浅论整数

朱元森

版社

浅论整数

朱元森

河北人民出版社

一九八一年·石家庄

浅 论 整 数

朱 元 森

河北人民出版社出版（石家庄市北马路19号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　3 5/8 印张　71,500 字　印数：1—3620　1981年10月第1版

1981年10月第1次印刷　统一书号：70086·1054　定价：0.33 元

序

本书是给高中学生和师范院校数学系一二年级学生作为课外读物而编写的。也适合普通中学和中等师范学校教师教学参考。

本书主要讲整数理论的基础知识和应用。前两章介绍整数的整除性理论，对算术中最大公因数、最小公倍数、质因数分解等在理论和方法上作了严密的论述。第三章总结了几类常用的整除判别法，第四章介绍一元一次不定方程解法。为了培养读者解题的技能技巧，书中编写各类例题和习题。

本书经河北师大代数教研室曹佩、朱明高和郭昌芸三位同志审阅。他们并提出了一些宝贵的建议，在此致以谢意。

由于本人水平所限，缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　整数的可除性

第一节　整数的运算

1. 整数

数，1、2、3、4、…n、…，叫做自然数．在自然数范围内，自然数+自然数=自然数，自然数×自然数=自然数，自然数-自然数不一定是自然数，从而引入了零和负数．通常把自然数叫做正整数．而将-1、-2、-3、…、$-n$、…，叫做负整数．所谓整数，就是指正整数，负整数和零．有理数、实数、复数都是从整数扩充而建立起来的．因而整数理论是数学的基础．

注　本书如果没有特别声明用a、b、c、…，或x、y、z、…，或α、β、γ、…表示整数．

在整数范围内，显然

$$整数+整数=整数$$

$$整数-整数=整数$$

$$整数\cdot整数=整数$$

即加、减、乘法在整数范围可以施行运算．

2. 带余除法

对于除法来说，当用一个整数去除另一个整数时，所得结果就不一定是整数．例如，$417\div15$的商是27，还余12．

即 $\frac{417}{15}=27+\frac{12}{15}$，或写作：$417=27\cdot15+12$。

当 $b\neq0$ 时，用 b 去除整数 a 有唯一确定的商和余数吗？这是首先要解决的问题。

定理 1 （带余除法）对于任意的整数 a，$b(b\neq0)$，必存在唯一的一对整数 q，r，使

$$a=bq+r \qquad 0\leqslant r<|b| \tag{1}$$

成立。

证：（一）$b>0$。作整数序列：

$\cdots\cdots$，$-4b$，$-3b$，$-2b$，$-b$，0，$b, 2b, 3b, 4b, \cdots\cdots$

那么，整数 a 必位于上述序列的某两项之间，即是说存在整数 q，使得 $qb\leqslant a<(q+1)b$。令 $r=a-qb$，那么，$0\leqslant r=a-qb<(q+1)b-qb=b$。故存在整数 q，r 满足：$a=bq+r$，且 $0\leqslant r<b$。

其次，证明符合条件（1）的 q，r 只有唯一的一对。假定 q_1，r_1 也满足（1）式。

即 $\qquad a=bq_1+r_1, \qquad 0\leqslant r_1<b$

那么，$\quad bq+r=bq_1+r_1$，$\quad$ 移项得 $\quad b(q-q_1)=r_1-r$。

如果 $q_1\neq q$，那么 $q-q_1$ 就是一个非零整数，

$$b|q-q_1|=|r_1-r|.$$

上式的左端大于 b，而右端 $|r_1-r|<b$ 矛盾．故 $q=q_1$，$r=r_1$，

（二）$b<0$。此时 $|b|=-b$。根据（一）的证明，对 a，$|b|$ 来说存在唯一的一对整数 q'，r 使

$$a=|b|q'+r \qquad 0\leqslant r<|b|$$

即 $\quad a=b(-q')+r$。$\qquad$ 令 $q=-q'$ $\qquad$ 得出：

$$a = bq + r, \qquad\qquad 0 \leqslant r < |b|.$$

因为整数对 q'，r 是唯一确定的，所以 q，r 也是唯一确定的。

定理 1 是整数理论的基础。整数的一些基本性质可从它导出。

$a = bq + r$ 中的商叫做 a 被 b 除的不完全商，r 叫做 a 被 b 除所得的余数。

例 设 $b = 15$。a 分别为 499，-128，求 a 除以 b 的商和余数。

解： 当 $a = 499$ 时，$a = 33b + 4$，

故 $0 < r = 4 < 15, q = 33$。

当 $a = -128$ 时，$a = -9b + 7$，

故 $0 < r = 7 < 15$，$q = -9$。

3. 应用与范例

例 1 设 $a_3a_2a_1$ 是三位数，$a_3 > a_1$，由 $a_3a_2a_1$ 减去 $a_1a_2a_3$ 这个三位数，必得一个三位数 $b_3b_2b_1$，证明恒有：$b_3b_2b_1 + b_1b_2b_3 = 1089$。

