………………………………………… 42
§ 3　基數與一般集合………………………………………… 47

第七章　選擇公設

§ 1　選擇公設與其同值命題………………………………… 49
§ 2　選擇公設下各種結果…………………………………… 55

第八章　運算

§ 1　自然數的運算…………………………………………… 61
§ 2　序數的運算……………………………………………… 62
§ 3　基數的運算……………………………………………… 70

第九章　一般應用

§ 1　在點集論上的應用……………………………………… 73
§ 2　在拓樸學上的應用……………………………………… 79

第十章　公設化的集合論

§ 1　著名的詭論……………………………………………… 83
§ 2　哲墨洛，佛朗克（Zermelo - Fraenkel）系的公設……… 84

名詞對照…………………………………………………………… 91

# 第一章　緒論

## §1　前　言

這本書編著的主要目的是給大學本部同學介紹集合的運算及序數（ordinal number），基數（cardinal number）的基本概念和定理，俾使讀者能在大學本部或作研究生時順利研讀拓樸學，實變及複變函數論，以及代數等高等數學的學科。我們也希望這本集合論講義是將來研讀數學基礎及邏輯學的學生一個適當的階梯。本書第九章舉有集合論三個應用之例。第一個例是證明所有包利爾集合（Borel sets）所成之集合B與所有實數所成之集合R等權，亦即B與R有相等之基數。在哈耳摩斯(P. R. Halmos）所著「測度論」（measure Theory）書中第三章第十五節有一個習題是要人指出：並非所有的勒白格可測度集合（Lebesque mesurable set）皆是包利爾集合；該書提示一個解法，主要步驟就是證明B與R的基數相等。該書對此題之解法的提示應用了集合論中一大串基本的知識，那是需要人把一本集合論教科書從頭讀到序數、基數等最後的章節才能透徹了解的。本書編著者過去所知，有的學生因未深究集合論而對這個題目只是似懂非懂的過去罷了；顯然不能理解這種提示之證法的學生即尚未到達今日研究生應有的程度，這是值得提醒一些同學注意的。本書編著者因對這個題目留有深刻印象，特把他選出來在本書中給以詳細的證明步驟，以為應用集合論知識的一個有趣的大演習。第九章中的第二個例子是關於集合運算的，這個例是證明：沒有一個σ代數是既無窮而又可數的（countable），此為魯丁（W. Rudin）所著「實變及複變分析學」（Real and Complex Analysis）一書第一章中所見之一習題。第三個例是用基數的概念來講述拓樸學中緊緻空間（compact space）的徵性。這三個例子都不是淺顯的，希望由此引起讀者深厚的興趣，亦盼據此使讀者領悟到研習高等數學非先具有堅實的集合論基礎不可。

本書從教學便易之觀點仍採非公設化之講法，故屬於一般所謂的天眞集合論（naive set theory）。但本書之安排與組織仍力求系統化，對需用之

自然數及自然數論中的若干基本概念及定理皆是從集合論自身予以導出（見第三章及第八章）。至於從自然數進而再導出整數，有理數及實數等之理論，則不被包在本書範圍之內，一則因爲篇幅太長，一則也因爲一些代數及分析學的文獻已對此等材料做過嚴格的處理；本書只去應用他們的結果罷了。因此本書有些不自足的地方，希讀者予以注意。

本書與舊有的經典的集合論教科書，諸如豪斯道夫（Hausdorff），堪姆刻（Kamke），佛朗克（Fraenkel），斯爾平斯基（Sierpinski）等人所著的相較已有顯著的變動，藉以適應較近代的發展。首先是用序對（ordered pair）來定義函數，此種辦法已在許多文獻中普遍應用，讀者將會覺出它有許多方便的地方。其次關於序數與基數的講法通常有二種，一種是因襲集合論創始人堪托（Cantor）的講法：只說出在什麼條件下一個集合的基數比另一集合的基數大（或者二者相等）；對序數的處理亦彷此，但序數及基數本身是什麼却沒有提到；另一種講法是把序數定義作一種特殊的有序集合（ordered set）而基數則被定義作一種特殊的序數，進而由定義導出序數、基數的性質和關係。本書將這兩種講法同時予以介紹；又因這兩種講法所得結果相同（參閱本書第五章§3定理4及第六章§3之證明）而後者似可使系統更簡單化，故本書主體只發展第二種講法的系統。把函數定義爲由序對所組成的一種特殊的集合以及用第二種講法來發展序數及基數的理論都是採自公設化集合論系統中的辦法。本書有了此異於前述諸經典教科書之二項革變之後在主幹上已與公設化的集合論相去無多，而公設化集合論實爲研習數學基礎的一項重要對象；是以本書已爲將研習數學基礎者準備了不少必需的預備知識。

