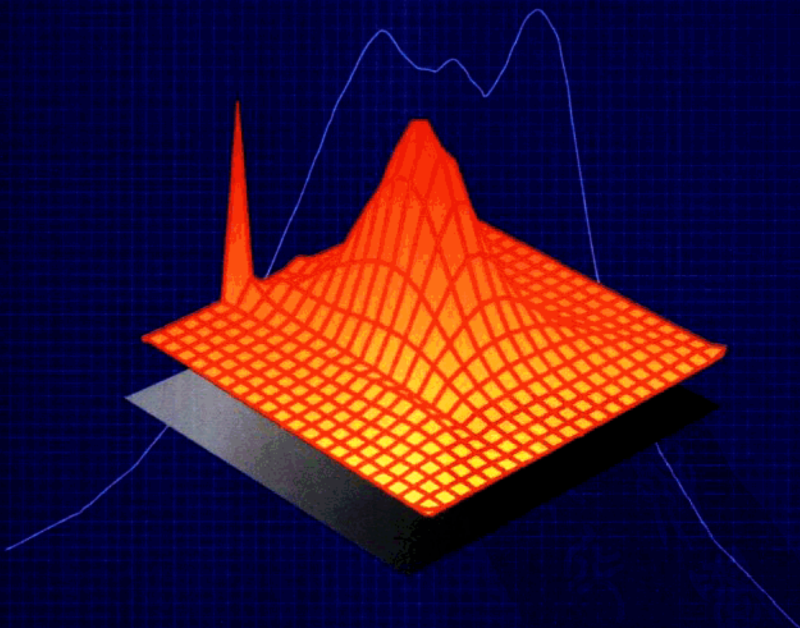
科学与工程计算丛书

曲面上的位场理论及其在地球物理中的应用

QUMIANSHANGDEWEICHANGLILUNJIQIZAIDIQIUWULIZHONGDEYINGYONG

蔡宗熹 编著



SECS
河南科学技术出版社

《科学与工程计算丛书》第二届编辑委员会

代　　序

为促进我国科学与工程计算事业的发展，1988 年 7 月，中国核学会计算物理学会在青岛举办了全国计算物理学术研讨会．会议期间，经有关专家商议，决定出版一套《科学与工程计算丛书》，得到了许多著名科学家的热情关心和支持．经过两年多的筹备，正式开始了这套丛书的编辑出版工作．

计算机是一种延伸、强化人的思维的工具．当世界上第一台计算机 ENIAC 诞生时，冯·诺伊曼就预言这一新工具所拥有的巨大潜力和对人类社会的深远影响．在过去的四十多年里，计算机迅猛发展，其应用范围从国防尖端部门扩大到科学技术和国民经济建设的各个领域，计算机已经给人类社会带来了一场深刻的技术革命，计算机的发展和计算方法的进步极大地提高了人们的计算能力，从而引起了科学方法论上的巨大变革，使计算成为科学研究的第三手段，对研究的定量化起到特殊重要的作用．“实验、理论、计算”三位一体是现代科学研究基本模式，三者既相对独立，又互相补充，互相依赖．人们在计算机上可充分利用数值计算来模拟现实世界的各种过程，部分替代实验或作为实验的补充，检验理论模型的正确性，尤其是还能呈现现实生活中无法重复或无法进行实验的现象，或模拟耗资巨大的实验工程，探索新的奥秘．由于有了计算这一强有力的手段，大大增强了人们科学研究的能力，促进了不同学科之间的交叉渗透，缩短了基础研究到应用开发的过程，加速了把科学技术转化为生产力的进程．

在计算机的发展和数值计算的广泛应用的推动下，科学与工

程计算（简称科学计算）作为一门工具性、方法性和边缘交叉性的新学科，已经开始了自己的发展．它既包含了在各种科学与工程领域中逐步发展起来的计算性学科分支，如计算数学、计算物理、计算力学、计算化学以及计算地震学等计算工程学，又包括经济科学、医学、生物学和系统科学等发展中所需要的计算理论．计算方法则是它们联系的纽带和共性的基础．科学计算就其本质而言，是要解决现代科学与工程中提出的大规模、非线性、非均匀和几何形状非规则的复杂问题，是数学理论和计算艺术的高度结合，是复杂系统的数值计算或模拟．计算机的性能与算法水平的乘积是衡量计算能力高低的指标．

