高等学校教学用書

綫性代数学

И. М. ГЕЛЬФАНД 著
刘 亦 珩 譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

線性代數學

И. М. 蓋爾馮德著
劉亦珩譯
趙根榕校

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國家技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的蓋爾馮德（И. М. Гельфанд）著“線性代數學”（Лекции по линейной алгебре）1951年版譯出。

本書可供高等學校作爲教學參考書。

本書於1957年第一次印刷時由商務印書館改高等教育出版社出版。

線 性 代 數 學

И. М. 蓋爾馮德著

劉亦珩譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）
京華第一印書館印刷　新華書店總經售

開本 850×1168 1/32　印張 7 1/16　字數 186,000
一九五三年十二月商務初版（共印 10,000 册）
一九五七年一月新一版
一九五七年一月上海第一次印刷
印數 1—4,500　　定價（7）¥ 0.92

第二版　原序

第二版和第一版不同之點，是一系列重要變更及補充。其最顯著者如下：在書末加了兩個附錄，一個關於線性代數的計算方法，另一個關於攝動論；添了二節，一節關於特徵值的極值性質，一節關於 λ-矩陣（§§ 17 及 21）；重新改寫了線性變換約爾旦標準形的一章，改作了第四章。此外又作了許多較小的補充和更正。這個新的課本係我和茨·雅·沙皮羅共同寫成的。

我向阿·蓋·古羅士表示謝意，他將他的張量代數講義稿交給我使用。我感謝斯·維·佛民，他給我很多有價值的意見。

又感謝穆·勒·切衣特里納，他幫助整理了原稿又提出不少忠告。

一九五〇年九月

依·蓋爾馮德

第一版 原序

本書係以著者在莫斯科國立大學及白俄羅斯國立大學力學數學系的線性代數學講義作基礎的。

在寫本書時，謝爾傑·瓦西列維其·佛民曾參加了許多工作。他的幫助是如此重要，若沒他這本書或許寫不出來。

著者向白俄羅斯國立大學副教授阿·耶·涂列茲珂表示謝意，他將著者在一九四五年所講的講義加以整理修正後的原稿交給著者使用。也向得·阿·萊科夫致謝，他仔細讀過原稿，而且作了若干寶貴的批評。

本文的若干地方用小號字印的，這些部分不必用作基本課文，並且第一次略讀時可以刪去。

一九四八年一月

依·蓋爾馮德

目　　錄

第一章　n 維空間.線性及雙線性型

§1　線性(仿射) n 維空間

1. 線性空間的定義　常會遇到些對象，對它們定義了加法和乘以數的運算。我們將舉些例子：

例 1　在幾何學裏，這種對象是三維空間裏的向量，亦即有向線段。此時，若二個有向線段由平移可以相重時，就認爲它們確定同一向量。因此，將所有這些線段都從我們叫作原點的某一點引出時，是比較方便的。向量加法的運算，如所周知，定義如下：我們將以 x 及 y 爲邊的平行四邊形的對角線看作二向量 x 與 y 的和。用既知的方法，乘以數的運算也被導入。

例 2　在代數學裏，我們遇到 n 數組 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$（例如矩陣的列，一次形式的係數集合等等）。對於這些組，加法及乘以數的運算，通常這樣導入：$x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 及 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 的和便是數組

$$(x+y)=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)。$$

我們將組 $\lambda x=(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n)$ 看作組 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 與數 λ 的積。

例 3　在數學分析裏，函數的加法及其與數的乘法也被定義。今後爲確切計，我們將考察在線段 $[a, b]$ 上給出來的連續函數的全體。

在所舉各例中，加法及乘以數的運算可發生在完全相異的對象上。爲了用同一觀點研究所有這些例子，我們將導入線性或仿射空間的概

念。

定義一 元素 $x, y, z, \cdots$ 的集 R, 如果滿足下列條件時,就叫做線性(仿射)空間:

(a) 對於每二個元素 x 及 y, 對應着叫作 x 與 y 的和的一個元素 z, 元素 x 與 y 的和用 $x+y$ 表示;

