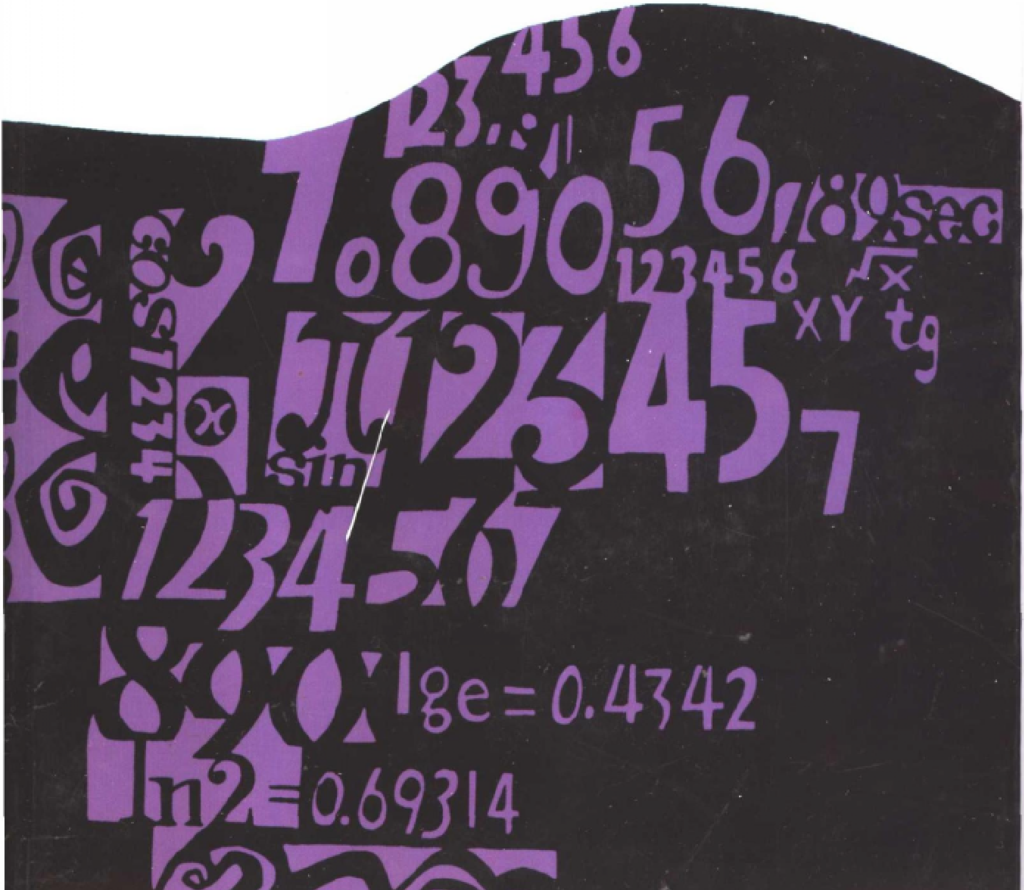
奥林匹克

数学方法选讲

AOLIN PIKE
SHUXUEFANGFA XUANJIANG

上海教育出版社



世纪集团

责任编辑　叶中豪

ISBN 7-5320-8996-7

9 787532 089963 >

易文网:www.ewen.cc

定价:(软精)13.50 元

奥林匹克
数学方法选讲

AOLIN PIKE
SHUXUEFANGFA
XUANJIANG

黄国勋　编著

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

奥林匹克数学方法选讲／黄国勋编．—上海：上海教育出版社，2002（2003.7重印）
ISBN 7-5320-8996-7

Ⅰ.奥...　Ⅱ.黄...　Ⅲ.数学课—中学—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第063836号

奥林匹克数学方法选讲

黄国勋　编著

上海世纪出版集团
上海教育出版社　出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号　　邮编：200031）

各地新华书店经销　　上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 6.75　插页 4　字数 180,000