我国在科学与工程计算领域已有了一支较高水平的、能打硬仗的队伍．这支队伍在我国计算机水平相对落后的条件下，以其智力优势和拼搏精神为我国的国防建设和经济建设做出了重大贡献，积累了丰富的实践经验，急需加以总结、提高、推广和交流．编写《科学与工程计算丛书》，正是为了适应这种形势的需要，它的出版将会填补我国这方面的空缺．

这套丛书是采用“众人拾柴火焰高”的集资方式创办的，由于丛书的涉及面极广，故不设主编，由常务编委轮流担任执行主编．丛书作者都是奋战在教学和科研第一线的专家学者，他们为发展我国的科技事业不辞劳苦，呕心沥血，无私奉献．谨向他们表示崇高的敬意．

可以期望，《科学与工程计算丛书》的出版发行，必将有力地推动我国科学计算事业的发展．

《科学与工程计算丛书》编委会

1990 年 8 月

序

本书作者是一位数学专家，地质矿产部教授级高级工程师，1978 年与原地矿部北京计算中心重磁勘探专家侯重初领导的科研集体一起，从事重磁位场转换处理理论方法研究. 20 世纪 80 年代，他们先后完成了多项部属重大科技项目，建立了平面位场转换系统和曲面位场转换系统，其成果处于国内外领先地位，得到了部里颁发的嘉奖令，有关成果发表在《地球物理学报》等学术刊物上. 作为该科研集体数学理论方面的核心人物，在此期间，作者详细证明了位场延拓公式的傅里叶变换表达式，阐述了位场延拓计算的适用范围，论证了国际权威重磁专家提出的波数域拉普拉斯方程和偶层位磁性等效源密度概念（即磁化强度分布的空间梯度）的错误，证明了异常体磁化方向与磁场分量方向互换定理，导出了起伏剖面和曲面位场延拓、分量转换、各阶导数换算等系列公式，可以说，作者在重磁位场转换理论方面做出了突出贡献. 这些均已写入本书中.

科技工作贵在创新. 不能总是跟在科技发达国家的后面，走引进、提高、完善之路. 走自己的路，力争超越，这就是结论.

本书是以侯重初为首的科研集体的科研成果（特别是作者的理论研究成果）的总结，在写作上有如下特点：第一，结合诸多位论的经典著作和作者的研究，以较短的篇幅，条理清楚、融会贯通、重点突出地阐述了其科研成果的严格的位理论基础，并针对实际重磁异常观测曲面，提出了广义偶层位和双偶层位的概念，发展了位场理论，弥补了多数重磁勘探著作在理论基础阐述

上的不足．第二，密切结合重磁位场转换处理的实际需要，详细推导了为研制平面和曲面两大位场转换处理系统所需的所有基本公式，据此，容易在各种计算机上开发出应用软件，避免了数学著作的过度精炼、难于向实用技术转化的弱点．第三，在论述理论研究成果的同时，适当地回顾了研究的起因和过程，对于刚步入科研领域的年轻科技工作者定会有所启迪．

总之，本书既详细阐述了重磁场转换处理方面的科研成果，具有较大的实用价值，又简明而严谨地论述了起伏剖面和曲面上的位场理论及其发展，具有较大的理论价值，不失为一本位论专著．

安玉林
于中国地质大学（北京）
2001 年 6 月

前　言

本书重点论述曲面上的位场理论及其应用，是作者和同事二十年来一直从事频率域平面位场转换和空间域曲面位场理论研究成果的总结. 本书原是为计算地球物理工作者而写的，但经过作者对 1999 年的初稿进行全面修改后，现在的这本书不仅对理论研究工作者而且对位场资料（磁力资料和重力资料）进行数据处理与地质解释的物探与地质工作者，特别是高校应用地球物理专业高年级学生、研究生，具有实用价值.

