

微分方程稳定性理論講義

张 学 铭 等 編

山 东 人 民 出 版 社

微分方程稳定性理論講義

張 學 銘 等 編

山 東 人 民 出 版 社

1953年·濟南

微分方程穩定性理論講義

張學銘等編

*

山東人民出版社出版 (濟南經9路勝利大街)

山東省書刊出版業營業許可証出001號

山東新华印刷厂印刷 山東省新华書店發行

*

書号: 2794

开本 850×1168公厘 1/32·印張 10 1/4

1959年5月第1版 1959年5月第1次印刷

印数: 1—4,700

統一書号: 13099·45

定 价: (8) 1.20 元

序 言

本書的任务系向讀者介紹微分方程穩定性理論的一般基礎知識和一些現代結果。

本書共分六章。第一章的內容主要敘述綫性組一些性質和向量、矩陣微分方程一些基本知識。第二章旨在介紹綫性組解的穩定性、有界性及漸近型，在這一章中我們介紹了 *R. Bellman*, *Б. Демидович*, *N. Levinson*, *H. Weyl* 和 *В. А. Якубович* 等人的一些現代結果。在第三章中，我們比較系統地介紹了 *А. М. Ляпунов* 的特征數理論，并且还敘述了 *Б. Ф. Былов*; *И. Г. Малкин*; 和 *Р. Э. Виноград* 等人關於特征指數穩定性方面的一些新結果。第四章是介紹非綫性組解的穩定性，而主要內容是將 *А. М. Ляпунов* 第二方法加以闡述，特別在非駐定系統方面我們介紹了 *J. L. Massera* 的工作。在第五章中，我們簡單地介紹了一下臨界情況問題。第六章的內容，是介紹綫性二階方程解的有界性和穩定性，關於這方面文獻甚多，故在本章僅就其主要者加以陳述。

本書假定讀者通曉實函數論、綫代數，和一些矩陣函數的知識。

本書除在各章之末附有主要參考文獻，以說明取材之來源外，還應特別提出的是：在第二章中的部分材料系尤秉禮、張炳根二同志所供給，第三章中的部分材料系選取了陳祖浩、梁中超二同志的譯稿，在第四章中部分材料，系參考了楊培勤同志的譯稿，在第六章中部分材料參考了毛世忠同志的綜合報告。

本書系為山東大學數學系開設微分方程穩定性理論一課而寫，歷時雖約三年，然終嫌匆促，加之作者學識薄劣，疏漏錯誤，自所難免，深望我所尊敬的同行給予指正。

張 學 銘

1957.4.22于青島山東大學

目 录

序 言

第一章 綫性微分方程組的性質····· 1—53

- §1. 引 言····· 1
- §2. 向量——矩陣記号····· 1
- §3. 向量——矩陣微分方程解的存在唯一性定理····· 4
- §4. 矩陣微分方程, 矩陣子····· 7
- §5. 綫性非齐次方程····· 9
- §6. 常系数綫性微分方程組(I)····· 10
- §7. 常系数綫性微分方程組(II)····· 12
- §8. 变系数綫性微分方程組····· 24
- §9. 周期系数綫性微分方程組····· 28
- §10. 共軛組設方程組····· 44
- §11. 李亞普洛夫 (А. М. Ляпунов) 可化組····· 45
- §12. 三角型組 [*Diliberto* 的結果]····· 51

第二章 綫性微分方程組解的穩定性、有界性

及漸近性····· 54—113

- §1. 李亞普洛夫 (А. М. Ляпунов) 型的穩定性定义
及几个基本定理····· 54
- §2. 綫性方程組解的有界性····· 56
 - 1. N. Wintner 的結果····· 56