2003年7月第1版　　2003年7月第1次印刷

印数 1－5,000本

ISBN 7-5320-8996-7/O·0012　定价：（软精）13.50元

前　言

数学奥林匹克，从1889年罗马尼亚首届中学毕业生数学竞赛算起，已有一百一十多年的历史；中国数学奥林匹克，从1956年北京、上海等地的中学生数学竞赛算起，已有将近半个世纪的历史；国际性数学奥林匹克，从1959年在罗马尼亚布加勒斯特举办的首届IMO算起，也已有四十多年的历史．数学奥林匹克，受到许多国家的高度重视与大力支持．

数学奥林匹克，其目的在于激发青年学生学习数学的兴趣，也是发现人才、培养人才的一种特殊而有效的形式．数学奥林匹克曾选拔了不少优秀人才．匈牙利数学奥林匹克优胜者中，L. Fejér在复变函数论、Vonkarman在航天动力学、A. Haar在测度论、M. Riesz在泛函分析、G. Szegö在逼近论、D. König在组合数学、R. Radó在图论分别做出了杰出的贡献；美国普特南数学奥林匹克优胜者中，J. W. Milnor(1962年)、D. B. Mumford(1974年)、D. Quillen(1978年)先后获被誉为"数学诺贝尔奖"的菲尔兹奖；1985年世界数学家大会上被邀请作一小时报告者中，至少有8人是IMO的获奖者．

数学奥林匹克，是一种智力的比赛．数学奥林匹克试题，大多出自名家之手，并且经过巧妙构思、精心制作编撰出来的．因此，数学奥林匹克试题中有许许多多令人击掌称赞的好题目．求解或求证一道数学奥林匹克佳题，往往既不需要冗长的推理论证，也不需要繁琐的演绎计算，但需要"灵感"．有这种"灵感"，才能够在"踏破铁鞋无觅处"之时，有那"得来全不费功夫"的顿悟．什么是灵感，按照古代希腊大科学家亚里士多德(Aristoteles)的说法，灵感就是在一刹那间，通过突然闪现在脑中的猜测而抓住事物本质的联系．那些数学奥林匹克优胜者们，就具备在考场上的顿悟，立即抓住题目的本质联系的能力，从而使

问题迎刃而解. 但是,“灵感”的到来,不仅需要具备一定的知识为基础,而且需要形象思维和逻辑思维能力的支持. 因此,人们普遍认为,知识的积累是重要的,而能力的培养更为重要.

当代美国著名数学家、教育家波利亚(G. Pólya)说过:“什么是数学技能呢? 数学技能就是解题能力——不仅能解决一般的问题,而且能够解决需要某种程度的独立思考、独创性、想象力和判断力的问题.”一百多年积累下来的数学奥林匹克试题宝库,为人们提供了这种需要一定程度的独创性、想象力和判断力才能解决的数学问题.

本书的题目大都选自国内外的数学奥林匹克佳题,而且重点选择中学数学教学范围之外的趣题,题型为中学数学教学所罕见. 为了有助于读者掌握解题技巧,本书按解题方法分门别类,有奇偶性分析与不变性分析、染色技巧与集合分类、抽屉原理、图论方法、映射技巧、贡献法与容斥原理、极端原则与无限下推法、归纳证明与归纳构造、正向推算与逆向推算、旋转圆盘法与状态转移法、配对技巧等,最后是奥林匹克试题的推广.

要读懂书中的例题,只需具备最基本的中学数学常识;要弄通各例题的解题的奥妙,则需要多动脑筋;要掌握所列各种解题方法与技巧,就需要付出辛勤的劳动. 这正如波利亚所说,“解题是一种实践性技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴,只能通过模仿和实践来学到它.”本书前十一章共有 140 个例题,可以向读者提供模仿的范例,而第十二章可以向读者提供实践的机会. 第十二章通过 5 道奥林匹克佳题的加强与推广,引出 42 个没有给出证明的“命题”与 18 个没有给出答案的“问题”,读者可以作为练习之用. 我们没有为各章编写习题,因为我们认为,如果读者能模仿第十二章的做法,则不难通过对各章中例题的进一步思考,为自己设计出合适的习题. 这样做,对于解题能力的提高,一定大有好处.

