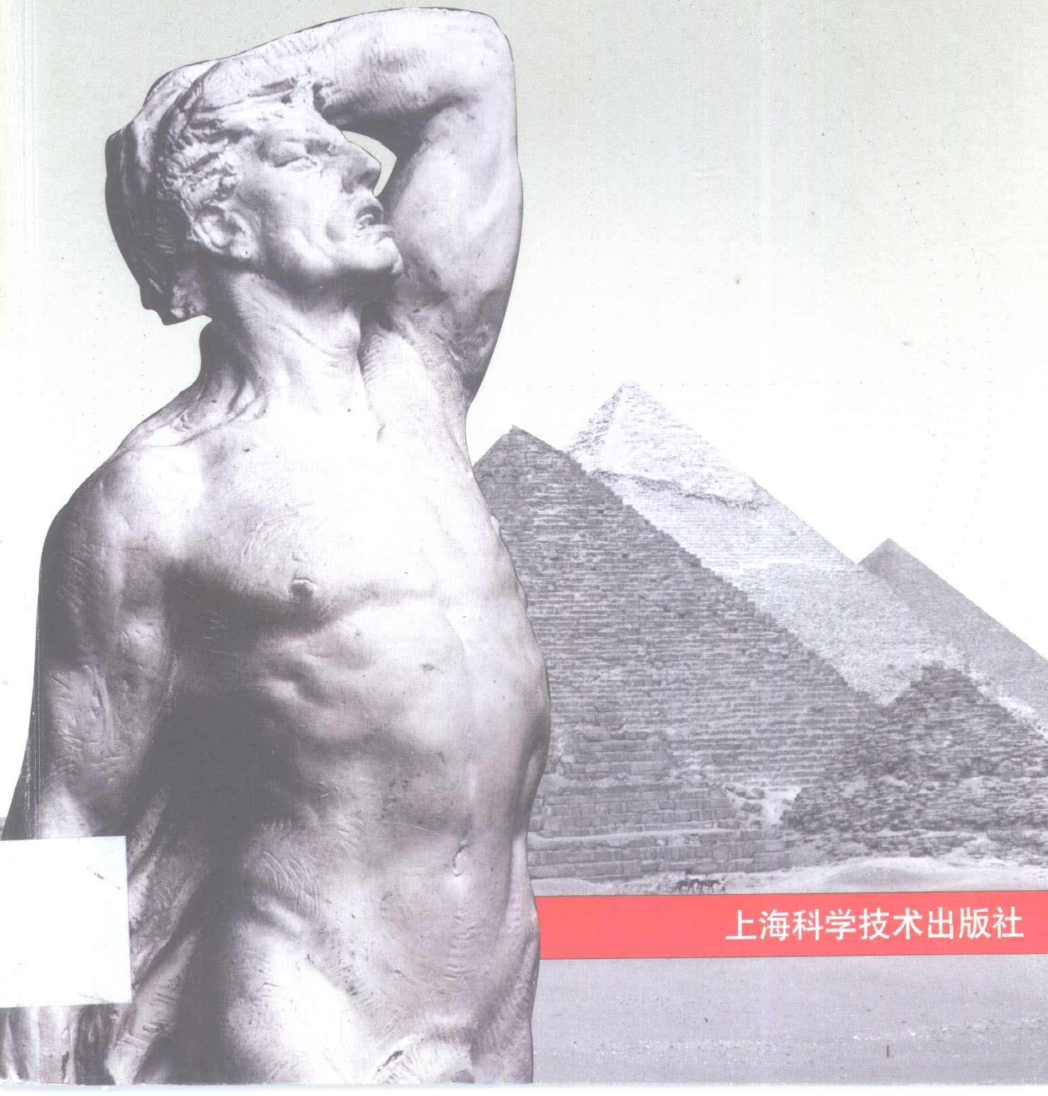
数学分析

方企勤 编著

第三册



上海科学技术出版社

内 容 提 要

本教材讲述的是高等数学的基础课程——数学分析，其核心内容为微积分学. 这套教材共三册，本书是其中的第三册.