长春科技大学博士生导师申宁华教授在《磁法勘探的科技进展》一文中指出："针对我国多山区的特点，高精度磁测工作也在逐步开展，消除由观测面起伏不平所产生的影响的问题引起关注. 将曲面上观测到的场换算到水平面上的曲面延拓方法及曲面上场的变换方法在近十年来有所发展. 如侯重初及蔡宗熹等完成的曲面位场转换解释系统的国家自然科学基金项目，以空间域位场理论推导为主，包含了数篇论文. 这方面的工作还有管志宁、安玉林的曲线与曲面上磁场向上延拓和分量转换、梁锦文的有限球谐位场曲面延拓方法及王硕儒等的起伏观测面上位场导数换算的 B 样条法等. 从理论分析角度看，我国在这方面的研究是领先的."［《物探与化探》，1989，13（5）：351］翁文波先生任地球物理学会理事长时，曾选定我们的论文译成英文发表. 美国地质调查局的有关专家也曾多次来函索取我们的文章.

作为献身勘探地球物理的专家，侯重初同志自 1954 年留苏回国后一直认为每个国家都有它自己的特殊情况，苏联多平原，

我国多山川，许多问题需要我们自己研究解决．我国地形起伏变化较大的地区很多，起伏地形使磁异常与重力异常畸变，给解释工作造成很大的困难．她认为采用数学方法和计算机有可能使这一困难得到解决．1977 年 7 月，美国 Geophysics 的主编、位场权威 B. K. Bhattacharyya 和 K. C. Chan 提供了一种没有“弱地形”条件限制的曲面延拓方法．侯重初同志与数学工作者合作将这一方法引进来介绍给国内同行．1978 年 12 月，在侯重初同志主持下，一五〇工程组重磁研究室邀请安徽大学数学系共同研究“曲面上的位场转换”，历时三年半，1982 年 7 月，他们就二维情况取得可喜的成果．这对同行是一个鼓舞．侯重初同志抓住时机，于 1982 年 10 月 15 日又与另一单位签订协议共同开展有关曲面位场的专题研究．由于课题的难度，历时两年并未获得学术上或生产上可行的结果．

我是 1975 年 6 月从中国科学技术大学数学系调入当时的国家地质总局一五〇工程（地矿部北京计算中心的前身）程序组工作的．1978 年春，一五〇工程由于没有启动部管项目“航磁资料处理与自动成图”受到上级的批评．不久，我被调到重磁研究室，在侯重初同志领导下共同负责航磁项目的研制．对于航磁资料处理，我是外行，只能边学边干，把全部时间和精力都投入其中、同室的孙滨同志为该项目也做了大量的关键性工作．1980 年，航磁项目终于获集体重大贡献奖，得到地质部嘉奖令：“在地质找矿工作中做出重大贡献，特予嘉奖．”本书前两章就是该项目的数学理论基础、数据处理方法及以侯重初同志为主探索出和发展了的平面上的位场转换的新方法．平面是曲面的特殊情况，只有对平面上的位场理论、位场转换原理和方法了解透彻后才能将它发展为曲面上的位场理论．

1981 年 8 月，航磁项目获得成功后，重磁研究室给我的第一个任务是：深入学习、消化、吸收国际位场权威 B. K. Bhattacharyya 和 M. E. Navolio 在 1976 年提出的所谓频率域拉普拉斯方程 $u^2+v^2+w^2=0$. 经过三个月的艰苦努力，钻研了有关的经典著作和参考文献，1981 年 11 月的一天清晨，我突然意识到这个关系式从数学角度考虑是错误的. 经再三思考，我列举了三条理由. 在和侯重初同志多次讨论后，她从物理角度也确认这个关系式是错的. 我们合写了《关于位场频率域表示的一个理论问题》. 由于事关国际权威，《地球物理学报》经过四位专家审查后才决定发表 [1982，25 (5)].