十多年来,作者曾在广西南宁数学奥林匹克夏令营、广西桂林数学奥林匹克夏令营以及南宁二中、南宁三中、柳州地区高中为中学生讲过“数学奥林匹克中的解题技巧”,也曾在广西大学、广西民族学院、

广西师范学院、玉林师范学院与福建的漳州师范学院为大学生讲过“奥林匹克数学数学方法”，在广东潮汕地区第五期数学奥林匹克教练员培训班讲课. 作者综合历年来所写的讲稿，经过多次修改与充实，编成了这本《奥林匹克数学方法选讲》. 作者希望本书对中学生、大学生、中学数学教师以及青年业余数学爱好者都会有所帮助：既可拓展数学知识视野，又能提高数学解题能力.

由于作者的水平所限，书中难免有不妥之处，尚深望读者不吝批评指正.

黄国勋

2003年6月于广西大学

目　　录

一、奇偶性分析与不变性分析

可以把全体整数分为两大类，一类是奇数，一类是偶数. 一个整数，必定或是奇数，或是偶数，不能既是奇数又是偶数. 同奇偶的两个整数之和是偶数，不同奇偶的两个整数之和是奇数；奇数个奇数之和是奇数，偶数个奇数之和是偶数. 应用这些众所周知的简单事实来分析、解决数学问题的方法，叫做**奇偶性分析**.

在存在性问题的证明中，常应用奇偶性分析方法. 比如，著名的哥尼斯堡七桥问题，1736 年欧拉(L. Euler)就是应用奇偶性分析的方法，证明了：不存在能够走遍这样的七座桥而且每座桥恰好经过一次的遍历路线.

采用奇偶性分析的方法来证明某种结构不存在，通常是先假定这种结构存在，进而论证这种结构的某一种数量表征从这一角度看应是奇数，而从另一角度看应是偶数，由此导出矛盾，最终推翻该结构存在的假定.

下题是 1943 年匈牙利数学奥林匹克试题. 匈牙利数学奥林匹克始于 1894 年.

【例 1】 开学时，某班级同学们互相握手致意. 证明：与奇数位同学握过手的人，有偶数位.

证明 假设该班级有 n 名学生，有 m 对同学握过手. 与奇数位学生握过手的学生记为 $A_1, A_2, \cdots, A_p$，并分别以 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 表示与该学生握过手的人数；与偶数位学生握过手的学生记为 $B_1, B_2, \cdots, B_q$，并分别以 $b_1, b_2, \cdots, b_q$ 表示与该学生握过手的人数. 因为每一次握手都有两名学生，所以

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_q) = 2m,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 都是奇数，$b_1, b_2, \cdots, b_q$ 都是偶数. 如果 p 是奇

数，那么，下式

$$a_1+a_2+\cdots+a_p=2m-(b_1+b_2+\cdots+b_q)$$

的左边是奇数个奇数之和，是奇数；而右边是若干个偶数之和，是偶数，这不可能. 这就证明了 p 是偶数. □

下题是 1971 年美国普特南数学奥林匹克试题. 普特南(W. L. Putnam)曾任哈佛大学校长，他逝世后留下一笔基金. 在普特南基金赞助下，普特南数学奥林匹克自 1938 年开始，由美国数学学会主办，每年的 11 月或 12 月举行，有来自美国和加拿大的几百所高等院校的数百个大学生代表队参加，每队 3 人. 所以，美国普特南数学奥林匹克也叫做美国大学生数学奥林匹克. 普特南数学奥林匹克的试题由著名数学家组成的命题委员会制订，试题讲究技巧，富有独创性.