2.	Dini—Hukuwata 定理.....	58
3.	R. Bellman 的結果.....	59
4.	一般的变系数方程組.....	64
§3.	綫性組解的穩定性.....	67
1.	常系数綫性組解的穩定性.....	67
2.	变系数綫性組解的穩定性.....	68
3.	Б. Л. Демидович 的結果.....	68
§4.	常微分方程組解的漸近性狀.....	77
1.	綫性常微分方程組解的漸近性狀.....	77
2.	几乎常系数綫性組解的漸近型 (Bellman).....	81
3.	N. Levinson 的結果.....	90
4.	几乎綫性組解的漸近性狀.....	96
5.	几乎綫性方程組更一般的結果 (Якубович).....	101
第三章	А. М. Ляпунов 特征数理論.....	114—188
§1.	Ляпунов 特征数的定义及基本性質.....	114
§2.	关于綫性常微分方程組特征数的估值.....	123
1.	几个基本定义和定理.....	123
2.	特征数的估值.....	125
3.	O. Perron 定理.....	132
§3.	正則組的一些性質.....	145
1.	正則基本組.....	145
2.	Ляпунов 变换.....	145
3.	正則組与非正則組.....	146
§4.	特征数的穩定性.....	153
1.	特征数穩定問題的提出和定义.....	153
2.	Б. Ф. Былов 的結果.....	155
3.	Малкин 的結果.....	164

4. Р. Э. Виноград 的結果.....172
5. Б. Ф. Былов 和 Р. Э. Виноград 关于最大特征指数
的上稳定性和最小特征指数的不稳定的研究.....178

第四章 非綫性組解的稳定性.....189—240

- §1. 引 言189
- §2. 一次近似方法190
1. 一次近似的系数矩阵之特征根都是單根191
2. 一次近似之系数矩阵有高次初等因子, 即有重根时
的情况195
3. 一个不稳定性定理.....198
4. 解的漸近稳定性199
- §3. А. М. Ляпунов 之第二方法.....201
1. 預备知識201
2. А. М. Ляпунов 关于运动稳定性兩定理.....205
3. Ляпунов 关于不稳定性兩個定理.....209
- §4. 非駐定系統211
1. 定义和記号211
2. Ляпунов, Massera 和 Marachkoff 的一些定理.....213
- §5. Ляпунов 第二方法的应用220
- §6. Ляпунов 函数之存在問題232
1. Massera 定理 1.....233
2. Massera 定理 2.....235
3. Massera 定理 3.....238

第五章 关于临界情况稳定性.....241—261

- §1. 临界情况問題的提出241
- §2. 駐定系統241

§3. 周期解	250
§4. 非駐定系統	256
第六章 二阶綫性微分方程	262—318
§1. 一些引理	262
§2. 二阶綫性微分方程解的有界性	264
1. Kneser A—Ascoli 的定理	265
2. В. М. Шенелев 的結果	267
3. Sansona 的結果	268
4. Л. А. Гусаров 的結果	269
5. 較一般的形式	269
6. R. Bellman 的結果	270
7. Л. И. Камынин 的結果	273
§3. 关于具有周期系数的二阶方程解之穩定性	289
1. 一些基本性質	289
2. А. М. Ляпунов 穩定性之判定法則	292
3. Goran Borg 判定条件	298
4. ЮРОВСКИЙ 关于两个一阶具周期系数的 綫性方程組	301
5. Winter 的方法的应用	312
6. Старжинский 关于二阶标准綫性方程組解的 穩定性的另一个判定	313

第一章

綫性微分方程組的性質^{[1][4]}

§1. 引言 本章將介紹綫性微分方程組解的一些基本性質, 即:

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)y_k, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

之解的一些基本性質. 自变量 t 之区間为 $[0, \infty]$, 并且我們假定系数 $a_{ik}(t)$ 在任何有尽区間內为分段連續. 在此假定下, 我們所考虑的积分只是黎曼积分, 我們很少牽涉到勒貝格积分而將我們的討論仅可能保持在基本水平上.

我們要求系数均为实函数, 当然, 我們要討論常系数和几乎常系数并且引入复值函数解. 例如, 我們用 (e^{it}, e^{-it}) 表 $u'' + u = 0$ 的基本解組, 然而, 我們总归更多的考虑实解.

