工 科 中 专 通 用

数学学习指导

第3册

北京市《数学学习指

北京教育出版社

工科中专通用

数学学习指导

第三册

北京市《数学学习指导》编写组

北京教育出版社

工科中专通用数学学习指导　第三册

Gongke Zhongzhuan Tongyong Shuxue xuexi Zhidao disance

北京市《数学学习指导》编写组

•

北京教育出版社出版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

北京北苑印刷厂印刷

•

787×1092毫米　32开本　6印张　131,000字

1991年6月第1版　1991年6月第1次印刷

印数　1—11,130

ISBN 7-5303-0215-9/G·194

定　价：2.20元

前　言

为推动中专数学教学改革的深入开展，提高教学质量，帮助学生适应中专数学的特点，较好地掌握基础知识和学习方法，逐步提高学习能力，并配合教师的教学需要，由北京市中专数学教学研究会组织编写了《数学学习指导》一、二、三册。本书与工科类专业通用中等专业学校试用教材《数学》（1979年第1版、1985年第2版）第一、二、三册配合使用。

各章由以下几部分组成：一、内容概述。二、学习要求：根据1983年教育部审定的《中等专业学校数学教学大纲》和北京市中专数学教研会制定的《中专数学教学基本要求（试行）》，指出每章各部分应掌握的程度。各章的学习要求由高到低按以下三级划分：概念与理论分为理解、了解、知道；计算与应用分为熟练掌握、掌握、会和能。三、学习指导：通过对各章主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容的分析，结合典型例题，帮助学生弄清基本概念，掌握解题思路，总结解题方法。四、练习题：由思考题、选择题、判断题、计算题和应用题等类型组成，用于加强基础知识和基本技能的训练，复习巩固所学的知识。五、本章小结。六、自测题：分A、B卷，A卷用于检查基础知识的掌握程度，B卷为提高题，用于检查灵活掌握知识的程度。

本书供中专学生学习和教师教学使用，亦可供职工中专、电视中专、技校的学生和教师使用。

参加本书编写的教师有张齐金、李鸿儒、陈柏林、赵家骅、冯善异、付国伟、张慈明、李燕生、钮荣尧、李湘、朱景婉、维丽秀、吴元枢等。

编写本书是探索适应中专学生学习和教师教学两方面需要的尝试，由于我们经验不足，水平有限，编写时间仓促，难免有缺点和错误，恳切希望大家批评指正，以便总结经验，不断改进提高。

北京市《数学学习指导》编写组

1990年8月

目　录

第十四章　极限与连续

一　内容概述

本章是全书的基础，内容分为三部分：

（一）函数

在复习第一册函数概念的基础上，加深函数有关知识，归纳列出五类基本初等函数的图象和特性，提出复合函数的概念和初等函数的概念。函数是高等数学最重要的基本概念之一，是微积分研究的对象。

（二）极限

这部分内容包括极限的概念和运算，无穷小和无穷大的定义及性质，两个重要极限。由于微积分运算从根本上说都是建立在极限运算基础之上的，所以极限是微积分学最基本的概念，是微积分学的工具。

（三）函数的连续性

这部分内容包括函数连续性的概念，函数的间断点，初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质。连续函数是极其重要的一类函数，它具有很多有用的性质。微积分研究函数一般是在连续条件下进行的。

极限与连续是高等数学的理论基础，学好本章，对进一步学习高等数学的其它内容具有极重要的意义。

二　学习要求

1．理解函数、基本初等函数、复合函数及初等函数的概念，熟练掌握复合函数的分解（复合步骤不超过三步）；了解函数的四种特性的定义及图象特点、分段函数的概念，掌握简单问题的函数关系式的建立；知道反函数的概念。

2．理解数列极限和函数极限的概念，熟练掌握极限的四则运算法则；了解函数的左、右极限，了解无穷小与无穷大的概念、无穷小的性质以及函数的极限与无穷小的关系，掌握两个重要极限；会求无穷递缩等比数列的和，知道两个无穷小比较的含义。

3．理解函数连续性的概念；知道初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质，会利用函数的连续性求函数的极限。

4．通过本章的学习，认识常量与变量、有限与无限等辩证关系，培养辩证唯物主义观点。

三　学习指导

（一）函数概念

函数概念和基本初等函数在第一册曾经学过，由于函数是微积分学的研究对象，因此在学习本节内容时，应对第一册的有关知识进行系统地复习、总结和归纳，以加深对函数概念的理解。