【例 2】 在三维欧氏空间任意给定九个格点(坐标皆为整数的点)，证明：从中可以找到这样的两个点，联结这两点的线段上还有另外的格点.

证明 因为格点的坐标都是整数，所以可以把空间中的全部格点按其坐标的奇偶性分为下面的八类：

(奇，奇，奇)，(奇，奇，偶)，(奇，偶，奇)，(奇，偶，偶)，

(偶，奇，奇)，(偶，奇，偶)，(偶，偶，奇)，(偶，偶，偶).

因此，在给定的九个格点中，必有某两个格点属于同一类. 设这两个格点为(a_1, b_1, c_1)，(a_2, b_2, c_2). 这两点的联线的中点的坐标(a, b, c)是

$$a=\frac{1}{2}(a_1+a_2),\quad b=\frac{1}{2}(b_1+b_2),\quad c=\frac{1}{2}(c_1+c_2).$$

因为这两个格点属于同一类，即 a_1 与 a_2，b_1 与 b_2，c_1 与 c_2 具有相同的奇偶性，两个同奇偶性的整数之和是偶数，所以 a, b, c 是整数，这就证明了中点(a, b, c)是格点. □

下题是 1977 年国际数学奥林匹克预选题，由罗马尼亚提供. 国际数学奥林匹克(IMO)始于 1959 年，是罗马尼亚创议，首届在布加勒斯特举行. 起初只有东欧几个国家参加，后来芬兰、法国、英国、意大利、

瑞典、荷兰等国陆续加入，至今已成为名副其实的国际性数学奥林匹克. 国际数学奥林匹克每年的试题由参赛国提供，为公正起见，当年的东道国不提供试题. 东道国的选题委员会先从各参赛国提供的预选题中筛选出若干道题，提交给当年的主试委员会. 主试委员会最后确定六道题作为奥林匹克试题，并安排在两天内考试，每天考三道题，每次时间为 4 小时 30 分钟.

【例 3】 在三维欧氏空间任意给定 37 个格点，其中任意三点不共线. 证明：从中可以找到这样的三个点，使得以它们为顶点的三角形的三条中线的交点（重心）也是格点.

证明 设(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3)是空间中三个不共线的点. 以这三个点为顶点的三角形的重心坐标(x, y, z)为

$$x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),$$

$$z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3).$$

为了使(x, y, z)是格点，必须有 $x_1+x_2+x_3$，$y_1+y_2+y_3$，$z_1+z_2+z_3$ 都被 3 整除. 用同余式的记号表示，即是

$$x_1+x_2+x_3\equiv 0 \pmod 3,$$
$$y_1+y_2+y_3\equiv 0 \pmod 3,$$
$$z_1+z_2+z_3\equiv 0 \pmod 3.$$

记号 $m\equiv k \pmod n$表示 $n\mid(m-k)$，这里 k 可以是 m 被 n 除的余数.

把所有的整数按被 3 除的余数为 0，1，2，分为下述三类：

$$0 \pmod 3,\qquad 1 \pmod 3,\qquad 2 \pmod 3.$$

先看 37 个格点的第一个坐标数. 它们分属于 $0 \pmod 3$，$1 \pmod 3$，$2 \pmod 3$，因而其中必有某 13 个格点其第一个坐标数同属于某个同余类. 再看这 13 个格点的第二个坐标数，它们分属于 $0 \pmod 3$，$1 \pmod 3$，$2 \pmod 3$，因而其中必有某 5 个格点其第二个坐标数同属于某个同余类. 继续看这 5 个格点的第三个坐标数，如果其中有某

3 个格点的第三个坐标数分属 0(mod 3)，1(mod 3)，2(mod 3)，则这 3 个格点符合要求；否则，其中必有某 3 个格点的第三个坐标数同属某个同余类，则这 3 个格点也符合要求. □

例 3 的证明采用了同余类技巧，是奇偶性分析的自然推广. 1977 年国际数学奥林匹克还有另一道预选题，与例 3 的解法一样，可采用同余类(模 3 同余)技巧. 这道题是越南提供的：在直角坐标平面上有 n 个格点，$n\geqslant 3$，其中任意三点都构成一个三角形，而且其重心不是格点. 求符合上述要求的最大点数 n.