我們为了研究綫性微分方程組解的性狀, 就有必要利用向量和矩陣, 因此, 在本章里引进向量和矩陣的概念以及与微分方程有关的理論.

§2. 向量——矩陣記号, n 个量所組成的列

$$(1) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{此处 } y_i \text{ 为实值或复值.}$$

我們称它为 n 維列向量; 記号 (y_1, y_2, \dots, y_n) 称为 n 維行向

量, 若 y_i 均为 t 之函数, 则 y 称为 t 之函数向量, 否则称为常数向量. y_i 称为 y 之第 i 分量.

字母 x, y, z, u, v , 及 w 常用以表向量函数; a, b, c 及 d 常用以表常数向量, 向量的最基本运算这里不予提出, 我们仅将向量的积分和微商加以定义: 即

$$\int y(t) dt = \begin{bmatrix} \int y_1(t) dt \\ \vdots \\ \int y_n(t) dt \end{bmatrix}, \quad \frac{dy}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

我们再引进向量的模

$$(2) \quad \|y\| = \sum_{i=1}^n |y_i|$$

(2) 即称为 y 的模, 于是有下面的不等式成立.

$$(3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{三角不等式})$$

$$\|c_1 y\| = |c_1| \|y\|$$

$$\|f y dt\| \leq f \|y\| dt$$

$$\|y\| = 0, \text{ 则所有的 } y_i = 0,$$

对于向量作了如上叙述后, 我们再转到方阵概念的引入.

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ik})$$

称为 n 阶矩阵, 其中数 a_{ik} 为实数或复数均可.

若元素 a_{ik} 均为 t 之函数, 则 A 称为函数矩阵, 倘若 a_{ik} 在区间 $a \leq t \leq b$ 上连续, 则 A 亦在 $[a, b]$ 上定义连续.

两个矩阵的和为

$$(5) \quad A+B = (a_{ik} + b_{ik})$$

两个矩阵的积为

$$(6) \quad AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right)$$

在这里,要特别指出的是 A 和 B 不一定是可交换的.

$$(7) \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为单位矩阵,于是自然有 $AI = IA = A$, 以及若 C_1 为一常数, 则 $C_1 A = AC_1$.

矩阵的模是由下式定义的

$$(8) \quad \|A\| = \sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|$$

从而我们很容易得到下面的不等式:

$$(9) \quad \begin{aligned} \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\| \\ \|CA\| &\leq \|C\| \|A\| \\ \|AX\| &\leq \|A\| \|X\| \end{aligned}$$

$$(10) \quad \int Adt = \begin{bmatrix} \int a_{11} dt \cdots \int a_{1n} dt \\ \vdots \\ \int a_{n1} dt \cdots \int a_{nn} dt \end{bmatrix}$$

因而不等式

$$(11) \quad \|\int Adt\| \leq \int \|A\| dt$$

成立.

同时我们再定义 A 的微商如下:

$$(12) \quad \frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ik}}{dt} \right) = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{da_{n1}}{dt} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dt} \end{bmatrix}$$

利用上面的记号, 我们可将 (1) 写成简单的形式

$$(13) \quad \frac{dy}{dt} = Ay.$$

若我们给定 y 的初值, 则有

$$(13) \quad \frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(0) = C.$$

此外，我們指出，當 $|A| = 0$ ，則稱 A 為奇異矩陣。 $|A| \neq 0$ ，則 A 稱非奇異矩陣，倘若 $|A| \neq 0$ ，則 A^{-1} 是唯一存在的，因而有

$$(14) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

我們很容易證明下面的公式

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(AB) &= \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt} \\ \frac{d}{dt}(Ay) &= \frac{dA}{dt}y + A\frac{dy}{dt} \\ \frac{d}{dt}A^{-1} &= -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1} \end{aligned}$$