1．函数定义

第一、三册函数定义的比较：

比较 \ 教材	函数定义	说明
第一册	…如果对于 D 上的每一个确定的数值 x，按照某个对应关系，y 都有唯一确定的值和它对应…	定义单值函数
第三册	…如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，y 都有确定的值和它对应…	定义单值函数或多值函数

通过比较和分析，我们在学习函数定义时应注意以下几点：

(1) 在函数定义中，最重要的一点，是对于每一个 $x\in D$，按照某个对应关系 f，y 总有确定的值与之对应。至于表示对应关系的方式，定义中没有任何限制。常见的表示函数的方法有解析式法、表格法和图象法三种。

(2) $y=c$（c 是常数）也表示一个函数，它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$，函数图形是过点 $(0, c)$ 平行于 x 轴的一条直线。

(3) 函数与函数的表达式是不同的。函数是变量 x 与 y 之间的对应关系，表示函数的式子是表达这种对应关系的工具。同一函数可以有不同的表达式。

例如，$y=|x|$ 和 $y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$ 这两个表达式表示同一函数（定义域相同，对应关系相同）。

(4) 函数记号有两层意思，可以表示一个函数（侧重于对应关系 f），也可以表示函数的值，这时要注意，记号 $f(a)$（a 是数）表示函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的值。

(5) 在不同的区间内用不同的式子表示的函数称为分

段函数。如$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是定义在$(-\infty,\ 2)$内的一个函数。

学习分段函数应注意：

①分段函数是一个函数，不能理解成几个函数；

②求函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的函数表达式进行计算；

③函数图象要在定义域所指定的各范围内分别画，一个分段函数的各段图象必须画在同一个坐标系中。还要特别注意各分段区间之间的曲线的衔接情况。

2．函数的几种特性

学习函数的四个特性，将使我们掌握从整体上分析函数性质的工具。我们把函数特性总结如下：（表14—1）

在学习函数特性时应注意：

（1）研究函数特性必须在函数定义域内或有定义的区间$(a,\ b)$内，注意分析定义域的特点。例如，函数$y=x^2$，$x\in(-2,+\infty)$不是偶函数，理由是函数定义域不符合偶函数的定义域关于原点对称的条件。研究函数的单调性必须同时指出单调区间。例如，正切函数$y=\mathrm{tg}x$在每个区间$(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2})$（$k$是整数）内是单调增加的，但在定义域内不是单调函数。

（2）证明函数具有某个特性时，必须根据相应的定义证明对定义域（或$(a,\ b)$内）的任意x（或任意两点x_1、x_2）有相应的等式（或不等式）成立。

（3）学习函数特性的定义时要结合函数图形的特点加

表14—1

函数特性		定　　义	图象特点
奇偶性	奇函数	对于定义域中的任意x，有$f(-x)=-f(x)$。	对称于原点。
	偶函数	对于定义域中的任意x，有$f(-x)=f(x)$。	对称于y轴。
单调性	单调增加	对于$(a、b)$内任意两点$x_1<x_2$有$f(x_1)<f(x_2)$。	沿横轴正向上升。
	单调减少	对于$(a、b)$内任意两点$x_1<x_2$有$f(x_1)>f(x_2)$。	沿横轴正向下降。
有界性		…对于(a,b)内一切x值，有$\|f(x)\|\leqslant M$，其中M是正数。	图象介于两条平行直线$y=\pm M$之间。
周期性		…对于定义域的一切x，等式$f(x+l)=f(x)$成立(l是正数)。	在定义域内每隔长度为l的相邻区间上，有相同形状。

深记忆和理解，要会运用函数特性分析基本初等函数的性质，在此基础上，分析一些习题中的函数的性质，并为学习函数图形的描绘作准备。

3．基本初等函数

幂函数$y=x^a$(a为实数)、指数函数$y=a^x$($a>0$且$a\neq1$)、对数函数$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。对基本初等函数的定义域与值域、图象和特性应当熟记，它的有关知识是极限、求导、求积分的基础。

注意：幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的定义域因 α 的不同而不同，在 $(0, +\infty)$ 内 $y=x^{\alpha}$ 恒有意义。

