●祝同江 胡建兰 编

工程数学

积分变换

学习指导与例题分析

兵器工业出版社

工程数学　积分变换
学习指导与例题分析

祝同江　胡建兰　编

兵器工业出版社

内容简介

本书内容共分三章：Fourier 变换、Laplace 变换，以及卷积定理和积分变换的应用。为了指导读者深入理解有关概念及解题方法，本书针对课程中出现的问题进行了详细说明，给出了大量的复习思考题与例题进行深入分析讨论。其中许多定理与结论的论述是作者在学术及教学方面的研究成果。

本书适合理科及工科大学数学基础课的有关师生阅读，也可供高职高专师生及工程技术人员在学习积分变换时参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 积分变换学习指导与例题分析 / 祝同江，胡建兰编．—北京：兵器工业出版社，2002.8
ISBN 7-80172-071-7

Ⅰ．工… Ⅱ．①祝…②胡… Ⅲ．①工程数学—高等学校—教学参考资料②积分变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 062758 号

出版发行：兵器工业出版社
责任编辑：张小洁
责任技编：魏丽华
社　　址：100089　北京市海淀区车道沟 10 号
经　　销：各地新华书店
印　　刷：兵器工业出版社印刷厂
版　　次：2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1—3050
封面设计：底晓娟
责任校对：王绛　仝静
责任印制：莫丽珠
开　　本：850×1168　1/32
印　　张：7.625
字　　数：193.26 千字
定　　价：10.00 元

前　　言

积分变换的理论和方法在自动控制、电子与信息工程及机电工程等现代科学技术中有广泛的应用。许多高等学校把它作为一门必修的基础课。它是学习有关专业课及数学物理方程等课程的理论基础和重要工具。

该课程所涉及到的基础知识非常广泛。它不仅需要把高等数学、复变函数中的许多积分公式及理论推广到含复参数的反常积分以及主值意义下反常积分的情形，而且还涉及到许多数学教师及工程技术人员不熟悉的广义函数的概念及有关理论。可是许多高等学校分配给该课程的计划学时数很少，而且没有开设习题课。为了指导有关读者深入理解该课程的有关理论，进一步掌握其解题方法，针对一般读者在学习中经常出现的问题或错误，本书前后共给出了 50 多个基本概念、公式及复习思考题。每个思考题后面都附有详细的说明及答案，且将所精选的 250 多个习题划分成 70 个类型并分别给出了其解法说明，还对其不同的解法进行了比较分析。

按照国家教委 1987 年批准印发的《积分变换课程教学基本要求》，本书各章第一节首先列出了对该章内容的基本要求，以便读者复习时参考。超出基本要求的定理、公式、例题及其解法或说明都标以“ * ”号。这些加“ * ”号的内容可供该课程计划学时多于 18 学时的专业选用，也可供有关科学技术人员学习时参考。

北京理工大学应用数学系和教材科，以及北京工业大学应用数理学院的许多教师对本书的编写提出了许多宝贵的建议或意见，对他们的大力支持在此表示衷心感谢。

编　者

2002年2月　于北京

目　录

第一章　Fourier 变换

本章基本要求

1. 正确理解 Fourier 变换及其逆变换的定义，会用该定义求 Fourier 变换及逆变换.

2. 正确理解并且记住 Fourier 变换的线性性质、微分性质和位移性质，以及 δ 函数、单位阶跃函数(即 Heaviside 函数)和函数 1 的 Fourier 变换，及其有关等式. 掌握利用这些性质和已知的 Fourier 变换求常见函数的 Fourier 变换及其逆变换的方法.

3. 正确理解 Fourier 积分定理和在 Fourier 变换中两个函数相等的概念，会利用该定理求所给函数的 Fourier 积分展开式，会用它来证明某些反常积分的等式. 知道 Fourier 变换中所用积分为在主值意义下的反常积分，以及这种积分与普通反常积分的区别与联系.

