微分方程稳定性理論講义

张 学 銘等編

山 东 人 民 出 版 社

微分方程稳定性理論講义

張 学 銘等編

山 东 人 民 出 版 社

1 9 5 3年 · 済南

微分方程穩定性理論講义

张 学 銘等編

*

山东人民出版社出版（济南經9路胜利大街）
山东省書刊出版業营業許可証出001号
山东新华印刷厂印刷 山东省新华書店发行

*

書号：2794
开本850×1168公厘 1/32・印張 10 1/4
1959年5月第1版 1959年5月第1次印刷
印数：1——4,700

統一書号： 13099・45

定 价： (8) 1.20元

序　　言

本書的任务系向讀者介紹微分方程稳定性理論的一般基础知識和一些現代結果。

本書共分六章。第一章的內容主要敍述綫性組一些性質和向量、矩陣微分方程一些基本知識。第二章旨在介紹綫性組解的稳定性、有界性及漸近型，在这一章中我們介紹了 *R. Bellman*, Б. Демидович, *N. Levinson*, *H. Weyl* 和 B. A. Якубович 等人的一些現代結果。在第三章中，我們比較系統地介紹了 A. M. Ляпунов 的特征数理論，并且还敍述了 Б. Ф. Былов; И. Г. Малкин; 和 P. Э. Виноград 等人关于特征指数稳定性方面的一些新結果。第四章是介紹非綫性組解的稳定性，而主要內容是將 A. M. Ляпунов 第二方法加以闡述，特別在非駐定系統方面我們介紹了 *J. L. Massera* 的工作。在第五章中，我們簡單地介紹了一下临界情况問題。第六章的內容，是介紹綫性二阶方程解的有界性和稳定性，关于这方面文献甚多，故在本章仅就其主要者加以陈述。

本書假定讀者通晓实函数論、綫代数，和一些矩陣函数的知識。

本書除在各章之末附有主要参考文献，以說明取材之来源外，还应特别提出的是：在第二章中的部分材料系尤秉礼、张炳根二同志所供給，第三章中的部分材料系选取了陈祖浩、梁中超二同志的譯稿，在第四章中部分材料，系参考了楊培勤同志的譯稿，在第六章中部分材料参考了毛世忠同志的綜合报告。

本書系为山东大学数学系开設微分方程稳定性理論一課而写，历时虽約三年，然終嫌匆促，加之作者学識薄劣，疏漏錯誤，自所难免，深望我所尊敬的同行給予指正。

张 学 銘

1957.4.22于青島山东大学

目　　录

第 一 章

綫性微分方程組的性質[1][4]

§1. **引言** 本章將介紹綫性微分方程組解的一些基本性質,即:

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(t)y_k,\ i=1,2,\cdots\cdots,n.$$

之解的一些基本性質.自变量 t 之区間为$[0,\infty]$,并且我們假定系数$a_{ik}(t)$在任何有尽区間內为分段連續.在此假定下,我們所考慮的积分只是黎曼积分,我們很少牽涉到勒貝格积分而將我們的討論仅可能保持在基本水平上.

我們要求系数均为实函数,当然,我們要討論常系数和几乎常系数并且引入复值函数解。例如,我們用(e^{it}, e^{-it})表 $u''+u=0$ 的基本解組,然而,我們总归更多的考慮实解。

我們为了研究綫性微分方程組解的性狀,就有必要利用向量和矩陣,因此,在本章里引进向量和矩陣的概念以及与微分方程有关的理論。

§2. **向量——矩陣記号**, n 个量所組成的列

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}\qquad \text{此处 } y_i \text{ 为实值或复值。}$$