下题是 2000 年国际数学奥林匹克试题，也是采用同余类分析技巧来解的.

【例 4】 100 张卡片上分别写有数字 *1* 到 *100*. 一位魔术师把这 100 张卡片放入颜色分别是红色、白色、蓝色的三个盒子里，每个盒子里至少放入了一张卡片.

一位观众从三个盒子中挑出两个，并从中各选取一张卡片，然后宣布这两张卡片上的两个数的和数. 魔术师知道这个和数之后，便能够指出哪一个是没有被观众取出卡片的盒子.

问共有多少种放卡片的方法，使得这个魔术总能够成功？(两种方法被认为是不同的，如果至少有一张卡片被放入不同颜色的盒子.)

答 共有 12 种.

分析 “复杂问题简单化”. $n=100$，太大. 先从 $n=3, 4, 5$ 开始，寻找解题的关键与思路.

为简便起见，将整数 i 的卡片所放入的盒子的颜色定义为该整数的颜色，以 r, w, b 依次代表红色、白色、蓝色. 如下的排列

$$r\ w\ b\ b\ w\ r\ b\ w$$

表示数 *1*，*2*，*3*，*4*，*5*，*6*，*7*，*8* 依次是红色、白色、蓝色、蓝色、白色、红色、蓝色、白色，即自左至右算，排在第 i 位的字母(r, w, b)表示数 i 的颜色.

当 $n=3$ 时，因为每盒不空，所以红色、白色、蓝色各有一个数，其排列方式(即 3 张卡片的放法或 3 个数的染色方法)有 $3!=6$ 种：rwb,

rbw, brw, bwr, wrb, wbr. 这 6 种排列方式其实质(对本题而言)是相同的,因此,只要考虑其中的一种排列,比如 rwb,即数 1 是红色,数 2 是白色,数 3 是蓝色. 因为,当从红色盒,白色盒各取一数时,有

$$1+2=3\equiv 0 \pmod 3;$$

当从红色盒、蓝色盒各取一数时,有

$$1+3=4\equiv 1 \pmod 3;$$

当从白色盒、蓝色盒各取一数时,有

$$2+3=5\equiv 2 \pmod 3.$$

这表明,由两数之和关于模 3 的余数可以确定没有从中取出卡片的盒子的颜色:$0 \pmod 3$,是蓝色盒;$1 \pmod 3$,是白色盒;$2 \pmod 3$,是红色盒. 因此,当 $n=3$ 时,使魔术总能成功的放卡片方法有 6 种.

当 $n=4$ 时,因为每盒不空,所以三个盒里的卡片数字为 1,1,2. 其放法总计有 $3P_4^2=36$ 种. 下面以红色的数字有 2 个,白色、蓝色的数各有 1 个为例,有下面 12 种排列方式:

$$rrbw\quad rbrw\quad rbwr\quad brrw\quad brwr\quad bwrr$$
$$rrwb\quad rwrb\quad rwbr\quad wrrb\quad wrbr\quad wbrr$$

其中的 $rwbr$,$rbwr$ 与 $wrrb$,$brrw$ 四种符合魔术师的要求,其余 8 种都不符合要求. 对于 $rwbr$ 的排列,可得到与 $n=3$ 时 rwb 排列的相同结论:两数之和$\equiv 0, 1, 2 \pmod 3$表明没有取出卡片的盒子依次是蓝色盒、白色盒、红色盒. 对于 $wrrb$ 的排列,易知当取出的两数之和等于 5 时,没有从中取卡片的盒子是红色盒;当取出的两数之和$\leqslant 4$ 时,没有从中取卡片的盒子是蓝色盒;当取出的两数之和$\geqslant 6$ 时,没有从中取卡片的盒子是白色盒.