天眞的集合論因可產生詭論（paradox），亦即可導出矛盾，而爲人所不信任；故有公設化集合論的出現，思有以補救之道。本書最後設一第十章專講公設化集合論的原委，並提出哲墨洛與佛朗克（Zermelo-Fraenkel）的公設系爲例加以適當的發展。事實上本書的主幹加上第十章的引子很易得出一套系統嚴密的公設化集合論。第十章所提的一系公設中除第一個公設爲堪托舊有應用的而外其餘都是新提出來專講什麼樣的集合是存在而用的。在第三章§1中我們把所有自然數所成的集合N定義作一系集合D的交集$\cap D$。此定義如要有意義則需要D不是空集合，而D中必有元素存在可由第十章中的無窮公設（axiom of infinity）予以保證。又如在第六章§2中討論無窮基數$\aleph_\alpha$時於定理十一之證明的情形（三）中需要一個集合

$$\{f \mid 有\ b \in a_0\ 合於\ P(f, b)\}$$

的存在，在此 $a_0$ 爲一已知之集合而 $P(f,b)$ 爲一條件，對任一 $b$，最多只有一個 $f$ 能使 $P(f,b)$ 成立者。上述集合之存在可由第十章之置換公設（axiom of replacement）保證之。彷此二例，讀者於讀畢本書後不難把本書主幹中的少數佔重要位置的存在定理重新利用第十章的公設予以證明，而使本書一變成爲一個公設化的集合論。此誠爲有興趣之練習。

本書中的定義及定理不斷利用邏輯符號來陳述。此不僅便於本書之改變爲完全公設化集合論，抑且幫助讀者熟悉邏輯符號之使用；或可有助於讀者邏輯能力及興趣的增長。

# § 2　何謂集合？

在公元一八九五年，堪托（Cantor）曾謂，一個集合卽是：我們察覺到的或在我們思維中的，一些確定不同的事物的總體，這些事物稱之爲集合的元素。原文爲"Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschaung oder unseres Denkens (Welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen"所謂"確定的"卽是說它們滿足某一個特性。因之，我們謂：凡一個特性，決定一個集合。所有滿足此特性的個體，稱之爲構成此集合的元素。

例 1. 若特性爲"$x$ 爲某校某年某班的學生"，則滿足此特性的個體 $x$，（在此 $x$ 爲某些學生），構成一特定集合。

我們用符號　$\{x \mid P(x)\}$

表示一個集合，此處 $P(x)$ 表示一個特性。譬如例 1 所示集合則記成

$\{x \mid x$ 爲某校某年某班的學生$\}$。

有時特性可寫成列舉式的，例如

$\{x \mid x$ 爲 $A$ 君或 $x$ 爲 $B$ 君$\}$

則此集合簡記成　$\{A$君，$B$君$\}$。

二個不同的特性，可能決定相同的集合，例如

$\{x \mid x$ 爲某校某年某班的學生$\} = \{A$君，$B$君，……，$F$君$\}$。

定義 1　若 $A$ 爲一集合，則 $x \in A$，表示 $x$ 爲 $A$ 的元素。$x \overline{\in} A$，表示 $x$ 不爲 $A$ 的元素。