证明： 已知 $a_3 > a_1$ 由 $a_3a_2a_1 - a_1a_2a_3 = b_3b_2b_1$

则 $b_1 = 10 + a_1 - a_3$，$\qquad b_2 = 10 + a_2 - 1 - a_2 = 9$，

$b_3 = a_3 - a_1 - 1 > 0$。

故
$$\begin{aligned} b_3b_2b_1 + b_1b_2b_3 &= (a_3 - a_1 - 1)10^2 + 90 + (10 + a_1 - a_3) \\ &\quad + (10 + a_1 - a_3)10^2 + 90 + (a_3 - a_1 - 1) \\ &= 9\cdot 10^2 + 180 + 9 \\ &= 10\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

例 2 下面是一个八位数除以三位数的算式：

```
              × × 8 × ×
× × × ) × × × × × × × ×
          × × ×
        ---------------
            × × × ×
              × × ×
              ---------
                × × × ×
                × × × ×
                -------
                      0
```

求除数和被除数。

解：设 d 为除数，由算式知 $8d=\times\times\times$ 是三位数，因此，$8d<1000$，即 $d<125$。而商的末位数字乘 d 是四位数字，故商的末位数字必为 9。再由算式，商的第一位数字（设为 a）乘 d 是三位数字，则 $a<9$；如果 $a\leqslant 7$，那么 $ad<125\times 7=875$，而算式中被除数前四位数 $\geqslant 1000$，故被除数的前四位 $-ad>1000-875=125$，此与算式中余数是两位数相矛盾。所以，商的首位 $a=8$。从算式知商为 80809。又因被除数 $\geqslant 10000000$，故 $80809\times d\geqslant 10,000,000$ 即 $d\geqslant 124$。于是，除数 $d=124$。被除数 $=80809\times 124=10020316$。

例 3 求证：$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$。

证：用数学归纳法证明，

当 $n=1$ 时，等式显然成立。

归纳假定 $n=k$ 时，等式成立

即 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1)$。

现证对 $n=k+1$ 时也成立。事实上

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2 \qquad \text{（由归纳假定）}$$

$$=\frac{1}{3}[k(4k^2-1)+3(4k^2+4k+1)]$$

$$=\frac{1}{3}[(k+1)(4k^2-1)-(4k^2-1)+12k^2+12k+3]$$

$$=\frac{1}{3}[(k+1)(4k^2-1)+8k^2+12k+4]$$

$$=\frac{1}{3}[(k+1)(4k^2-1)+4(k+1)(2k+1)]$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(4k^2-1+8k+4)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1]$$

故 $n=k+1$ 时等式也成立。所以对一切自然数来说等式均成立。

例 4 求证：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证：此例可用数学归纳法证明，下面介绍另一种方法。

因为：$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

而

$$1^3=1;$$

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1;$$

$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1;$$

$$4^3=(3+1)^3=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1.$$

两端相加，消去相同项得：

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+n,$$

即 $$3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=(n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right].$$

故 $$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

练 习 一

1．用数字 x 和 y 写出两个二位数字，并证明它们的和等于 $11(x+y)$。

2．如果比 n 个连续整数的和大 100 的数，等于其次 n 个连续整数的和，求 n。（答：$n=100$.）

3．等差数列之第三项为 35，第五项为 55，问用何数除其前五项之和，才能使所得之商较除数少 7 而余数为商之半？（答：17。）

4．求证：任两个平方和的平方是另两数的平方和。

5．求证：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

6．求 $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2$ 的和。

$$\left(答：\quad \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1).\right)$$

7．求证：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

$$=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2.$$

［提示：用数学归纳法，或仿例 4 的方法，考虑 $(k+1)^4$ 展开式。

8．求证：$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$.