该文于 1982 年 9 月发表后，我又针对重磁研究室长达五年一直回避并认为很难理解的位场权威 B. K. Bhattacharyya 于 1977 年在“曲面延拓”一文中提出的“磁化强度分布的空间梯度 μ”这一概念进行认真思考，反复钻研. 经过努力，发现并证明 B. K. Bhattacharyya 等给出的总场沿任意方向上分量的积分表达式的推导过程在数学上有多处错误，因而其结论和 μ 的物理意义的解释也是错误的. 刘奎俊同志曾努力寻求总场沿任意方向上分量的积分表达式的正确推导过程，当时正值我脱产学习英语，在他的催促下，我们共同导出总场沿任意方向上分量的正确表达式. 为严肃慎重对待这个积分表达式，作者利用单位正方形偶层面，通过相当复杂的解析分析检验了表达式的正确性，并指出该表达式是实现位场延拓、分量转换及高阶导数计算的理论基础，并推导出有关的一系列基本公式. 一年后，我与侯重初同志共同导出一个被称为“磁化方向与磁场分量方向可以互换”的定理. 从而将平面上以快速傅里叶变换为工具的位场转换的全部内容推广到曲面上，建立了一个功能比较齐全的曲面位场转换系统. 1988 年，由于得到部控局管项目资金的支持，作者与张培琴、张庆合、蔡越虹研究多重网格方法用于曲面位场转换系统的计算并研制软件，1990 年 11 月经地矿部物探局组织专家评审通过，在国内外处于领先地位. 1992 年，作者和蔡越虹教授将该

表达式的积分核应用于散乱位场数据网格化. 1995 年，作者对互换定理给出新的证明，使定理的使用条件得到推广. 以上就是本书后两章内容的重点. 第三章是过渡性的一章，是我们曾发表在 1984 年 27 卷第 6 期《地球物理学报》上的“剖面曲线上的位场转换系统”一文的扩充. 由此可见，本书是我们有关位场的科研成果的总结与系统化.

本书写作有两个特点：第一，将我们的科研成果讲深说透，重点突出，条理清楚；第二，尽量结合地球物理数字信息处理的实际. 本书对国外数学家的译名以《中国大百科全书·数学》为准. 插图依章次编号，公式依节次编号，参考文献列于每章之后. 本书大部分内容曾给有关研究生及高工讲授过. 作者专职、兼职教了近四十年的书，我衷心希望本书能作为某些高校研究生课程的教材.

本书是在熊光楚教授、张锁春研究员不断鼓励与支持下写成的. 本书经中国地质大学（北京）安玉林教授、国土资源部航遥中心张培琴高工认真审阅指正，他们提出许多中肯的意见，促使我对 1999 年的初稿进行了全面修改. 本书的出版还得到丛书常务编委蒋伯诚教授和河南科学技术出版社的大力支持，谨在此一并致以衷心的感谢.

本书第二章的内容是由于教学上的需要，在修改时补充的，撰写的内容主要是侯重初同志的工作，故将本书改为“编著”.

由于水平所限，书中难免存在不少缺点甚至错误，欢迎读者批评指正.

作者

2000 年 12 月于北京

本书主要符号

1. 矢量 $\boldsymbol{F}$ 在第一、第二和第三坐标轴上的分量，记为 F_1, F_2, F_3.

2. 函数 F 或矢量 $\boldsymbol{F}$ 关于变量 x, y, z 的偏导数，记为 F_x, F_y, F_z 或 $\boldsymbol{F_x}, \boldsymbol{F_y}, \boldsymbol{F_z}$. 下标 x, y, z 专做偏导数之用.

3. $\mathrm{grad}_{P(x,y,z)} \equiv \nabla_{P(x,y,z)} \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$

4. $U(x, y, z)$ 关于 $\boldsymbol{t}$ 方向的方向导数，用记号 $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{t}}U(x, y, z)$.