对于 $n=5$,可以进行类似的分析,从而得到如下的解题思路. 分为两种情况考虑:存在连续三个数其颜色互不相同;不存在三个连续的数其颜色互不相同.

证明 分两种情形讨论.

情形 1:存在某个 i,数 i,$i+1$,$i+2$ 的颜色互不相同,设其颜色排列为 rwb. 如果放卡片的方法符合魔术师的要求,那么数 $i+3$(若 i

$+3\leqslant 100$)必为 r 色或数 $i-1$(若 $i-1\geqslant 1$)必为 b 色，即出现 $rwbr$ 或 $brwb$ 的排列. 证明如下：设 $i+2<100$. 因为 $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$，所以 $i+3$ 的颜色既不能是 $i+1$ 的颜色 w，也不能是 $i+2$ 的颜色 b，否则，当取出的两数之和等于 $2i+3$ 时，魔术师无法作出绝对准确的判断，所以 $i+3$ 的颜色只能是 r 色. 设 $i>1$. 同理可以推知，$i-1$ 的颜色只能是 b 色. 因此，符合魔术师要求的排列只可能是下述 6 种：三种不同的颜色按 rwb，rbw，wrb，wbr，brw，bwr 之中的某一种，比如是按 rwb 的模式反复出现：

$$r\ w\ b\ r\ w\ b\ r\ w\ b\ \cdots r\ w\ b\ r$$

上述 *1* 至 *100* 的 100 个数字的排列符合魔术师的要求：当两数之和 $\equiv 0 \pmod 3$ 时，没有从中取卡片的盒子是蓝色盒；当两数之和 $\equiv 1 \pmod 3$ 时，没有从中取卡片的盒子是白色盒；当两数之和 $\equiv 2 \pmod 3$ 时，没有从中取卡片的盒子是红色盒.

情形 2：不存在三个连续的数其颜色互不相同. 设 *1* 是 r 色，令 i 为最小的不是 r 色的数，并不妨设 i 是 w 色；设 k 为最小的 b 色的数，并不妨设 $i<k$. 因为 $i-1$ 是 r 色，i 是 w 色，所以 $i+1$ 不是 b 色，即有 $i+1<k$.

先证明 $k=100$. 如果 $k<100$，因为 $i+k=(i-1)+(k+1)$，如果 $k+1$ 是 b 色或 w 色，则当取出的两数之和等于 $i+k$ 时，魔术师无法作出绝对正确的判断，因此，$k+1$ 只能是 r 色. 但是，$i+(k+1)=(i+1)+k$，若 $i+1$ 不是 b 色，则当取出的两数之和等于 $i+k+1$ 时，魔术师无法作出绝对正确的判断，因此有 $k=100$.

再证明，对任意的 $j>1$，j 不是 r 色的. 否则，设有某个 $j>1$ 是 r 色的. 如果 $j=99$ 是 r 色的，因 $i+99=(i-1)+100$，则当取出的两数之和等于 $i+99$ 时，魔术师无法作出绝对正确的判断，所以 *99* 不是 r 色的，从而 *99* 只能是 w 色的. 因为 $j+99=(j-1)+100$，所以若 $j-1$ 不是 b 色，则当取出的两数之和等于 $j+99$ 时，魔术师无法作出绝对正确的判断，所以 $j-1$ 只能与 *100* 同色，即为 b 色，这与只有 *100* 是 b 色的已知结论矛盾. 这表明，只有数 *1* 是 r 色的. 于是得到，数 *1*，*2*，

3, …, 98, 99, 100 的颜色如下排列：$rwv \cdots wvb$. 下面证明，这种排列符合魔术师的要求，他可以作出如下绝对正确的判断：当所取出的两数之和<101 时，没有从中取卡片的盒子是蓝色的；当所取出的两数之和=101 时，没有从中取卡片的盒子是白色的；当所取出的两数之和>101 时，没有从中取卡片的盒子是红色的. 因为，$rw\cdots wb$, $rb\cdots bw$, $br\cdots rw$, $bw\cdots wr$, $wr\cdots rb$, $wb\cdots br$ 都符合要求，即共有 6 种.