我們称它为 n 維列向量;記号($y_1,y_2,\cdots\cdots,y_n$)称为 n 維行向

量，若 y_i 均为 t 之函数，則 y 称为 t 之函数向量，否則称为常数向量。y_i 称为 y 之第 i 分量。

字母 x, y, z, u, v, 及 w 常用以表向量函数；a, b, c 及 d 常用以表常数向量，向量的最基本运算这里不予提出，我們仅將向量的积分和微商加以定义：即

$$\int y(t)dt=\begin{bmatrix}\int y_1(t)dt\\ \vdots\\ \int y_n(t)dt\end{bmatrix},\qquad \frac{dy}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{dy_1}{dt}\\ \vdots\\ \frac{dy_n}{dt}\end{bmatrix}.$$

我們再引进向量的模

（2）
$$\|y\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|$$

（2）即称为 y 的模，于是有下面的不等式成立。

（3）
$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \qquad \text{（三角不等式）}$$
$$\|c_1y\|=|c_1|\ \|y\|$$
$$\|\int ydt\|\leq\int\|y\|dt$$
$$\|y\|=0,\ \text{則所有的}\ y_i=0,$$

对于向量作了如上敍述后，我們再轉到方陣概念的引入。

（4）
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots, & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots, & a_{nn}\end{bmatrix}=(a_{ik})$$

称为 n 阶矩陣，其中数 a_{ik} 为实数或复数均可。

若元素 a_{ik} 均为 t 之函数，則 A 称为函数矩陣，倘若 a_{ik} 在区間 $a\leq t\leq b$ 上連續，則 A 亦在 $[a,b]$ 上定义連續。

兩个矩陣的和为

（5）
$$A+B=(a_{ik}+b_{ik})$$

兩个矩陣的积为

（6）
$$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{ki}\right)$$

在这里，要特别指出的是A和B不一定是可交换的。

(7) $$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1\end{bmatrix}$$

称为單位矩陣，于是自然有$AI=IA=A$，以及若C_1为一常数，則$C_1A=AC_1$。

矩陣的模是由下式定义的

(8) $$\|A\|=\sum_{i,k=1}^{n}|a_{i,k}|$$

从而我們很容易得到下面的不等式：

(9) $$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$$
$$\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$$
$$\|CA\|\leq\|C\|\,\|A\|$$
$$\|AX\|\leq\|A\|\,\|X\|$$

(10) $$\int A\,dt=\begin{bmatrix}\int a_{11}\,dt & \cdots\cdots & \int a_{1n}\,dt\\ \vdots & & \vdots\\ \int a_{n1}\,dt & \cdots\cdots & \int a_{nn}\,dt\end{bmatrix}$$

因而不等式

(11) $$\left\|\int A\,dt\right\|\leq\int\|A\|\,dt$$

成立。

同时我們再定义A的微商如下：

(12) $$\frac{dA}{dt}=\left(\frac{da_{ik}}{dt}\right)=\begin{bmatrix}\frac{da_{11}}{dt} & \cdots\cdots & \frac{da_{1n}}{dt}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{da_{n1}}{dt} & \cdots\cdots & \frac{da_{nn}}{dt}\end{bmatrix}$$

利用上面的記号，我們可將(1)写成簡單的形式

(13) $$\frac{dy}{dt}=Ay.$$

若我們給定y的初值，則有

(13) $$\frac{dy}{dt}=Ay,\quad y(0)=C.$$

此外，我們指出，当 $|A|=0$，則称 A 为奇異矩陣。$|A|\neq 0$，則 A 称非奇異矩陣，倘若 $|A|\neq 0$，則 A^{-1} 是唯一存在的，因而有

(14) $$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

我們很容易証明下面的公式

(15) $$\frac{d}{dt}(AB)=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(Ay)=\frac{dA}{dt}y+A\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}=-A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}$$

最后，我們还要將向量和矩陣的无穷級数的記号引进来：

(16) $$\sum_{m=1}^{\infty}A^{(m)}=\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{ik}^{(m)}\right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}y^{(m)}=\begin{bmatrix}\sum_{m=1}^{\infty}y_1^{(m)}\\ \vdots\\ \sum_{m=1}^{\infty}y_n^{(m)}\end{bmatrix}$$