5. 按地球物理界的习惯，以 U 表示磁位，以 V 表示重力位，且

磁场 $\boldsymbol{H} = -\mathrm{grad}\,U$；重力场 $\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\,V$.

6. 偶层位亦用 U 表示，单层位用 V 表示.

7. 体密度用 ρ 表示，面密度用 σ 表示，线密度用 λ 表示.

8. 空间域的自变量用 (x, y, z)、(ξ, η, ζ)，而频率域的自变量用 (u, v, w) 或 (λ, μ, ν) 表示，特别将 λ, μ, ν 专记为圆频率（角频率）. 而两者混合出现时，如 $F(u, v; z)$ 表示在空间域 z 平面上，对前二个变量作了傅里叶(Fourier)变换.

9. $\longleftrightarrow$ 表示傅里叶变换对.

10. 点 $M(\alpha, \beta, \gamma)$ 在曲面 S 上变化，点 $P(x, y, z)$ 则在曲面 S 以外的空间变化.

11. 字母 i 表示曲面内侧，e 表示曲面外侧.

目　录

第一章　平面上的位场理论

位场主要指重力场和磁力场.位场方法是我国地球物理勘探中开展最早的方法.自1945年9月翁文波先生在甘肃玉门油矿组队开展重力勘探算起,我国开展重力勘探工作已有55年的历史.地壳中的岩石和矿体的磁性差异明显,地球磁场信息丰富,早在20世纪50年代,我国就做了大量地面磁法的普查和详查工作,开展了航空磁测工作.位场方法被广泛地应用于解决基础地质、深部地质、区域地质等问题,应用于普查探测金属、非金属矿产、能源及水利资源等领域中.位场方法的特点是简便、快速,探测深度大,应用范围广,工作成本低,覆盖面积大.

大量的位场数据是在近似于平面的区域上采集的.平面是曲面的特殊情况而且是最简单的情况.只有对给定值在平面上的位场理论、位场转换原理和方法了解清楚且研究透彻之后,才能发展或创造出一套曲面上的位场理论和方法.

1.1　重力位和磁位间的泊松公式

重力位和磁位是本书讨论的主角.为使读者有一清晰的概念,同时也为了今后叙述和记号上的方便,这一节将简要地回忆重力位、磁位和位与场的基本关系.把重力位和磁位联系起来的著名的泊松公式在本书中将多次用到.这一节给出由中国地质科学院吴宣志研究员推广了的泊松公式及其证明.

1.1.1 重力位

在定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有一质点，其质量为 m，于是在全空间就有了一个矢量场(即指向定点 M_0 的中心力场). 假设在 M_0 的周围空间任意点 $P(x,y,z)$ 处有一单位质量试验质点，按牛顿定律得知点 M_0 对点 P 的引力 F 大小为

$$F = G\frac{m}{r^2},$$

式中 G 为万有引力常数，r 为试验点 P 到定点 M_0 的距离，力的方向是从点 P 到点 M_0. 记 $\boldsymbol{r}_{PM_0}$ 为从点 P 到点 M_0 的矢量，则该力可用矢量表示为

$$\boldsymbol{F} = G\frac{m}{r_{PM_0}^2}\frac{\boldsymbol{r}_{PM_0}}{r_{PM_0}},$$

称 $\boldsymbol{F}$ 为引力场强.

在空间笛卡儿坐标系下，记点 P 坐标为 (x,y,z)，点 M_0 坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则

$$\boldsymbol{r}_{PM_0} = (x_0 - x)\boldsymbol{i} + (y_0 - y)\boldsymbol{j} + (z_0 - z)\boldsymbol{k},$$

$$r_{PM_0} = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} = r.$$

因为矢量 $\boldsymbol{r}_{PM_0}$ 的方向余弦为 $\frac{x_0 - x}{r}, \frac{y_0 - y}{r}, \frac{z_0 - z}{r}$，所以引力 $\boldsymbol{F}(P)$ 在三个坐标轴的射影为

$$F_1 = G\frac{m(x_0 - x)}{r^3}, F_2 = G\frac{m(y_0 - y)}{r^3}, F_3 = G\frac{m(z_0 - z)}{r^3}.$$

这就是引力场强的三个分量. 本书用下标 1、2、3 标志矢量在第一、第二、第三三个坐标轴上的分量，而将下标 x,y,z 留给偏导数之用.