本书共有九章，分别为多元函数的极限与连续性，多元函数微分学，隐函数存在定理，一般极值与条件极值，含参变量的积分，重积分，曲线积分与曲面积分，各种积分之间的联系、场论，微分形式及其积分. 主要讲述了多元微积分等内容，也讲述了场论及微分形式和其积分的初步理论.

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所用的讲义基础上修改而成，内容丰富，深入浅出. 本书选用了适量有代表性、启发性的例题，还选入了足够数量的习题和思考题，其中既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做.

本教材可作为大学本科阶段的数学、概率统计、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考图书.

责任编辑 刘 啸 苏德敏

数 学 分 析

（第三册）

方企勤 编著

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路450号 邮政编码200020）

新华书店上海发行所经销 常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 12.5 字数 323 000

2002年9月第1版 2002年9月第1次印刷

印数：1—5 200

ISBN 7-5323-6495-X/0・260

定价：23.70元

序

本教材的前身是北京大学数学系教学用的讲义,现在出版成书已进入 21 世纪了.面向这一重大挑战,在撰稿的进程中,以下几个方面是作者着重思考并力图落实的.

1. 加强导引性论述,介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法,这或许有益于树立正确的数学观,增加学习的活泼性.

2. 适当提高起点,扩大知识面.书中在讲解各种理论的应用时,列举了丰富的典型例题,以利于在提高启发式教学水平的同时,让学生有一个扩展的自学园地.

3. 为了培养数学思维的习惯,以及养成“会学”数学的能力,本书在每章节后列有适当数量的思考问题.此外,还以加注,以及用小字和附录的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项,这也对引发读者的创新思维有所助益.

4. 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一,本书一律用原文书写,(在页末给出中文译名供参考)并尽力介绍他们的国籍和生卒年代.尊重曾为人类的科学进步作出过贡献的学者,是我们后代人文明的表现之一.

对于想用本书作为正式教材的学校和教师来说,在教学实践中必须根据具体培养目标和实际情况对其内容作适当取舍,不能照本宣科.希望广大读者和教师对本书提出批评和建议.

最后,衷心感谢上海科技出版社对本书出版所给予的鼓励和支持.

作者

2002.5

致 读 者

《数学分析》的核心内容是“微积分”——微分学与积分学的统称,它是数学发展史中最伟大的成果,始创于17世纪下半叶,其代表人物是两个伟大的学者:英国的I. Newton(1643～1727)和德国的G. W. Leibniz(1646～1716).

Newton和Leibniz对微积分的杰出贡献与这一领域的前期工作不同,他们使微积分成为一门独立的学科,而不再是古希腊几何的附庸和延续,且为许多课题提供了崭新的研究方法.自微积分始,数学发展成为变量数学时期.它从运动、变化的观点、方法来考察各种事物和现象,这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际.因此,微积分学的建立给予科学、技术领域以巨大影响,推动了生产力的发展.特别是在天文、力学领域的成就,在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条.另一方面,也由于当时的微积分自身理论的不完善而受到责难.但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期,由于科学技术进步的推动,促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作.终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系,为微积分的普及创造了更加有利的条件,也使它成为今天各类院校的必修课程.

因此,在三百余年后的今天,学习微积分已不能算是件“时髦”的事情了.如果从培养21世纪的人才而言,或许只能说是一张“入门券”而已.

学习微积分课程的目的有三:一是可应用于实际课题;二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力;最后一点是要为学习

其他课程奠定基础.

本册介绍多元函数微积分内容,与一元函数微积分相比较,其内容有共性也有差异.从共性看,它们都是研究函数的性态,而且在方法上也都主要是从局部入手,从而在体系上仍为同一的格式:极限——连续——微分——积分.另一方面,由于多元函数所依赖的自变量多了,致使许多课题的研究复杂化了,自然也导致所得结果在某些方面更加深刻和丰富.不过,本册也只能点到为止.最后必须指出的是,掌握一元微积分的知识是学好多元微积分的基础.