(b) 對於每個元素 x 及某一域的每一數 λ, 對應着叫作元素 x 乘以數 λ 的積的一個元素 λx;

則集 R 叫作線性(仿射)空間。

這些運算必須滿足下列要求(公理):

I. 1° $x+y=y+x$ (可換性),

2° $(x+y)+z=x+(y+z)$ (結合性),

3° 存在着元素 0, 對於任意 x 恆有 $x+0=x$。元素 0 叫作零元素。

4° 對於每個元素 x 存在着用 $-x$ 表示的一個元素,使 $x+(-x)=0$。

II. 1° $1 \cdot x=x$,

2° $\alpha(\beta x)=\alpha\beta(x)$。

III. 1° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

2° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$。

我們未曾講過,到底怎樣決定加法及乘以數的運算,這不是偶然的。對這些運算我們僅要求滿足上述公理。所以每逢遇到適合上列各條件的運算時,我們有權將它們看作加法及乘以數的運算,並且將使這些運算能成立的那些元素的全體看作線性空間。

我們留給讀者驗證:在所舉過的例 1—3 裏,這些公理都成立。所以 1—3 都是線性空間的例。

再考察幾個例:

例 4 次數不超過自然數 n, 且具有普通多項式加法及乘以數運

算的多項式全體,構成線性空間。

要注意,n 次多項式的集不構成線性空間,因為兩個這樣多項式的和可能變成較低次的多項式。例如

$$(t^n+t)+(-t^n+t)=2t\text{ 。}$$

例 5 n 階矩陣是空間 R 的元素。我們將 $\|a_{ik}+b_{ik}\|$ 叫作二矩陣 $\|a_{ik}\|$ 及 $\|b_{ik}\|$ 的和,$\|\lambda a_{ik}\|$ 叫作矩陣 $\|a_{ik}\|$ 與數 λ 的積。同時它的零元素是僅由零所組成的矩陣。可以驗證線性空間所有公理在此都能適合。

我們將線性空間的元素叫作向量。這個字時常用於較狹的意義(例如在例1),這種情況決不使我們混亂。與此字相連的幾何學的概念,幫助我們理解並且有時預見若干結果。

若參與定義線性空間的數 $\lambda, \mu, \cdots$ 是實的,則該空間叫作實線性空間。若這些數 $\lambda, \mu, \cdots$ 取自複素數域時,則 R 叫作複素線性空間。

更廣泛些,我們可以設想 $\lambda, \mu, \cdots$ 是任意域 K 的元素。此時 R 叫作 K 域上的線性空間。下列所講的許多概念和定理,特別是本節所有內容,都能自動地推到任意域上的線性空間裏去。但在第一章裏我們卻常假定空間 R 是實線性空間。

2. 空間的維數(次元) 向量的線性相關及線性無關等概念,今後將演重要脚色。

定義二 設 R 是線性空間。若有數 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \theta$,其間至少一個不為零,且使下列關係

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdots+\theta v=0 \tag{1}$$

成立時,則向量 $x, y, z, \cdots, v$ 叫作線性相關的。

不是線性相關的諸向量,叫作線性無關的。換言之:

若等式

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\cdots+\theta v=0$$

僅在 $\alpha=\beta=\gamma=\cdots=\theta=0$ 才可能時,則向量 $x, y, z, \cdots, v$ 叫作線性無關的。

設向量 $x, y, z, \cdots, v$ 是線性相關的,亦即它們用(1)形的關係式

關聯着，該式的係數至少一個不爲零，例如 α。則

$$\alpha x=-\beta y-\gamma z-\cdots-\theta v 。$$

除以 α 而命

$$-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda,\ -\frac{\gamma}{\alpha}=\mu,\cdots,\ -\frac{\theta}{\alpha}=\zeta,$$

得

$$x=\lambda y+\mu z+\cdots+\zeta v。\tag{2}$$

若向量 x 用向量 $y, z, \cdots, v$ 表示成（2）形時，我們將說 x 是向量 $y, z, \cdots, v$ 的線性結合。

所以，向量 $x, y, z, \cdots, v$ 線性相關時，至少它們的一個是其餘的一次結合。我們留給讀者驗證其逆亦真，亦即若干個向量之一是其餘的線性結合時，它們是線性相關的。