例 2　$A$君 $\in \{A$君，$B$君$\}$。

$F$君$\overline{\in}$ { $A$君 , $B$君 } 。

# § 3 常用的邏輯符號

爲了敍述上的方便起見，我們將用一些常用的邏輯符號，現介紹如下：設$P,Q$表示任二個語句；$x,y$表示任二個個體，則

| | | |
|---|---|---|
| $P\&Q$ | 表示 | $P$且$Q$ |
| $P\vee Q$ | 表示 | $P$或$Q$ |
| $\neg P$ | 表示 | 非$P$，即$P$之否定 |
| $P\rightarrow Q$ | 表示 | 若$P$，則$Q$（註） |
| $P\equiv Q$ | 表示 | $P\rightarrow Q$且$Q\rightarrow P$ |
| $(x)P(x)$ | 表示 | 所有的個體$x$皆滿足$P(x)$ |
| $(Ey)P(y)$ | 表示 | 至少在某一個個體$y$，滿足$P(y)$ |
| $(Ey!)P(y)$ | 表示 | 滿足$P(y)$之$y$有一僅一。 |
| $A\overset{Df}{=}B$ | 表示 | 將$A$與$B$定義爲相等 |
| $P\overset{Df}{\equiv}q$ | 表示 | 將$P$與$q$二語句定義爲等值 |

（註）符號“$\rightarrow$”的用法，與日常語言的“如……則……”有些不同。我們規定語句$P\rightarrow Q$，在下列三種情形出現時即爲眞：“$P$爲眞$Q$爲眞”，“$P$爲假$Q$爲眞”，及“$P$爲假$Q$爲假”。在“$P$爲眞$Q$爲假”的情形出現時，即爲假。舉例言之，設$x$爲一個體，令$P$表示語句“$x\neq x$”，$Q$表示語句“$x$爲三角形”，於是因“$x\neq x$”恒爲假，故對任何個體$x$而言，恒有

$$(x\neq x\rightarrow x\text{爲三角形})$$

爲眞，因之

$$(x)(x\neq x\rightarrow x\text{爲三角形})$$

爲一眞語句。這樣的規定，是可以給我們帶來了不少的便利。

定義1 若$A$，$B$爲二集合，則令

$B\subset A\overset{df}{\equiv}(x)(x\in B\rightarrow x\in A)$。

（即表示$B\subset A$之定義爲：所有$B$中的元素，皆爲$A$中的元素。）

定義2 若$A,B$爲二集合，則令

$A=B\overset{df}{\equiv}(A\subset B)\&(B\subset A)$。

（即表示$A$，$B$兩集合相等的定義爲：$A\subset B$且$B\subset A$。）

定義 3　設 $A, B$ 爲二集合，若 $B \subset A$，則稱 $B$ 爲 $A$ 之子集合。若 $B \subset A$ 且 $B \neq A$，則稱 $B$ 爲 $A$ 之眞子集合。

定義 4　不含任何元素的集合，稱之爲空集合，以 $\phi$ 表之。

定理 1　若 $A$ 爲一集合，則 $\phi \subset A$。

證明　因對任一個體 $x$ 而言，$x \in \phi$ 恒爲假，故

$$(x \in \phi \rightarrow x \in A)$$

恒爲眞，因之 $(x)(x \in \phi \rightarrow x \in A)$ 成立，按定義 1，即得 $\phi \subset A$。

**習題 1**　試證 $\phi \neq \{\phi\}$。

**習題 2**　設 $A = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi\{\phi\}\}\}$，試證 $A$ 有三個不同的元素，且每一個元素亦皆爲 $A$ 之子集合。

**習題 3**　試證 $\{a\} = \{a, a\}$，$\{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$（註）

（註）　$\{a, a\}$ 實爲 $\{x \mid x$ 爲 $a$ 或 $x$ 爲 $a\}$ 的簡寫。

# 第二章　等權集合

## §1　關係與函數

定義1　若$x, y$爲二個體，則令$\langle x, y\rangle \overset{Df}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$。稱$\langle x, y\rangle$爲一序對。

定理1　$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \to a = c \ \& \ b = d$。

證明　分兩種情形來討論：(一)當$a = b$時；因$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$，故$\{a\} = \{c\}$且$\{a\} = \{c, d\}$，因之，$a = c = d = b$。(二)當$a \neq b$時；因若$c = d$，則同(一)可證$c = a = b = d$故$c \neq d$。今$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$，故$\{a\} = \{c\}$，$\{a, b\} = \{c, d\}$，因之　$a = c$，$b = d$。