4．复合函数

（1）如果 y 是 u 的函数，u 又是 x 的函数：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，而且 $\varphi(x)$ 的值域（或值域的一部分）在 $f(u)$ 的定义域内，那么每当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域（或定义域的一部分）里取一个值时，便经过 u 的传导而有 y 的一个值和它对应，于是 y 是 x 的函数，即 $y=f[\varphi(x)]$，称为复合函数，u 叫做中间变量，f 叫做外层函数，φ 叫做内层函数。

（2）学习复合函数时应注意：

①构造复合函数时，中间变量的值域必须有一个非空子集属于外层函数的定义域。如 $y=\ln u$ 和 $u=-(x^2+1)$ 就不能复合为 $y=\ln[-(x^2+1)]$，这是因为，不论 x 取任何实数，都有 $-(x^2+1)<0$，$-(x^2+1)$ 都不能在对数函数的定义域内。又如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 可以复合成 $y=\sqrt{1-x^2}$，中间变量 u 的值域 $(-\infty, 1]$ 有一个非空子集 $[0, 1]$ 属于外层函数 $\sqrt{u}$ 的定义域。

②复合函数的复合过程是由内层到外层，而分解过程是由外层到内层，例如

$$y=e^{\sqrt{x^2+1}} \underset{\text{复合}}{\overset{\text{分解}}{\rightleftharpoons}} y=e^u,\ u=\sqrt{v},\ v=x^2+1$$

③将一个复合函数拆成几个简单函数时，应从外层到内层一层一层地分解，注意不要漏层，一般要拆到每个简单函数都是基本初等函数或是基本初等函数和常数经过四则运算构成的函数。

例1　指出下列各复合函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

(2) $y=\lg(\sqrt{x^2+1}+1)$.

解 (1) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$是由$y=\sqrt{u}$和$u=\dfrac{x-1}{x+1}$复合而成的。

思考：如果这样分解$y=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$，$u=x-1$，$v=x+1$是否正确？试说明理由。

(2) $y=\lg(\sqrt{x^2+1}+1)$是由$y=\lg u$，$u=v+1$，$v=\sqrt{g}$，$g=x^2+1$复合而成的。

说明：复合函数未必只复合一次，要正确分析复合函数的结构，引入恰当的中间变量，本例引入三个中间变量。

5．初等函数。由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数叫做初等函数。分段函数一般不是初等函数。

（二）函数的极限

1．数列的极限

(1) 数列是定义在自然数集合上的一类特殊的函数，可记为$x_n=f(n)$。即函数的自变量(项数)n取自然数，其项x_n为函数。

当自变量（项数）n从1依次取自然数时，相应的函数值组成数列的各项：

$x_1=f(1)$，$x_2=f(2)$，…，$x_n=f(n)$，…

今后指n无限增大就是说n从1开始依次无限变大，这种过程记为$n\to\infty$。应注意“∞”是一个记号，它表明n取自然数无限变大的趋势。

(2) 数列极限研究数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时x_n变化的趋势。

例如，数列$x_n=\frac{n}{n+1}$，当$n\to\infty$时，x_n无限趋近于1，我们称1是这个数列的极限，记为

当 $n\to\infty$时，$\frac{n}{n+1}\to 1$

数列x_n是否有极限取决于n无限增大时，x_n是否无限趋近于某一常数a，至于是否达到a以及x_n以何方式趋近a则无关紧要，也与数列前面的有限项的取值情况无关。

（3）数列的每一项都分别对应数轴上的一个点。从数轴上看，如果随着n无限增大，代表数列$\{x_n\}$中后面的各项的点，越来越靠近一个固定的点a，并且充分靠后的点都"聚集"在这个点的附近。从距离的角度看，充分靠后的点x_n与固定点a之间的距离可以要多近有多近，则常数a就是数列x_n的极限。

2．函数的极限

（1）函数极限的类型与特点。

函数的极限是指函数$y=f(x)$，当自变量x按某一方式变化时，函数y无限趋近于常数A，称A为函数$f(x)$的极限。因此，函数的极限与自变量的变化方式有关。自变量x的变化方式一般可分为两种，即：$x\to\infty$和$x\to x_0$，函数的极限也有两种类型：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$。

第一种类型（$x\to\infty$）极限的特点是，在无限区间$(-\infty, a)$，$(a, +\infty)$或$(-\infty, +\infty)$内，研究自变量$|x|$无限变大时，函数$f(x)$的变化趋势。