由上可知：

$$\boldsymbol{F}(P)=Gm\frac{x_0-x}{r^3}\boldsymbol{i}+Gm\frac{y_0-y}{r^3}\boldsymbol{j}+Gm\frac{z_0-z}{r^3}\boldsymbol{k}. \qquad (1.1.1)$$

不难验证，$\boldsymbol{F}$ 的三个分量 F_1,F_2,F_3 正是函数

$$U(x,y,z)=G\frac{m}{r}$$

分别对 x,y,z 的偏导数. 例如：

$$\begin{aligned}U_x&=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(G\frac{m}{r})=Gm\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r})\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\\&=Gm(-\frac{1}{r^2})(-\frac{x_0-x}{r})=F_1.\end{aligned}$$

把单位质量从点 Q 沿空间任意曲线 L 移动到点 P，引力场对该单位质量点所作的功

$$\begin{aligned}W&=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L F_1\mathrm{d}x+F_2\mathrm{d}y+F_3\mathrm{d}z\\&=Gm\int_L\frac{x_0-x}{r^3}\mathrm{d}x+\frac{y_0-y}{r^3}\mathrm{d}y+\frac{z_0-z}{r^3}\mathrm{d}z\\&=Gm\int_{r_Q}^{r_P}\mathrm{d}(\frac{1}{r})=Gm(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q}).\end{aligned}$$

上面变力所作的功，其对应的矢量的线积分恰好是全微分（恰当微分），这就决定了功与运动所经过的路径无关而只决定于运动的起始点和终点的位置. 这个性质叫力场的保守性. 引力作功与路径无关的另一种等价说法是沿任意封闭路径引力作功为零，也就是说环流

$$\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0.$$

对于保守力场可引入一个标量函数来描述，其具体做法是固定一点 Q，对空间任意点 P（M_0 点除外）赋予一个标量 $V(P)$——单位质点从 Q 点移动到点 P 引力所作的功：

$$V(P)=Gm(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_Q}).$$

为了方便,把参考点(固定点)放到无穷远处,则

$$V(P)=Gm\frac{1}{r_P}=\int_{\infty}^{r_P}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \tag{1.1.2}$$

由于引力场是保守场,可知这个定义是单值的、有意义的.称 $V(P)$ 为引力场的位(有些书称为位势或势),简称引力位.故引力场既是保守场又是有位势的场.

由引力的可加性和功的可加性,引力场强和引力位的概念可推广到任意分布的质量体激发的引力场:

$$\boldsymbol{F}=G\int_{\Omega}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}m=G\int_{\Omega}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v, \tag{1.1.3}$$

$$V=G\int_{\Omega}\frac{1}{r}\mathrm{d}m=G\int_{\Omega}\frac{\rho}{r}\mathrm{d}v. \tag{1.1.4}$$

式中 Ω 可记为 $\Omega(\xi,\eta,\zeta)$,指质量体分布的区域,$r=[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}$,$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为质量体分布的体密度,有

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}v=\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega.$$

上面从场强推导出场位.反过来,可以从场位确定场强:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}_P V(P)&=G\mathrm{grad}_P\int_{\Omega}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}v\\&=G\int_{\Omega}\rho(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{grad}_P\frac{1}{r}\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

式中

$$\mathrm{grad}_P=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

由于

$$\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r},$$

可得

$$\mathrm{grad}_P V=G\int_{\Omega}\frac{\rho\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v=\boldsymbol{F}(P), \tag{1.1.5}$$

即

$$\boldsymbol{F}(P)=\mathrm{grad}_P V=V_x\boldsymbol{i}+V_y\boldsymbol{j}+V_z\boldsymbol{k}. \tag{1.1.6}$$

式中