总之，共有 12 种放卡片的方法使魔术师能够作出绝对正确的判断. □

下题是 1970 年国际数学奥林匹克试题.

【例 5】 求满足下述性质的自然数 n：集合 $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ 可以分为 A, B 两组，使得 A 中各数的乘积与 B 中各数的乘积相等.

解 设 n 是满足题中要求的自然数，A 与 B 是符合题中要求的分组，即 A 中各数的乘积与 B 中各数的乘积相等，不妨设此积数为

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m},$$

其中 p_1, p_2, …, p_m 是 a 的素因子. 因此，如果 A 中有某个数 $n+k$ 含有素因子 p_i，则 B 中必有某个数 $n+j$ 也含有素因子 p_i. 因 $k\neq j$，故可设 $k>j$. 因为 $n+k$ 与 $n+j$ 都含有素因子 p_i，所以 p_i 整除 $(n+k)-(n+j)=k-j$. 因为 $1\leqslant k-j\leqslant 5$，所以 p_i 只能是 2, 3, 5. 但是，$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 这四个数中若有某一个数含有素因子 5，则 n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$ 这六个数中只可能有一个数含有素因子 5，与上面已知的结论矛盾. 因此，$n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ 这四个数，它们的素因数只能是 2 与 3；这四个数恰有两个奇数两个偶数，而奇数不可能含素因子 2，即这两个奇数分别是 $b=3^\alpha$ 与 $c=3^\beta$；因为 $b-c=2$（设 $b>c$），所以 $3^\alpha-3^\beta=2$. 但是，$3^\alpha-3^\beta\neq 0$，且是 3 的倍数，故有 $3^\alpha-3^\beta>2$，与 $3^\alpha-3^\beta=2$ 矛盾. 这表明，满足题中要求的 n 不存在. □

1990 年墨西哥提供给国际数学奥林匹克的一道预选题，可以看作是上例的延伸：把乘积数改为和数，把 n 改为 1990，把 5 改为 k. 这道

题目是：求正整数 k，使得集合 $\{1\,990, 1\,990+1, \cdots, 1\,990+k\}$ 能够分成两个不相交的子集 A 与 B，使得 A 中各数之和与 B 中各数之和相等. 本题的答案是：$k\equiv 0 \pmod 4$ 且 $k\geqslant 92$，或者 $k\equiv 3 \pmod 4$. 所采用的方法是奇偶性分析的推广，即采用同余类技巧(模 4 同余).

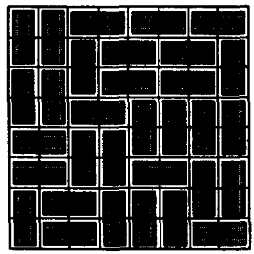


图 1-1

8×8 棋盘用 32 张多米诺(Domino)骨牌(即 1×2 骨牌)完全覆盖(骨牌不重叠、不伸出棋盘外)，比如图 1-1 所示，可以使得沿任意一条格子线把棋盘剪成两部分时，都一定会剪断某些骨牌. 对于 6×6 棋盘，情况如何呢？下题是 1963 年全俄数学奥林匹克试题. 全俄数学奥林匹克，是原苏联加盟共和国一级的数学奥林匹克. 全俄数学奥林匹克每年举办一次，分为八年级、九年级、十年级三组进行.