第一节　Fourier 积分和 Fourier 变换的概念

一、基本概念、定理及公式

1. 主值意义下反常积分的定义

设函数 $f(t)$ 在实轴的任何有限区间上可积. 所谓在主值(Principal Value)意义下 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 的反常积分收敛是指极限

$$\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

存在，其积分值为其极限值，这时也称 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 是主

值意义下可积；否则称它在区间$(-\infty,\infty)$是主值意义下不可积，其积分发散．为了简便，该积分简记为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.1a}$$

其中$f(t)$是实变复值函数(包含实变实值函数的情形)．在Fourier变换中所用到的在区间$(-\infty,\infty)$的积分都可看作在主值意义下的反常积分．

说明 式(1.1.1a)中$f(t)=u(t)+\mathrm{j}v(t)$在对称区间$[-R,R]$上的积分，可分实、虚部分别计算其积分值；也可将其中虚数单位j看作普通常数($\mathrm{j}^2=-1$)，直接利用高等数学中介绍过的定积分的变量替换公式、分部积分公式，求出其原函数，然后用代入上、下限的方法计算其积分值．

在高等数学中，实变实值函数$f(t)=u(t)$在区间$(-\infty,\infty)$的积分，其定义为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.1.1b}$$

该式左端积分收敛的充要条件是其右端两个反常积分都收敛，其中a可以取值$-R$，也可以取其它可能值趋向$-\infty$．因此定义式(1.1.1)中的极限只是定义式(1.1.1b)中极限的特殊情形．另外定义式(1.1.1b)也可以推广到实变复值函数$f(t)=u(t)+\mathrm{i}v(t)$的情形，这时有下面结论成立．

两种反常积分之间的联系和区别可叙述为：若函数$f(t)=u(t)+\mathrm{j}v(t)$在$(-\infty,\infty)$的反常积分(1.1.1b)收敛，则它在主值意义下的反常积分(1.1.1)也收敛，并且其积分值相等；反之不真．并且当$f(t)$为在任何有限区间上可积的奇函数时，在主值意义下的积分式(1.1.1)一定收敛，且其积分值为零，可是它的反常积分(1.1.1b)不一定收敛．如在式(1.1.1b)中取$f(t)=\sin t$，该式中右边的两个反常积分都发散，从而左边的反常积分也发散．

2. Fourier 积分定理和 Fourier 变换的概念

定理(Fourier 积分定理)　若函数 $f(t)$满足下列两个条件:

1° $f(t)$在实轴的任何有限区间$[a,b]$上满足 Dirichlet 条件,即 $f(t)$在$[a,b]$上连续或有有限个第一类间断点,且至多有有限个极值点;

2° $|f(t)|$在区间$(-\infty,\infty)$的反常积分收敛.

则对任何实数 ω,积分

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x \tag{1.1.2}$$

收敛,且对任何实数 t 有

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.3}$$

把式(1.1.2)代入(1.1.3)直接得到

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.3a}$$

该式还可以改写成三角形式

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos[(x-t)\omega]\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.3b}$$

在 $f(t)$的连续点 t 处,最后三个等式可简化为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{1.1.4}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{1.1.4a}$$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos[(x-t)\omega]\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.4b}$$

说明　最后这三个等式都可看作函数$f(t)$的 Fourier 积分展开式,其中式(1.1.4)或(1.1.4a)是该积分的复指数形式,式(1.1.4b)是它的三角形式.另外,该定理表明,若不考虑函数在间

断点处的取值，则式(1.1.2)和(1.1.4)中的 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 将是一一对应的．于是我们定义：

定义 若在某种条件下(如在 Fourier 积分定理条件下)式(1.1.2)和(1.1.4)都有意义，则称(1.1.2)为 $f(t)$ 的 Fourier 变换式，其中函数 $F(\omega)$ 为 $f(t)$ 的 Fourier 变换，也称为 $f(t)$ 的象函数，记为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$；反之，称式(1.1.4)为 $F(\omega)$ 的 Fourier 逆变换式，记为 $f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$．其中 $f(t)$ 为 $F(\omega)$ 的 Fourier 逆变换，也称为 $F(\omega)$ 的象原函数．