目 录

多元函数微积分史简介

在自然界和社会中,各种事物和现象的运动、变化往往与多种因素密切相关,这就使得其数量之间的关系呈现多元化,反映在数学里就有了多个自变量的函数.

多元函数的微分运算,早在18世纪初期的科学研究中就已出现,例如Newton(研究多项式方程 $f(x, y)=0$)和Bernoulli兄弟(研究等周问题)都用了偏导数.不过,创建偏导数理论还应归功于Euler. Clairaut和d'Alembert,其主要动力是来自偏微分方程领域的工作.这是因为课题本身所含的物理意义要求考察只有单个自变量变化的情形.

要求建立多元函数重积分的意识,实际上也早已蕴含在Newton的名著《自然哲学的数学原理》关于球与球壳作用于质点上的引力的研究成果中,虽然他当时用的是几何学的语言.而当微积分的理论在18世纪广泛开展起来时,Newton的这一成果立刻被后人用分析数学的形式加以改写并推广.不仅如此,重积分的思想还被用来表示方程

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

的解.

重积分变量替换的课题,是从Lagrange关于旋转椭球体的引力计算中引发的,由于他在三重积分的计算中遇到了困难,便引进了变量替换公式

$$\begin{cases} x = a + r\sin\varphi \cdot \cos\theta, \\ y = b + r\sin\varphi \cdot \sin\theta, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \\ z = c + r\cos\varphi, \end{cases}$$

这实际上相当于用微分量 $r^2\sin\varphi d\theta d\varphi dr$ 代替微分量 $dxdydz$.

总的说来,在 18 世纪初人们所处理的重积分都是比较简单的,化重积分为累次积分来计算的课题并未引起足够的重视. 即使在 1770 年左右, Euler 曾涉及这一领域,但有关这一积分次序的交换课题,也只是到了 19 世纪在分析基础严密化思潮的推动下,才受到人们的关注. 其中原因之一是, 1814 年法国数学家 Cauchy 指出,如果被积函数不连续,那么计算重积分时,积分的先后次序是至关重要的,特别是在函数无界时,下述两个积分

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\ y)dy, \quad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)dx.$$

不一定相等.

大家知道,对于在定义域上的可微函数来说,其导函数在定义域上的积分值与原函数在定义域边界上的值有着紧密的联系. 在一维的情形时,一元函数的 Newton－Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

就是这一事实的表现. 而反映在多维空间的多元函数的微积分理论中,正是著名的 Green 公式,以及相继的 Gauss 公式和 Stokes 公式. 当然,这些极重要的成果的获得是始于物理学课题的深入探讨,其核心是位势理论的展开. 例如 Green 的工作就是旨在把位势函数的概念移用到电磁学的研究中. 自学成才的 Green 是沿欧洲大陆工作路线前进的第一个英国数学家,在他的影响下,形成了剑桥强大的数学物理学派. 其中包括 W. Thomson、G. Stokes、Rayleigh 以及 C. Maxwell.

第十三章 多元函数的极限与连续性

从这章起我们开始讨论多元函数,着重讨论多元数值函数,略微介绍一些多元向量函数的基本知识.对于多元数值函数,主要讨论二元和三元函数.因为从一元函数到二元函数不是简单的推广,会提出一些一元函数所没有的新问题,即使看似与一元函数相同的问题,也会出现一些新的特征,所以两者有质的不同.而从二元函数过渡到多元函数只是自变量个数的增加.从分析的观点来看,两者没有什么质的区别.此外,讨论二元函数不仅书写简明,而且可以用几何图形来表示各种量之间的关系,便于读者理解所述的概念和方法.