【例 6】 在 6×6 棋盘上，用 18 张多米诺骨牌完全覆盖. 证明：对于任意一种覆盖方式，都可以找到一条水平的，或者竖直的格子线，沿这条格子线把棋盘剪成两个部分时不会剪断任何一张骨牌.

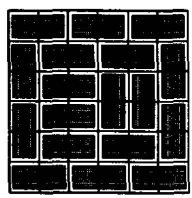


图 1-2

证明 沿某条格子线把 6×6 棋盘剪成为两个部分，如果有某些骨牌被剪断的话，那么，被剪断的骨牌不可能是奇数张，否则，两部分的小方格数都必是奇数，这对 6×6 棋盘是不会出现的. 假若存在一种覆盖方式，使得沿任意一条格子线把 6×6 棋盘剪成两部分时，都会剪断某些骨牌，那么，因为剪断的骨牌不会是奇数张，所以至少被剪断 2 张. 6×6 棋盘有 10 条格子线，而每张骨牌都恰好能被一条格子线剪断，因此，覆盖这 6×6 棋盘的多米诺骨牌至少有 $2\times 10=20$ 张. 这与 6×6 棋盘被 18 张多米诺骨牌完全覆盖的事实矛盾. □

例如，在图 1-2 中，沿第 1 条水平格子线不会剪断骨牌.

下题是 1986 年中国数学奥林匹克试题.

【例 7】 能否把 1, 1, 2, 2, ⋯ ,1 986, 1 986 这些数排成一行，使

得两个 1 之间夹着一个数，两个 2 之间夹着两个数，…，两个 1 986 之间夹着一千九百八十六个数？请证明你的结论.

解 不可能. 假若这 $2\times1\,986=3\,972$ 个数能按题中要求排成一行

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{3972}.$$

因为两个奇数 $2k+1$，$2k+1$ 中间夹着 $2k+1$ 个数，所以这两个奇数在上述的排列中，或是都排在奇数号位上，或是都排在偶数号位上；因为两个偶数 $2k$，$2k$ 中间夹着 $2k$ 个数，所以这两个偶数在上述的排列中，有一个排在奇数号位上，而另一个排在偶数号位上. 在 $2\times1\,986$ 个位置中，奇数号位置与偶数号位置各占一半，即各有 1 986 个.

现在考虑这 1 986 个奇数号位置. 从上面的分析可知，排在奇数号位置上的任意一个奇数必然成对地出现，所以有偶数个（设为 $2m$ 个）奇数排在奇数号位置上；而排在奇数号位置上的偶数恰好有 993 个：2，4，6，…，1 986. 因此，有

$$2m+993=1\,986.$$

这不可能. 这表明，符合题中要求的排法不存在. □

上题是前苏联提供的国际数学奥林匹克预选题的特款. 前苏联 1982 年提供下述预选试题：求所有具有下述性质的自然数 n，能够把 $2n$ 个数 1，1，2，2，3，3，…，n，n 排成一行，使得当 $k=1,2,3,\cdots,n$ 时，在两个 k 之间恰有 k 个数.

此题的答案是：$n=4m$ 或 $n=4m-1$，其中 m 是自然数. 比如 231213，23421314.

前苏联提出的这道国际数学奥林匹克 1982 年的预选题虽然未被选上，但其特款被中国数学奥林匹克选为 1986 年的试题，后来，又经改造，成为 1992 年加拿大数学奥林匹克的试题：一副牌有 $2n+1$ 张，其中一张“王”，而 1，2，…，n 各两张. 把这 $2n+1$ 张牌排成一行，使得“王”在正中央，且对每个 k，$k=1,2,\cdots,n$，两个 k 之间恰有 $k-1$ 张牌. 问：当 $n\leqslant10$ 时，对怎样的 n，上述安排是可能的？对怎样的 n，上述安排是不可能的？此题的答案是：当 $\frac{3}{2}n(n+1)$ 是奇数时，