習題 1 驗證：向量 $x,y,z,\cdots,v$ 間若有零向量時，它們必然是線性相關的。

習題 2 求證：若對於線性相關的向量，再添上任意向量 $u, v, \cdots$ 時，則所有這些向量也必都是線性相關的。

現在我們轉到空間的維數（次元）的概念的定義。

在一直線上向量的全體內，每兩個向量成比例，亦即線性相關。在平面上可求出兩個線性無關的向量，而每三個卻已經線性相關。若 R 是三維空間內向量的全體，則在 R 內可求得三個線性無關的向量，但每四個向量都線性相關。

我們見到，直線上、平面內、三維空間裏線性無關向量的最多個數，與幾何學裏通常稱爲直線、平面、空間的次元的數完全一致。所以自然推出一般定義。

定義三 若在線性空間 R 內有 n 個線性無關的向量，並且沒有更多個數的線性無關向量時，則該一次空間 R 叫作 n 維的。

若在空間 R 內能求得任意個數的線性無關向量時，則 R 叫作無限維的。

無限維空間構成專門研究的對象。在本書我們僅處理有限維數的

空間。

在上邊考察過的例 1—5 裏，求對應空間的維數。

例 1　如前所述，在例 1 的空間 R 內，有三個線性無關的向量，而每四個向量都線性相關。所以 R 是三維的。

例 2　R 是一個空間，其向量爲 n 實數組。

在此空間內可指出來 n 個線性無關向量，例如：

$$x_1=(1, 0, \cdots, 0),$$
$$x_2=(0, 1, \cdots, 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n=(0, 0, \cdots, 1)$$

（我們留給讀者證明這些向量眞是線性無關的）。但當 $m>n$ 時，所有 m 個向量都是線性相關的。實際上，命

$$y_1=(\eta_{11}, \eta_{12}, \cdots, \eta_{1n}),\ y_2=(\eta_{21}, \eta_{22}, \cdots, \eta_{2n}), \cdots;$$
$$y_m=(\eta_{m1}, \eta_{m2}, \cdots, \eta_{mn})$$

是 m 個向量，且 $m>n$。在矩陣

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} & \cdots & \eta_{mn} \end{pmatrix}$$

裏，線性無關的列數不能大於 n（行數）。因爲 $m>n$，所以我們的 m 列是線性相關的，而這就是說向量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 是線性相關的。

所以，在給出來的情形，空間 R 的維數是 n。

例 3　R 是連續函數的空間。設 N 是任意整數。此時函數 $f_1(t)=1$，$f_2(t)=t, \cdots, f_N(t)=t^{N-1}$ 形成 N 個線性無關向量的集（證明留給讀者）。我們見到，在此空間內有任意個數的線性無關的函數，亦卽 R 是無限維的。

例 4 R 是次數 $\leqslant n-1$ 的多項式的空間。在它裏邊 n 個多項式 $1, t, \cdots, t^{n-1}$ 是線性無關的。可以指明 R 內沒有更多個數的線性無關的向量。因此 R 是 n 維的。

例 5 留給讀者證明，n 階方陣 $\|a_{ik}\|$ 的空間是 n^2 維的。

3. n 維空間的基與坐標

定義四 n 維空間 R 內線性無關的 n 個向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的全體，叫作 R 的基。

例如，在例 1 所考察的空間 R（三維空間），任意三個不在同一平面上的向量都形成 R 的基。

按 n 維空間的定義，在它裏邊存在着 n 個線性無關的向量，亦即存在着基。

定理一 n 維空間 R 的每個向量 x，可表示成基的向量的線性結合，且僅限於一種方式。

證明：設向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 形成 R 的基。給它們再添上 R 的任意向量 x。向量 $x, e_1, e_2, \cdots, e_n$ 已經是 $n+1$ 個了，所以按 n 維空間的定義，它們必是線性相關的，亦即

$$\alpha_0 x+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n=0 \tag{3}$$

在此並不是所有 α_i 都爲零，數 α_0 顯然不爲零。因爲不然時由公式（3）推出向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的線性相關性。