当然，这是要假定右端的无穷級数为收斂的。

于是我們不難証明 $\sum_{n=1}^{\infty}A^{(n)}$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty}y^{(m)}$ 为收斂的充分条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\|A^{(n)}\|$ 和 $\sum_{m=1}^{\infty}\|y^{(m)}\|$ 为收斂。

§3. 向量——矩陣微分方程解的存在唯一性定理

定理1. 設 $A(t)$ 在 $[0, t_0]$ 上連續，則方程組

(1) $$\frac{dy}{dt}=A(t)y,\quad y(0)=C$$

在此区間上存在唯一解.

証:(I) 存在性,我們用辟加逐步逼近法,作出向量函数序列如下:

$$(2)\qquad y_0=C,$$

$$y_{n+1}=C+\int_0^t A(t_1)y_n dt_1,\quad n=0,1,2\cdots\cdots,$$

我們希望序列(2)一致收斂于一向量函数 $y(t), t\in[0, t_0]$.

倘若(2)一致收斂于 $y(t)$,則我們于(2)中之积分方程当 $n\to\infty$ 时在积分号下取极限便得

$$(3)\qquad y=C+\int_0^t A(t_1)y dt_1$$

然后再求微商便得(1),因此我們的証明便集中到(2)的一致收斂.現在我們来証明序列 $\{y_n\}$ 一致收斂.我們考虑級数

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}-y_n)$$

其首 N 項之和为

$$(5)\qquad S_n=y_{n+1}-y_0$$

因此,倘若級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|y_{n+1}-y_n\|$ 一致收斂,則(4)亦一致收斂,

因而(2)有极限函数 $y(t)$ 存在,我們回到 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|y_{n+1}-y_n\|$ 收斂的証明:我們有:

$$(6)\qquad y_{n+1}-y_n=\int_0^t A(t_1)(y_n-y_{n-1})dt_1,\quad n\geq 1,$$

并且得

$$(7)\qquad \|y_{n+1}-y_n\|\leq\int_0^t\|A(t_1)\|\,\|y_n-y_{n-1}\|dt_1\quad n\geq 1,$$

令 $C_1=\max\limits_{0\leq t\leq t_0}\|A(t)\|$, 則(7)变为

(8) $$\|y_{n+1}-y_n\|\leq C_1\int_0^t\|y_n-y_{n-1}\|dt_1$$

由于 $\|y_1-y_0\|\leq\int_0^t\|A(t_1)\|\|y_0\|dt_1\leq c_1\|c\|t$，我們归納地得到

(9) $$\|y_{n+1}-y_n\|\leq\|c\|\frac{(c_1t)^{n+1}}{(n+1)!},\quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

显然，(9) 之右端所成之冪級数在任何有尽区間內是收歛的，因而級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\|y_{n+1}-y_n\|$ 一致收歛，从而知道 $\{y_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y(t)$，$y(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上亦連續，于是存在性便得証明。

(II) 唯一性，令 z 表 (1) 之另一解，而有 $z(0)=y(0)=c$ 故有

(10) $$\frac{dz}{dt}=A(t)z,\quad z(0)=c,\quad t\in[0,t_0]$$

积分之，

(11) $$z=c+\int_0^tA(t_1)zdt_1$$

与 (2) 比較，得

(12) $$z-y_{n+1}=\int_0^tA(t_1)\ (z-y_n)dt_1$$

因而有

(13) $$\|z-y_{n+1}\|\leq\int_0^t\|A(t_1)\|\ \|z-y_n\|dt_1$$

由于 $$\|z-y_0\|\leq\|z\|+\|y_0\|\leq c_2+\|c\|$$

此处 $c_2=\max\limits_{0\leq t\leq t_0}\|z\|$，我們重复之，得

(14) $$\|z-y_1\|\leq(c_2+\|c\|)c_1t$$
$$\vdots$$
$$\|z-y_{n+1}\|\leq(c_2+\|c\|)\frac{(c_1t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