最后，我們還要將向量和矩陣的無窮級數的記號引進來：

$$(16) \quad \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{ik}^{(m)} \right) \\ \sum_{m=1}^{\infty} y^{(m)} &= \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} y_1^{(m)} \\ \vdots \\ \sum_{m=1}^{\infty} y_n^{(m)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

當然，這是要假定右端的無窮級數為收斂的。

於是我們不難證明 $\sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty} y^{(m)}$ 為收斂的充分條件

是 $\sum_{n=1}^{\infty} \|A^{(n)}\|$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty} \|y^{(m)}\|$ 為收斂。

§3. 向量——矩陣微分方程解的存在唯一性定理

定理1. 設 $A(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上連續，則方程組

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y(0) = C$$

在此區間上存在唯一解。

証：(I) 存在性，我們用辟加逐步逼近法，作出向量函數序列如下：

$$(2) \quad y_0 = C,$$

$$y_{n+1} = C + \int_0^t A(t_1) y_n dt_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

我們希望序列(2)一致收斂于一向量函數 $y(t), t \in [0, t_0]$ 。

倘若(2)一致收斂于 $y(t)$ ，則我們于(2)中之積分方程當 $n \rightarrow \infty$ 時在積分號下取極限便得

$$(3) \quad y = C + \int_0^t A(t_1) y dt_1$$

然后再求微商便得(1)，因此我們的證明便集中到(2)的一致收斂。現在我們來證明序列 $\{y_n\}$ 一致收斂。我們考慮級數

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

其首 N 項之和為

$$(5) \quad S_n = y_{n+1} - y_0$$

因此，倘若級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\|$ 一致收斂，則(4)亦一致收斂，

因而(2)有極限函數 $y(t)$ 存在，我們回到 $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\|$ 收斂

的證明：我們有：

$$(6) \quad y_{n+1} - y_n = \int_0^t A(t_1) (y_n - y_{n-1}) dt_1, \quad n \geq 1,$$

并且得

$$(7) \quad \|y_{n+1} - y_n\| \leq \int_0^t \|A(t_1)\| \|y_n - y_{n-1}\| dt_1, \quad n \geq 1,$$

令

$$C_1 = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|A(t)\|, \quad \text{則(7)變為}$$

$$(8) \quad \|y_{n+1} - y_n\| \leq C_1 \int_0^t \|y_n - y_{n-1}\| dt_1$$

由于 $\|y_1 - y_0\| \leq \int_0^t \|A(t_1)\| \|y_0\| dt_1 \leq c_1 \|c\| t$, 我們歸納地得到

$$(9) \quad \|y_{n+1} - y_n\| \leq \|c\| \frac{(c_1 t)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

顯然, (9) 之右端所成之冪級數在任何有盡區間內是收斂的, 因

而級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\|$ 一致收斂, 從而知道 $\{y_n\}$ 有

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y(t)$, $y(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上亦連續, 于是存在性便得證明。

(II) 唯一性, 令 z 表 (1) 之另一解, 而有 $z(0) = y(0) = c$ 故有

$$(10) \quad \frac{dz}{dt} = A(t)z, \quad z(0) = c, \quad t \in [0, t_0]$$

積分之,

$$(11) \quad z = c + \int_0^t A(t_1) z dt_1$$

與 (2) 比較, 得

$$(12) \quad z - y_{n+1} = \int_0^t A(t_1) (z - y_n) dt_1$$

因而有

$$(13) \quad \|z - y_{n+1}\| \leq \int_0^t \|A(t_1)\| \|z - y_n\| dt_1$$

由于 $\|z - y_0\| \leq \|z\| + \|y_0\| \leq c_2 + \|c\|$

此處 $c_2 = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|A(t)\| \|z\|$, 我們重復之, 得

$$(14) \quad \begin{aligned} \|z - y_1\| &\leq (c_2 + \|c\|) c_1 t \\ &\vdots \\ \|z - y_{n+1}\| &\leq (c_2 + \|c\|) \frac{(c_1 t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

讓 $n \rightarrow \infty$, 我們有 $\|z - y\| \leq 0$, 由 $\lim \|z - y_{n+1}\| = 0$, $\lim y_{n+1} = y(t)$, 故有 $z - y(t) = 0$, 對任何 t 而言, 因而 $z \equiv y$.