［提示：考虑 $(k+1)^5$ 展开式或仿例 4 之法，或数学归纳法．］

9．求证：对任意给定的正整数 n，必存在有唯一的一对整数 R、

l 满足 $0 \leqslant l < R$ 使得:

$$n=\frac{1}{2}R(R-1)+l.$$

第二节 整除的性质

1. 整除的概念

由定理 1 任两整数 a,b。当 $b \neq 0$ 时，有:

$$a=bq+r \qquad (0 \leqslant r < |b|) \qquad (1)$$

这个余数 r 一般未必为零。 但当 $r=0$ 〔如 $-36=6\times(-6)$, $28=(-4)\times(-7)$〕(1) 式就变为 $a=bq$. 这时 q 就是 a 被 b 除的完全商或说 b 能整除 a。

定义 1 设 a、b 是整数，$b \neq 0$ 若存在整数 q，使得 $a=bq$，我们就说，b 能整除 a 或 a 能被 b 整除. 记作 $b|a$.

如果不存在整数 q，就说 b 不能整除 a，或 a 不能被 b 整除。记作 $b\nmid a$.

比如，$6|(-36)$，$-4|28$，就是整除的例子。$3\nmid 7$，$-6\nmid 25$，是不能整除的例子。

注意：整除符号"|"与分数线"—"，是意义不同的两个符号，不要混为一谈。

定义 2 若 $b|a$，a 就叫做 b 的倍数，或 b 叫做 a 的因数（约数）。

例如 $168=24\cdot 7$，所以 24，7 是 168 的因数而 168 是 24 和 7 的倍数。

显然，数零不是任何一个数的因数。因为任何一个数与

零的乘积都等于零．但数零是任何不等于零的数的倍数．

2．整除的基本性质

性质1 如果 $a|b$、 $b|c$、则 $a|c$．换言之，a 是 b 的因数，b 是 c 的因数，则 a 是 c 的因数．(即整除具有传递性)

证： 因为 $a|b$， $b|c$，那么，一定存在整数 q_1、q_2，使得 $b=aq_1$，$c=bq_2$，因此，$c=bq_2=(aq_1)q_2=a(q_1q_2)$，且 q_1q_2 仍为整数，故 $a|c$．|

性质2 若 $m|a$，$m|b$，那么，$m|a\pm b$．

证： 若 $m|a$， $m|b$，必存在整数 q_1，q_2，使得 $a=mq_1$，$b=mq_2$．故 $a\pm b=mq_1\pm mq_2=m(q_1\pm q_2)$，且 $q_1\pm q_2$ 也是整数，因此 $m|a\pm b$．|

性质3 若 $m|a$，那么对任何整数 x 来说 $m|ax$．

事实上，因 $m|a$，又 $a|ax$，那么 $m|ax$．|

这个性质告诉我们，如果 m 是 a 的因数，则 m 也是 0，$\pm a$，$\pm 2a$，$\pm 3a$，…这些数的因数．

根据性质2，性质3得出

推论 若 $m|b_1$，$m|b_2$，x_1，x_2 为任意整数，则 $m|b_1x_1+b_2x_2$．|

这个事实还可推广到任意多个情况，若 $m|b_1$，$m|b_2$，…，$m|b_n$．而 x_1，x_2，…，x_n 为任意整数，

则：
$$m|(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n)．$$

性质4 若 $m|a$，$c\neq 0$，则 $mc|ac$．反之，若 $mc|ac$，则 $m|a$．

证： 若 $m|a$ 则一定存在整数 q 使得 $a=mq$，两端乘以 c 有 $ac=(mc)q$，故 $mc|ac$．

反之，若 $mc \mid ac$，则$mc \neq 0$，因此，$m \neq 0$。$c \neq 0$，又因有整数 q 使得 $ac = mcq$，得 $a = mq$，故 $m \mid a$.|

根据性质 4，若 $m \mid a$，当取 $c = -1$，就有 $-m \mid -a$. 再由性质 3，$-m \mid (-ax)$，若令 $x = -1$，那么 $-m \mid a$。因此，若 $m \mid a$，则 $m \mid -a$、 $-m \mid a$、$-m \mid -a$ 故 $|m| \mid |a|$.

如：$3 \mid 9$ 则 $-3 \mid 9$，$-3 \mid -9$，$3 \mid -9$.

所以，若 m 是 a 的因数，那么 $-m$ 也是 a 的因数，m 也是 $-a$ 的因数.

性质 5 若 $m \mid a$，$a \neq 0$ 则 $|m| \leqslant |a|$

证：若 $m \mid a$，必存在整数 q，满足 $a = mq$，于是 $|a| = |m|\ |q|$.因 $a \neq 0$，则 $q \neq 0$，$|q| \geqslant 1$，

故 $|a| \geqslant |m|$.|

性质 5 说明任何不为零的数，只能有有限多个因数。因为比 $|a|$ 小的数只有有限个，故 a 的因数也只有有限个.