系：$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \equiv x = y$。

定義2　若$R = \{z \mid (Ex)(Ey)(z = \langle x, y\rangle)\}$，則稱$R$爲一關係，
$DomR \overset{Df}{=} \{x \mid (Ey)(\langle x, y\rangle \in R)\}$，稱$DomR$爲$R$之範圍。
$RanR \overset{Df}{=} \{y \mid (Ex)(\langle x, y\rangle \in R)\}$，稱$RanR$爲$R$之値域。

定義3　設$F$爲一關係，若恒有

$(\langle x, y\rangle \in F \ \& \ \langle x, z\rangle \in F \to y = z)$，則稱$F$爲一函數。

若$F$爲一函數，且$\langle x, y\rangle \in F$，則常以$F(x)$表$y$。若$A = DomF$，則常以$F(A)$表$RanF$，稱$F$爲將$A$映成$F(A)$。若$F(A) \subset C$，則稱$F$爲將$A$映入$C$。

例1　$R = \{\langle a, m\rangle, \langle a, p\rangle, \langle b, q\rangle, \langle c, r\rangle\}$爲一關係，然非一函數。$DomR = \{a, b, c\}$，又$RanR = \{m, p, q, r\}$。

例2　$R = \{\langle a, m\rangle, \langle b, m\rangle, \langle c, p\rangle\}$爲一函數。$DomF = \{a, b, c\}$，又$RanF = \{m, p\} = F(\{a, b, c\})$。稱$F$爲將$\{a, b, c\}$映成$\{m, p\}$，然稱$F$爲將$\{a, b, c\}$映入$\{m, p, r\}$。

定義4　設$F$爲一函數，若恒有

$(\langle x, y\rangle \in F \ \& \ \langle z, y\rangle \in F \to x = z)$，則稱$F$爲一對一函數。

例3 $F=\{<a,m>,<b,p>,<c,q>\}$ 爲一對一函數。

定義5 若 $R$ 爲一關係，則令 $R^{-1}\overset{Df}{=\!=}\{<a,b>|<b,a>\in R\}$。

例4 若 $R=\{<a,m>,<a,p>\}$，則 $R^{-1}=\{<m,a>,<p,a>\}$。

下面的定義，是一個非常重要而且常用的。

定義6 設 $A,B$ 爲兩集合，若有一個一對一函數 $F$ 將 $A$ 映成 $B$（即 $Dom F=A$ 且 $Ran F=B$），則稱 $A,B$ 成一一對應，或稱 $A$ 與 $B$ 等權，以 $A\sim B$ 表之。

定理2 若 $F$ 爲一對一函數，則 $F^{-1}$ 亦爲一對一函數。

證明 $F^{-1}$ 爲一關係至爲顯然。

設 $<b,c>\in F^{-1}$，$<b,d>\in F^{-1}$；因 $<c,b>\in F$，$<d,b>\in F$，$F$ 爲一對一函數，故 $c=d$，因之，$F^{-1}$ 爲一函數。同理，不難證明 $F^{-1}$ 爲一對一。

習題1 $A\sim A$。

習題2 設 $A\sim B$，試證 $B\sim A$。

習題3 設 $A\sim B$，又 $B\sim C$，試證 $A\sim C$。

# § 2 集合的運算

定義1 若 $A,B$ 爲二集合，則令

$A\cup B\overset{Df}{=\!=}\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$，稱 $A\cup B$ 爲 $A,B$ 之聯集。

$A\cap B\overset{Df}{=\!=}\{x|(x\in A)\&(x\in B)\}$，稱 $A\cap B$ 爲 $A,B$ 之交集。

$A-B\overset{Df}{=\!=}\{x|(x\in A)\&(x\overline{\in}B)\}$，稱 $A-B$ 爲 $A,B$ 之差集。

$P(A)\overset{Df}{=\!=}\{x|x\subset A\}$，稱 $P(A)$ 爲 $A$ 之冪集。

$A\times B\overset{Df}{=\!=}\{<x,y>|(x\in A)\&(y\in B)\}$，稱 $A\times B$ 爲 $A,B$ 之積集。

$A^B\overset{Df}{=\!=}\{x|x$ 爲一函數，$Dom\ x=B$，且 $Ran\ x\subset A\}$

定理1 若 $C\in P(A)$，且 $D\in P(A)$，則 $C\cup D\in P(A)$，$C\cap D\in P(A)$，且 $C-D\in P(A)$。