讓 $n\to\infty$，我們有 $\|z-y\|\leq 0$，由 $lim\|z-y_{n+1}|=0$，$lim y_{n+1}=y(t)$，故有 $z-y(t)=0$，对任何 t 而言，因而 $z\equiv y$。
于是唯一性得証。

我們已經証明向量矩陣微分方程的解之存在及唯一性定理。用同样的方法可以証明下面引进的矩陣微分方程解之存在唯一性定理。

§4. 矩陣微分方程，矩陣子〔2〕

我們称

(1) $$\frac{dy}{dt}=A(t)y,\quad y(0)=I$$

为矩陣微分方程。

定理1. 設 $A(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上連續，則 (1) 在 $[0,t_0]$ 上存在唯一解。

証： (I) 存在性，作各次近似如下：

(2) $$y_0=I$$

$$y_k=I+\int_0^t A(t_1)y_{k-1}dt_1,(k=1,2,\cdots\cdots)$$

亦即

(3) $$y_0=I$$

$$y_1=I+\int_0^t A(t_1)\,dt$$

$$y_2=I+\int_0^t A(t_1)\,y_1\,dt_1=I+\int_0^t A(t_1)dt_1+\int_0^t A(t_1)dt_1\int_0^{t_1}A(t_2)\,dt_2$$

$$\vdots$$

(3)′ $$y_k=I+\int_0^t A(t_1)d(t_1)+\int_0^t A(t_1)dt_1\int_0^{t_1}A(t_2)dt_2+\cdots\cdots$$

我們令

(4) $$g(t)=\max_{0\leq t\leq t_0}\left[|a_{11}(t)|,|a_{12}(t)|,\cdots\cdots,|a_{nn}(t)|\right]$$

$$h(t)=\left|\int_0^t g(t_1)\,dt_1\right|$$

当然，很容易知道 $g(t)$，$h(t)$ 在所論区間上連續。

將 (3) 可分成 n^2 个純量級数来考慮，显然，其中每一个都囿于級数

(5)　　$$1+h(t)+\frac{n}{2!}h^2(t)+\frac{n^2}{3!}h^3(t)+\cdots\cdots$$

事实上，因为

$$\left|\left\{\int_0^t A(t_1)dt_1\right\}_{i,k}\right|=\left|\int_0^t a_{i,k}(t_1)dt_1\right|\leq\left|\int_0^t g(t_1)\,dt_1\right|=h(t)$$

$$\left|\left\{\int_0^t A(t_1)dt_1\int_0^t A(t_1)dt_1\right\}_{i,k}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}\int_0^t a_{ij}(t_1)\,dt_1\right|$$

$$\left|\int_0^t a_{jk}(t_1)dt_1\right|\leq n\left|\int_0^t g(t_1)\,dt_1\int_0^t g(t_1)\,dt_1\right|=\frac{n}{2}h^2(t)\text{ 等等。}$$

級数 (5) 在 $[0,t_0]$ 中收斂且絕对一致收斂，故 (3) 中之最后一式 (3)′ 在 $[0,t_0]$ 上亦一致收斂，逐項微分証明 (3)′ 为 (1) 之一解，且滿足給定的初值，存在性得証。

(II)　唯一性，証明略。

另外，我們指出，滿足初值为單位矩陣之解矩陣我們称之为标准解矩陣，或称为矩陣子，要注意，矩陣子可以表为級数形式，如

(6)　$$\Omega_0^t=I+\int_0^t A(t_1)dt_1+\int_0^t A(t_1)dt_1\int_0^{t_1}A(t_2)dt_2+\cdots\cdots$$

它在所給的区間是絕对且一致收斂的。

我們再提出下面兩个定理：

定理2.　若 $y(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上为标准解矩陣則有

(7)　　$$|y(t)|=exp\left\{\int_0^t SPA(t_1)dt_1\right\}$$