由等式（3）將向量 x 表示爲：

$$x=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_0} e_2-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n\text{。}$$

我們證明了每個向量 $x \in R$❶ 是向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的線性結合。

現在我們證明所得展開式的一意性。設想有兩種展開式：

$$x=\xi_1 e_1+\xi_2 e_2+\cdots+\xi_n e_n,$$

及

$$x=\xi_1' e_1+\xi_2' e_2+\cdots+\xi_n' e_n\text{。}$$

❶ 記號 $x \in R$ 表示 x 屬於 R。

相減，得

$$0=(\xi_1-\xi_1')e_1+(\xi_2-\xi_2')e_2+\cdots+(\xi_n-\xi_n')e_n\text{。}$$

因爲 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是一次獨立的，該式僅在

$$\xi_1-\xi_1'=\xi_2-\xi_2'=\cdots=\xi_n-\xi_n'=0$$

時才可能，亦即

$$\xi_1=\xi_1',\ \xi_2=\xi_2',\cdots,\ \xi_n=\xi_n'\text{。}$$

展開式的一意性得證。

定義五　若 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 n 維空間的基，且

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n, \tag{4}$$

則數 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 叫作向量 x 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的坐標。

定理一表示着，每個向量在既知基 $e_1, e_2,\cdots, e_n$ 內有坐標並且由它一意地決定。

若向量 x 在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 內有坐標 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，且向量 y 有坐標 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，亦卽若

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n,$$

$$y=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\cdots+\eta_ne_n,$$

則 $$x+y=(\xi_1+\eta_1)e_1+(\xi_2+\eta_2)e_2+\cdots+(\xi_n+\eta_n)e_n,$$

亦卽向量 $x+y$ 有坐標 $\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n$。同樣，向量 λx 有坐標 $\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots, \lambda\xi_n$。

所以，對於向量 x 及 y 的加法，其坐標各相加。對於向量 x 乘以數 λ 的乘法，其坐標都乘以該數。

倘祇是零向量，則其所有坐標都等於零，這也是明顯的。

例 1　對於三維空間的情形，我們的向量的坐標的定義與解析幾何內在某一坐標系（一般說來不是直交的）中向量坐標的定義完全一致。

例 2　設 R 是一個空間，其向量是 n 數組 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$。我們取基

$$e_1=(1,1,1,\cdots,1),$$
$$e_2=(0,1,1,\cdots,1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,0,\cdots,1)。$$

求向量 $x=(\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n)$在此基的坐標 $\eta_1, \eta_2,\cdots, \eta_n$。由定義

$$x=\eta_1e_1+\eta_2e_2+\cdots+\eta_ne_n,$$

亦即
$$(\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n)=\eta_1(1,1,1,\cdots,1)+$$
$$+\eta_2(0,1,1,\cdots,1)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\eta_n(0,0,0,\cdots,1)=$$
$$=(\eta_1,\eta_1+\eta_2,\cdots, \eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n)。$$

所以數 $\eta_1, \eta_2,\cdots, \eta_n$ 由下列方程式求出：

$$\eta_1=\xi_1,$$
$$\eta_1+\eta_2=\xi_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n=\xi_n。$$

由此，
$$\eta_1=\xi_1,\ \eta_2=\xi_2-\xi_1,\ \cdots,\ \eta_n=\xi_n-\xi_{n-1}。$$

在空間 R 內我們現在將考察一種基，在其內向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的坐標與決定該向量的數 $\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n$ 間的關係取最簡形。設

$$e_1=(1,0,\cdots,0),$$
$$e_2=(0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(0,0,\cdots,1)。$$

此時
$$x=(\xi_1, \xi_2,\cdots,\xi_n)=$$
$$=\xi_1(1,0,\cdots,0)+\xi_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+\xi_n(0,0,\cdots,1)=$$
$$=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n。$$

所以，在空間 R 內每個向量定義作 n 數組 $(\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n)$ 時，這些數可