例如，在$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$内，研究$x\to\infty$时，$f(x)=\frac{1}{x}$的变化趋势，显然此过程中$f(x)$无限趋近于零。

第二种类型（$x \to x_0$）极限的特点是，在某一点x_0处附近的小区间内研究当x无限趋近x_0时，$f(x)$的变化趋势。

例如，在点$x_0=0$处附近研究当$x \to 0$时，函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x>0\end{cases}$的变化趋势，显然当$x$从点$x_0=0$左右两侧无限趋近0时，$f(x)$无限趋近于零（图14—1）。

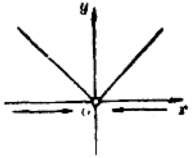

图14—1

（2）在研究函数$f(x)$在$x \to x_0$时的极限时，与函数$f(x)$在点x_0处有无定义无关。

例如，函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x>0.\end{cases}$在点$x_0=0$处无定义，但当$x \to 0$时，$f(x)$的极限存在，且

$$\lim_{x \to 0} f(x)=0 \text{（见图14—1）}$$

又如函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0\end{cases}$在点$x_0=0$处有$f(0)=1$，但$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$（图14—2）.

再如函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x \geqslant 0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$在点$x_0=0$处虽有$f(0)=1$，但在$x \to 0$时却无极限。

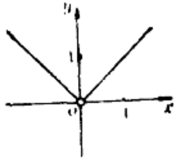

图14—2

（3）在第二种类型（$x \to x_0$）的极限过程中，x既从x_0的左侧无限接近于x_0，也从x_0的右侧无限接近于x_0。为了更深刻地认识这种极限，我们还研究x从x_0的一侧无限接近于x_0的情况，把x从x_0的左侧无限接近于x。记为$x \to x_0-0$；

把x从x_0的右侧无限接近于x_0记为$x \to x_0+0$。

称$\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的左极限，有时把它记为$f(x_0-0)$；

称$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限，有时把它记为$f(x_0+0)$；

正确的计算（$x \to x_0$时）$f(x)$的左极限与右极限是很重要的。

例2 求函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x \geqslant 0, \\ x-1, & x<0 \end{cases}$$ 在$x \to 0$时的左极限与右极限（图14—3）.

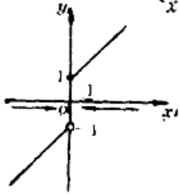

图14—3

解 从图14—3和函数解析式可以看出：

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1.$$

（4）函数$f(x)$在$x \to x_0$时有极限的充分必要条件是$f(x)$在$x \to x_0$时的左极限与右极限同时存在且相等，即$f(x_0-0)=f(x_0+0)$。

这是一个非常重要的定理，常常用来确定函数$f(x)$在$x \to x_0$时有无极限，其步骤可分为下面三步：

①判断函数$f(x)$在$x \to x_0$时的左极限和右极限是否存在。

②若上述两个极限存在，则判断两个极限值是否相等。

③若左、右极限至少有一个不存在或两个单边极限虽都存在但极限值不相等，则$f(x)$在$x \to x_0$时无极限；若两个单

边极限值存在且相等，则$f(x)$在$x\to x_0$时极限存在且其极限值就是左、右极限值。

显然，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0\end{cases}$$ 在$x\to 0$时极限存在，这是因为

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}f(x)=0\text{(图14—2)}$$

而函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0\end{cases}$$

在$x\to 0$时的极限不存在，这是因为

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=-1,\text{ 而 }\lim_{x\to 0+0}f(x)=1\text{(图14—3)}$$

注意：$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$是函数$f(x)$在$x\to x_0$时左极限、右极限的记号，不要与函数值记号$f(x_0)$相混淆。

(5) 函数的极限与自变量的趋向密切相关。即使同一个函数，在自变量的不同趋向下往往有不同的极限或者极限不存在。例如

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2;\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x-1}=1;\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x-1}=\infty.$$

(6) 极限记号"lim"有运算意义，因此在求出极限值前就丢掉极限符号是错误的，而求出极限后仍保留符号也是不必要的。

3．无穷小与无穷大

无穷小与无穷大是两种特殊的变量。无穷小是以零为极限的变量，无穷大是绝对值无限增大的变量。不为零的无穷小量，其倒数是无穷大量，而无穷大量的倒数是无穷小量。