§1 平面点集论

1.1 邻域与点列极限

我们用 $\mathbf{R}^2$ 表示欧氏平面,在取定标准基的情况下,平面上的点 P 可以用坐标 (x, y) 来表示.平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离定义为

$$d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

称平面上以 P_0 为心,以正数 ε 为半径的开圆是 P_0 点的一个 **ε 邻域**,简称为 P_0 点的**邻域**,记作:

$$U(P_0;\varepsilon)=\{P\in\mathbf{R}^2 \mid d(P, P_0)<\varepsilon\}.$$

邻域 $U(P_0;\varepsilon)$ 中除去 P_0 点,称为 P_0 点的一个**空心邻域**,记作:

$$U^*(P_0;\varepsilon)=\{P\in\mathbf{R}^2 \mid 0<d(P, P_0)<\varepsilon\}.$$

设$\{P_n(x_n, y_n)\}$为平面上一点列，$P_0(x_0, y_0)$为一定点. 若对任意P_0点的邻域$U(P_0; \varepsilon)$，总存在正整数N，当$n>N$时，有

$$P_n \in U(P_0; \varepsilon),$$

则称点列$\{P_n\}$收敛于点P_0，或称n趋于无穷时，点列$\{P_n\}$有极限点P_0. 记作：

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0,$$

或

$$P_n \to P_0 \quad (n \to \infty).$$

由不等式

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x_0| \\ |y_n - y_0| \end{array}\right\} \leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

可看出点列$\{P_n\}$收敛于点P_0的充分必要条件是：实数序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于x_0和y_0.

容易证明，若点列$\{P_n\}$有极限点，则极限点P_0必唯一，且$\{P_n\}$有界，即存在常数M，使对所有的n，有

$$d(P_n, 0) \leqslant M,$$

或

$$|x_n| \leqslant M, \quad |y_n| \leqslant M.$$

1.2 开集、闭集、区域

这里介绍几个有关的术语和概念. 记号E表示平面点集.

(1) 内点　设$P \in E$，如果存在$\varepsilon>0$，使

$$U(P; \varepsilon) \subset E,$$

则称P是集合E的**内点**. 集合E的所有内点组成的集合，称为E的**内部**，记作E°. 一个集合E的内部可以是空集，记作$\varnothing$. 如

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$E^\circ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\};$$
$$E = \{(x, y) \mid x, y \text{为有理数}\}, \ E^\circ = \varnothing.$$

(2) 外点　设 $P\overline{\in}E$,如果存在 $\varepsilon>0$,使

$$U(P;\ \varepsilon)\cap E=\varnothing,$$

则称 P 是 E 的**外点**.

(3) 边界点　设 $P\in\mathbf{R}^2$,任给 $\varepsilon>0$,若 $U(P;\ \varepsilon)$中既有 E 的点,又有非 E 的点,则称 P 是 E 的**边界点**. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**,记作∂E. 注意, E 的边界点可以属于 E,也可以不属于 E. 如

$$E=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\},$$

$$\partial E=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=1\};$$

$$E=\{(x,\ y)\mid x,\ y\text{ 为有理数}\},\ \partial E=\mathbf{R}^2.$$

(4) 开集　若 $E=E^\circ$,即集合 E 的点都是内点,则称 E 为**开集**. 容易证明邻域 $U(P_0;\ \varepsilon)$是一开集. 因空集的内部是空集, $\varnothing^\circ=\varnothing$,所以空集是开集. 关于开集有下列性质: $\mathbf{R}^2$ 与$\varnothing$是开集;有限个开集的交集是开集;任意个开集的并集是开集.

(5) 聚点　设 $P_0\in\mathbf{R}^2$,若任给 $\varepsilon>0$,总有

$$U^*(P_0;\ \varepsilon)\cap E\neq\varnothing,$$

即 P_0 点的空心邻域内总有 E 的点,则称 P_0 是 E 的**聚点**. E 的聚点可以属于E,也可以不属于 E. 在 $\mathbf{R}^2$ 中, E 的内点一定是E 的聚点.