證明 因 $C\in P(A)$，$D\in P(A)$，故 $C\subset A$，$D\subset A$，因之，$C\cup D\subset A$，$C\cap D\subset A$，且 $C-D\subset A$，即知 $C\cup D\in P(A)$，$C\cap D\in P(A)$，且 $C-D\in P(A)$。

定理2 若 $A\subset C$，且 $B\subset C$，則 $(C-A)\cap(C-B)=C-(A\cup B)$，

且 $(C-A)\cup(C-B)=C-(A\cap B)$。

證明　設 $x\in(C-A)\cap(C-B)$；因知 $x\in C$，$x\overline{\in}A$，且 $x\in C$，$x\overline{\in}B$，故 $x\in C$ 且 $x\overline{\in}(A\cup B)$，即 $x\in C-(A\cup B)$，我們得 $(C-A)\cap(C-B)\subset C-(A\cup B)$。

反之，設 $x\in C-(A\cup B)$；因知 $x\in C$ 且 $x\overline{\in}(A\cup B)$，即 $x\in C$，$x\overline{\in}A$ 且 $x\in C$，$x\overline{\in}B$，故 $x\in(C-A)\cap(C-B)$，我們得 $C-(A\cup B)\subset(C-A)\cap(C-B)$。

於是，$(C-A)\cap(C-B)=C-(A\cup B)$。

同理可證　$(C-A)\cup(C-B)=C-(A\cap B)$。

定義2　若 $\overline{\omega}$ 爲一集合，則令

$$\cup\overline{\omega}\ \underline{\underline{Df}}\ \{x\mid(EZ)[(Z\in\overline{\omega})\ \&\ (x\in Z)]\}$$

$$\cap\overline{\omega}\ \underline{\underline{Df}}\ \{x\mid(x\in\cup\overline{\omega})\ \&\ (Z)[(Z\in\overline{\omega})\to(x\in Z)]\}$$

$$\pi\overline{\omega}\ \underline{\underline{Df}}\ \{f\mid f\text{ 爲一函數}, Dom f=\overline{\omega}, Ran f\cup\overline{\omega}, \text{且}\ (\omega)(\omega\in\overline{\omega}\to f(\omega)\in\omega)\}$$

例1　若 $\overline{\omega}=\{a,b,c\}$，$a=\{m,n\}$，$b=\{p,q\}$，$c=\{u\}$ 則 $\cup\overline{\omega}=\{m,n,p,q,u\}$

例2　若 $\overline{\omega}=\{a,b\}$，$a=\{m,n\}$，$b=\{l,m\}$，則 $\cap\overline{\omega}=\{m\}$

例3　若 $\overline{\omega}=\{a,b\}$，$a=\{0\}$，$b=\{0,1\}$，則 $\pi\overline{\omega}=\{\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle\}\}$

定義3　設 $I$ 爲一集合，對任一 $i\in I$，有一集合 $F_i$，(換言之，有一函數 $F$，$Dom F=I$，且對 $I$ 中任一 $i$ 而言，$F(i)$ 爲一集合，再令 $F_i$ 表示 $F(i)$。以後仿此。) 則令

$$\bigcup_{i\in I}F_i\ \underline{\underline{Df}}\ \{x\mid(Ei)(i\in I\ \&\ x\in F_i)\}$$

$$\bigcap_{i\in I}F_i\ \underline{\underline{Df}}\ \{x\mid(x\in\bigcup_{i\in I}F_i)\ \&\ (i)(i\in I\to x\in F_i)\}$$

$$\pi_{i\in I}F_i\ \underline{\underline{Df}}\ \{f\mid f\text{ 爲一函數}, Dom f=I, Ran f\subset\bigcup_{i\in I}F_i, \text{且}\ (i)(i\in I\to f(i)\in F_i)\}$$

例4　若 $I=\{a,b\}$，$F_a=\{0\}$，$F_b=\{0,1\}$ 則

$$\pi_{i\in I}F_i=\{\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle\},\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle\}\}$$ 然

$$F_a\times F_b=\{\langle x,y\rangle\mid x\in F_a\ \&\ y\in F_b\}=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle\}$$