对任何整数 a 来说，由于

$$a = 1 \cdot a = (-1)(-a)$$

所以，± 1 是任何整数的因数。且当 $a \neq 0$ 时 a 是自身的因数.

定义 3 凡能被 2 整除的数称为偶数；凡不能被 2 整除的数称为奇数.

根据定理 1，任一个整数 a 被 2 除都可表示为：

$$a = 2n + r \qquad (\text{其中 } r = 0 \text{ 或 } r = 1)$$

显然，$2n$ 是偶数。反之，若 a 为偶数，则 a 就能被 2 整除，即 $r = 0$，$a = 2n$（其中 n 为整数）.因此，任何偶数都可表为 $2n$ 形式。同样，$2n+1$ 一定是奇数。如果 a 为奇数，a 就

不能被 2 整除，于是 $r=1$，即 $a=2n+1$.

性质6 整数 a 为偶数的充要条件，是 a 能表示为 $2n$ 形式。a 为奇数的充要条件是 a 能表示为 $2n+1$ 形式。（其中 n 为整数）|

因此整数可分为：偶数（$\cdots -6$，-4，-2，0，2，4，6，$\cdots$）和奇数（$\cdots -5$，-3，-1，1，3，5，$\cdots$）。

3. 应用与范例

关于整除的判别和证题方法，将在第三章详细讨论。本节举出应用整除性解决有关数目字问题的范例。

例1 数目字 0，a，b 能组成多少个大于 100 的数，并证明它们的和能被 211 整除，同时求出商。

解：数目字 o，a，b 能组成大于 100 的数是

$$aob,\ abo,\ boa,\ bao.$$

而 $aob+abo+boa+bao$

$$\begin{aligned}
&=(a\cdot 100+b)+(a\cdot 100+10\cdot b)+(b\cdot 100+a)+(b\cdot 100+10\cdot a)\\
&=2\cdot 100\cdot a+10\cdot b+b+2\cdot 100\cdot b+10\cdot a+a\\
&=2\cdot 100(a+b)+10(a+b)+a+b\\
&=(a+b)(2\cdot 100+10+1)\\
&=211(a+b).
\end{aligned}$$

故 211 能整除它们的和，其商是 $a+b$。

例 2 求证：n，k 都是给定的正整数，且 $n>1$，$k>2$. 则 $n(n-1)^{k-1}$ 可以写成 n 个连续偶数的和。

证：设 n 个连续偶数为：

$$2a,\ 2a+2,\ 2a+4,\ \cdots,\ 2a+2(n-1). \quad (1)$$

(1) 为等差级数，所以它们的和：

$$s=\frac{2a+2a+2(n-1)}{2}\cdot n=[2a+(n-1)]n.$$

今欲使 $n(n-1)^{k-1}$ (其中 $n>1$，$k>2$)．能写为 n 个连续偶数之和，关键在于能否找到正整数 a 使得

$$n(n-1)^{k-1}=(2a+n-1)n \tag{2}$$

从(2) 式解出： $a=\dfrac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$ (3)

而当 $n>1$，$k>2$ 时，$n-1$ 与 $(n-1)^{k-2}-1$ 必有一个是偶数，那么由(3) 式所确定的 a 是一个正整数．因此，只要(1) 式中 a 取

$$a=\frac{(n-1)[(n-1)^{k-2}-1]}{2}$$

由(2)式知(1)式所表示的连续 n 个偶数的和为 $n(n-1)^{k-1}$．故$n(n-1)^{k-1}$ 可写成 n 个连续偶数的和．

例 3 求证下列各数：

4356，443556，44435556，4444355556，…(1) 都是完全平方数*

证：设任一数 $N=\underbrace{4\cdots4}_{m}3\underbrace{5\cdots5}_{m}6$，则

$$N=6+5\cdot10+5\cdot10^2+\cdots+5\cdot10^m+3\cdot10^{m+1}+4\cdot10^{m+2}+4\cdot10^{m+3}+\cdots+4\cdot10^{2m+1}$$

$$=6+50(1+10+\cdots+10^{m-1})+3\cdot10^{m+1}+4\cdot10^{m+2}(1+10+\cdots+10^{m-1})$$

---

* 一个整数 a，如果存在整数 a 使得 $a^2=a$，a 叫做完全平方数．类似地可定义完全立方数，完全 r 方数．