當作向量 $x=(\xi_1\,\xi_2, \cdots, \xi_n)$ 在基 $e_1=(1,0,\cdots,0)$, $e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots$, $e_n=(0,0,\cdots,1)$ 內的坐標而處理。

習題 求證,在任意基

$$e_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}),$$
$$e_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$e_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn})$$

內,向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的坐標 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是數 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的線性結合。

例 3 R 是一個空間,其向量是次數 $\leqslant n-1$ 的多項式。最簡單的基是向量 $e_1=1$, $e_2=t$, $\cdots$, $e_n=t^{n-1}$ 的全體。多項式 $P(t)=a_0t^{n-1}+$ $+a_1t^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ 在此基內的坐標容易看出是它的係數 a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1}。

現在選取其他的基:

$$e'_1=1,\ e'_2=t-a,\ e'_3=(t-a)^2,\ \cdots,\ e'_n=(t-a)^{n-1}。$$

每個多項式 $P(t)$ 由戴勞公式可表示成下面的形式:

$$P(t)=P(a)+P'(a)(t-a)+\cdots+\frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}。$$

所以 $P(t)$ 在此基內有坐標

$$P(a),\ P'(a),\ \cdots,\ \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}。$$

4. n 維空間的同構 在上邊列舉的例裏,按照這裏所考察的性質看來,有些空間彼此並無差別。例如例 1 的普通三維空間與向量定義爲三實數組的空間 R' 便是這樣的。實際上,在 R 裏選取確定的坐標系後,我們可使 R 的每個向量與其三個坐標組,卽空間 R' 的向量相對應。對於向量加法它們的坐標相加;對乘以數的乘法,向量的所有坐標乘以該數。所以由一次空間的定義所導出的而且發生在 R 裏的幾何學的事實,我們可以在 R 裏並且在三數組的空間 R' 裏平行敘述。

現在我們將表述出,怎樣的空間我們將看做相同的(同構的)。

定義六 今有一次空間 R 與 R'。若在向量 $x\in R$ 與向量 $x'\in R'$ 之間可作成相互一意的對應❶ $x\longleftrightarrow x'$，使向量 x 對應着向量 x'，且向量 y 對應着向量 y'，則

1° 向量 $x+y$ 對應着向量 $x'+y'$，

2° 向量 λx 對應着向量 $\lambda x'$

時，R 與 R' 叫作同構的。

發生了一個問題：怎樣的空間彼此同構，並且怎樣的空間不同構。

兩個不同維的空間顯然彼此不是同構的。

事實上，設 R 與 R' 同構。若 $x, y, \cdots$ 是 R 的向量，而 $x', y', \cdots$ 是 R' 內和它們對應的向量，則按同構定義的條件 1° 及 2°，等式 $\lambda x+$ $+\mu y+\cdots=0$ 及等式 $\lambda x'+\mu y'+\cdots=0$ 等價。因而 R 裏線性無關向量對應着 R' 裏線性無關向量，反之亦然。所以 R 及 R' 裏線性無關向量的最大個數完全相同，亦即空間 R 與 R' 的維數相等。於是不同維數的空間不能彼此同構。

定理二 所有同維數 n 的空間彼此同構。

證明：設 R 及 R' 是兩個 n 維空間。在 R 內選取基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，且在 R' 內取任一基 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$。使與向量

$$x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n \tag{5}$$

相對應的是向量 $x'=\xi_1e_1'+\xi_2e_2'+\cdots+\xi_ne_n'$，

亦即與(5)具有同樣係數的向量 e_i' 的線性結合。

這個對應是相互一意的。事實上，每個向量 x 可以一意地表成(5)形，所以數 ξ_i，於是向量 x' 可由向量 x 一意地決定。由於空間 R 及 R' 在構成上完全平等，所以每個向量 x' 僅對應着 R 的一個元素。

---

❶ 在二集 R 與 R' 的元素間作成的對應，若使

1° R 的每個元素對應着 R' 的一個，並且僅一個元素，

2° R' 的每個元素對應着 R 的一個，並且僅一個元素

時，這個對應叫作相互一意的。