实际应用中，积分式(1.1.2)和(1.1.4)对许多普通函数都是不收敛的，必须推广函数的概念到广义函数(见本章第二节)，使上述许多不收敛的积分都有意义，如 Fourier 变换 $\mathscr{F}[1]$ 及逆变换式 $\mathscr{F}^{-1}[1]$ 等都需要用广义函数来表示．为了保证 Fourier 变换中的象函数与象原函数之间在所有上述情况下是一一对应的，应当重新给出两个函数相等的概念．

规定：两个函数的 Fourier 变换相等或它们的 Fourier 逆变换相等，则称它们在 Fourier 变换中相等，即在 Fourier 变换意义下为同一个函数．

这时 $f(t)$ 与其象函数 $F(\omega)$ 是一一对应的，称它们构成了一个Fourier 变换对，记为

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega) \tag{1.1.5}$$

二、复习思考题

1．反常积分 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都发散，是否一定可推出 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上主值意义下的反常积分也发散？

答案 不一定，如 $\int_{-\infty}^{0} \sin x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{0}^{\infty} \sin x\mathrm{d}x$ 都发散，可是它在 $(-\infty,\infty)$ 上主值意义下的积分收敛，且其积分值为零．

2．设函数 $f(t)=\begin{cases} n, t=n(\text{整数}) \\ 0, \text{其它} \end{cases}$，$g(t)=\begin{cases} 1, t=0 \\ 0, t\neq 0 \end{cases}$，则有

$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[g(t)]=0$,这与 Fourier 变换定义中象函数与其象原函之间的一一对应关系矛盾吗？为什么？

答案 不矛盾.因为按 Fourier 变换中对两个函数相等概念的新规定有 $f(t)=g(t)=0$.

3. 若 $f(x)$为在任何有限区间上可积的奇函数,则它在 $(-\infty,\infty)$上主值意义下的反常积分一定收敛且积分值为零,为什么？

答案 因奇函数在对称区间$[-R,R]$上的积分值为零,其极限也为零($R\to\infty$).

4. 若 $f(t)$为偶函数且在$[0,\infty)$上的积分值为 L,则 $f(t)$在区间$(-\infty,\infty)$上主值意义下的积分值为 $2L$,为什么？

答案 由偶函数在对称区间$[-R,R]$上的积分性质和函数在主值意义下反常积分的定义,可知结论成立.

5. 式(1.1.4)、(1.1.4a)及(1.1.4b)在 $f(t)$的连续点 t 处成立,对其间断点处右端积分值等于什么？

答案 $[f(t+0)+f(t-0)]/2$.

三、典型例题分析

例 1 已知积分等式(其证明为“*”号内容,见书末附录 A) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x=\sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}}e^{-\alpha^2/(4\beta)}$ ($\beta>0$,α 为任意实常数),

求$F(\omega)=\mathscr{F}[e^{-t^2}]$及 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$.

解法说明 $f(x)=e^{-\beta x^2}$在工程技术上称为钟形脉冲函数($\beta>0$).解这类问题可用定义,计算式(1.1.2)及(1.1.4)右端的积分就可求出.只须注意在积分过程中除积分变量外,其它变量(为参变量)都看作常数.

解 在已知等式中令 $\beta=1$,利用奇、偶函数的积分性质可得

$$F(\omega)=\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cos(\omega t)dt = \sqrt{\pi}\, e^{-\omega^2/4} \quad (|\omega| < \infty).$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4} e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4}\cos(\omega t)d\omega,$$

在已知积分等式中取 $\beta=1/4$，$\alpha=t$，积为变量改写为 ω，则有

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{4\pi}e^{-t^2} = e^{-t^2}.$$

例 2 工程技术中称函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, t \geqslant 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases} \quad (其中 \beta > 0)$$

为单边指数衰减函数. 试求 $\mathscr{F}[f(t)]$，并且利用 Fourier 积分定理证明积分等式：

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta\cos\omega + \omega\sin\omega}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \pi/e^{\beta}$$

解法说明 这类问题首先应当验证所给函数 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理的条件，然后求出 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，并且代入式(1.1.3)中推出所证明的等式.