於是唯一性得証。

我們已經証明向量矩陣微分方程的解之存在及唯一性定理。用同樣的方法可以証明下面引進的矩陣微分方程解之存在唯一性定理。

§4. 矩陣微分方程, 矩陣子(2)

我們稱

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad y(0) = I$$

為矩陣微分方程。

定理1. 設 $A(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上連續, 則 (1) 在 $[0, t_0]$ 上存在唯一解。

証: (I) 存在性, 作各次近似如下:

$$(2) \quad \begin{aligned} y_0 &= I \\ y_k &= I + \int_0^t A(t_1) y_{k-1} dt_1, \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

亦即

$$(3) \quad \begin{aligned} y_0 &= I \\ y_1 &= I + \int_0^t A(t_1) dt \end{aligned}$$

$$y_2 = I + \int_0^t A(t_1) y_1 dt_1 = I + \int_0^t A(t_1) dt_1 + \int_0^t A(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2) dt_2$$

$$(3) \quad y_k = I + \int_0^t A(t_1) dt_1 + \int_0^t A(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2) dt_2 + \dots$$

我們令

$$(4) \quad g(t) = \begin{matrix} m & a & x \\ 0 \leq t \leq t_0 \end{matrix} \left[|a_{11}(t)|, |a_{12}(t)|, \dots, |a_{nn}(t)| \right]$$

$$h(t) = \left| \int_0^t g(t_1) dt_1 \right|$$

当然, 很容易知道 $g(t)$, $h(t)$ 在所論區間上連續。

將 (3) 可分成 n^2 個純量級數來考慮, 显然, 其中每一個都囿于級數

$$(5) \quad 1 + h(t) + \frac{n}{2!} h^2(t) + \frac{n^2}{5!} h^3(t) + \dots$$

事实上, 因为

$$\left| \left\{ \int_0^t A(t_1) dt_1 \right\}_{i,k} \right| = \left| \int_0^t a_{i,k}(t_1) dt_1 \right| \leq \left| \int_0^t g(t_1) dt_1 \right| = h(t)$$

$$\left| \left\{ \int_0^t A(t_1) dt_1 \int_0^t A(t_1) dt_1 \right\}_{i,k} \right| = \left| \sum_{j=1}^n \int_0^t a_{ij}(t_1) dt_1 \right|$$

$$\left| \int_0^t a_{jk}(t_1) dt_1 \right| \leq n \left| \int_0^t g(t_1) dt_1 \int_0^t g(t_1) dt_1 \right| = \frac{n}{2} h^2(t) \text{ 等等.}$$

級數 (5) 在 $[0, t_0]$ 中收斂且絕對一致收斂, 故 (3) 中之最后一式 (3)' 在 $[0, t_0]$ 上亦一致收斂, 逐項微分證明 (3)' 為 (1) 之一解, 且滿足給定的初值, 存在性得證。

(II) 唯一性, 證明略。

另外, 我們指出, 滿足初值為單位矩陣之解矩陣我們稱之為標準解矩陣, 或稱為矩陣子, 要注意, 矩陣子可以表為級數形式, 如

$$(6) \quad \Omega_0^t = I + \int_0^t A(t_1) dt_1 + \int_0^t A(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} A(t_2) dt_2 + \dots$$

它在所給的區間是絕對且一致收斂的。

我們再提出下面兩個定理:

定理 2. 若 $y(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上為標準解矩陣則有

$$(7) \quad |y(t)| = \exp \left\{ \int_0^t S P A(t_1) dt_1 \right\}$$