若 $P_0\in E$,存在 $\varepsilon>0$,使

$$U^*(P_0;\ \varepsilon)\cap E=\varnothing,$$

则称 P_0 是 E 的**孤立点**. 不是孤立点的边界点一定是 E 的聚点.

定理 13.1　点 P_0 是集合 E 的聚点的充分必要条件是: 在 E 中存在收敛于 P_0 的互异点列$\{P_n\}$.

证明　充分性显然. 证必要性. 取 $\varepsilon_1=1$,由 $U^*(P_0;\ 1)\cap E\neq\varnothing$, $\exists\,P_1\in U^*(P_0;\ 1)\cap E$. 令 $\varepsilon_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},\ d(P_1,\ P_0)\right\}>0$,由 $U^*(P_0;\ \varepsilon_2)\cap E\neq\varnothing$, $\exists\,P_2\in U^*(P_0;\ \varepsilon_2)\cap E$, $\cdots$,令 $\varepsilon_n=\min\left\{\dfrac{1}{n},\ d(P_{n-1},\ P_0)\right\}>0$,由$U^*(P_0;\ \varepsilon_n)\cap E\neq\varnothing$,

$\exists P_n \in U^*(P_0; \varepsilon_n) \cap E$. 依此下去,求出互异点列 $\{P_n\} \subset E$,且 $P_n \to P_0 (n \to \infty)$. 证毕.

据此,我们也称 E 的聚点为 E 的**极限点**. 集合 E 添加它的所有聚点的集合称为 E 的**闭包**,记作 $\bar{E}$. 显然 $E \subset \bar{E}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{\mathbf{R}}^2 = \mathbf{R}^2$.

(6) 闭集　若 $E = \bar{E}$,即集合 E 含有所有它的聚点,则称 E 为**闭集**. 闭集有下列性质: $\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是闭集;有限个闭集的并集是闭集;任意个闭集的交集是闭集.

(7) 余集　集合 $\mathbf{R}^2 \backslash E$ 称为 E 关于 $\mathbf{R}^2$ 的**余集**,记作 E^c. 可以证明, E 是闭集的充分必要条件是 E^c 为开集. 在 $\mathbf{R}^2$ 中,除 $\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是既开又闭的集合外,不存在其他既开又闭的集合.

(8) 区域　对于 E 中的任意两点,若总能用属于 E 的连续曲线连接此两点,则称 E 是**道路连通集**. 若 D 既是道路连通集又是开集,则称 D 是**区域**. 如 $D = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y > 0\}$, $D = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $D = \mathbf{R}^2 - \mathbf{Z}$ 等集合都是区域.

若 D 是区域,则称 $\bar{D}$ 是**闭区域**.

若集合 E 内任意两点 P_1、P_2 的联线段 $\overline{P_1P_2}$ 也属于 E,则称 E 是**凸集**. 类似可定义凸域.

注　存在区域 D,使 $(\bar{D})^\circ \neq D$,如 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} - \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x < 1\}$,则 $(\bar{D})^\circ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \neq D$.

思考练习　解答下列问题:

1. 设 $A \subset B$,试证明 $A^\circ \subset B^\circ$, $\bar{A} \subset \bar{B}$.

2. 试证明 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中闭集的充分必要条件是 $E^c = \mathbf{R}^2 \backslash E$ 是开集.

3. 设 G 为开集,若 $E \cap G = \varnothing$,试证明 $\bar{E} \cap G = \varnothing$.

4. 试证明: $\partial E = \bar{E} \backslash E^\circ$.

5. 若把 $\mathbf{R}^2$ 中子集 X 看成基本空间, $P_0 \in X$,定义 P_0 点邻域为 $U(P_0; \varepsilon) = \{P \in X \mid d(P, P_0) < \varepsilon\}$. 问集合 $E \subset X$ 的孤立点是否可以是 E 的内点. 除 X 与 $\varnothing$ 是既开又闭的集合外,是否有其他既开又闭的集合.