解 由于 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理的条件，并且当 $t\to\infty$ 时有 $|e^{-\beta t-j\omega t}|=e^{-\beta t}\to 0(\beta>0)$，因此积分之可得

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{-1}{\beta+j\omega}e^{-(\beta+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\beta+j\omega},$$

且代入式(1.1.3)中可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta+j\omega}e^{j\omega t}d\omega = \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2},即$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta-\mathrm{j}\omega}{\beta^2+\omega^2}[\cos(\omega t)+\mathrm{j}\sin(\omega t)]\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, t>0\\0, \quad t<0\\1/2, t=0.\end{cases}$$

利用奇、偶函数的积分性质可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\beta\cos(\omega t)+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\beta t}, t>0\\0, \quad t<0\\1/2, t=0,\end{cases}$$

取 $t=1$，且等式两边同乘以 π，可知要证等式成立.

注意　本例中 $f(0)=1\neq[f(0+0)+f(0-0)]/2$，其中 $f(0+0)=f(0^+)$，$f(0-0)=f(0^-)$分别为 $f(t)$在 $t=0$ 处的右极限及左极限值. 为了保证 $f(t)$与其象函数 $F(\omega)$是一一对应的，考虑到在 Fourier 积分定理条件下，其函数在间断点处的值不影响其积分值，且在可去间断点 t_0 处有$[f(t_0+0)+f(t_0-0)]/2$ 为 $\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$的积分值、也是将 t_0 看作 $f(t)$的连续点的函数值，因此在 Fourier 变换中普通可积函数的可去间断点应当看作连续点，其它间断点处的函数值不必给出（否则会有$[f(t+0)+f(t-0)]/2\neq f(t)$而出现不必要的麻烦).

例3　工程技术中 $u(t-t_0)=\begin{cases}1, t>t_0\\0, t<t_0\end{cases}$ 称之为从 t_0 时刻开始的单位阶跃函数（在数学中也称它为Heaviside 函数，也记为 $\mathrm{H}(t-t_0)$）——本书只用 $u(t-t_0)$来表示该函数.

求 $F(\omega)=\mathscr{F}[u(t)-u(t-2)]$，并且利用 Fourier 积分定理证明著名的 Dirichlet 积分

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}. \tag{1.1.5}$$

解　由 Fourier 变换的定义得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}[u(t)-u(t-2)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{-1}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_0^2=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{\mathrm{j}\omega}$$

$$= 2e^{-j\omega}\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

由于 $f(t)=u(t)-u(t-2)$满足 Fourier 积分定的条件，因此由该定理所给等式(1.1.3)得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j\omega(t-1)}d\omega = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ 或 } t>2 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \text{ 或 } t=2 \\ 1, & 0<t<2, \end{cases}$$

取 $t=1$ 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}d\omega = 1.$$

由奇、偶函数的积分性质，可知所要证明的积分等式成立.

说明 单位阶跃函数是工程技术中最重要的函数之一，许多常见分段定义的普通函数都可用它表示的一个等式给出.

设 $-\infty=t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots<t_n=\infty$，则由 n 个等式给出的分段定义函数 $f(t)=f_k(t)(t_{k-1}<t<t_k, k=1,2,\cdots,n)$可用一个等式表示为

$$f(t) = u[-(t-t_1)]f_1(t) + \sum_{k=2}^{n-1}[u(t-t_{k-1})-u(t-t_k)]\cdot f_k(t) + u(t-t_{n-1})f_n(t) \tag{1.1.6}$$

其中

$$u(-t) = 1-u(t) = \begin{cases} 1, t<0 \\ 0, t>0, \end{cases} \tag{1.1.6a}$$

$$u[-(t-t_1)] = \begin{cases} 1, t<t_1 \\ 0, t>t_1, \end{cases} \tag{1.1.6b}$$

$$u(t-t_{k-1})-u(t-t_k) = \begin{cases} 1, t_{k-1}<t<t_k \\ 0, t<t_{k-1} \text{ 或 } t>t_k. \end{cases} \tag{1.1.6c}$$