科學譯叢

——數學：第9種——

三十年來的蘇聯數學
(1917—1947)

代數學

H. Г. 切伯塔廖夫等著

科學出版社出版

科學譯叢

——數學：第9種——

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

代數學

Н. Г. 切伯塔廖夫
А. Г. 庫羅什 著
А. И. 馬爾切夫
馮康、曾肯成、萬哲先 譯

科學出版社出版
1954年11月

代　數　學

АЛГЕБРА

原文載"三十年來的蘇聯數學"

"Математика в СССР за 30 лет"

Гостехиздат, 1948

Н. Г. Чеботарёв
А. Г. Курош　　原著
А. И. Мальцев

馮康、曾肯成、萬哲先　翻譯

科學出版社出版
北京東四區帽兒胡同2號

藝文書局鑄字印刷廠印刷
上海嘉善路113號

新華書店發行

(譯) 54044	1954年11月第一版
自然：072	1954年11月第一次印刷
(滬) 0001—5,700	開本：$787\times1092\frac{1}{25}$
字數：100,000	印張：$6\frac{12}{25}$

定價：9,500元

內 容 介 紹

本書由"三十年來的蘇聯數學"一書中的三篇論文組成：

1. 代數學 I (多項式和域的代數學)：此文概括地敍述了葛羅瓦理論、代數數論和方程的根在複變數平面上的分佈理論在蘇聯的發展。

2. 代數學 II (羣、環和格)：此文主要論述蘇聯代數學家在羣論各個方面的豐富研究和對環及格的研究。

3. 拓撲代數與李氏羣：論述三十年來蘇聯數學家在拓撲羣及其他拓撲代數結構、李氏羣與李氏代數的研究上所獲的成就。

代數學 I（多項式和域的代數學）…………………………… 1
§1. 葛羅瓦理論…………………………………………… 3
§2. 代數數………………………………………………… 13
§3. 方程的根在複變數平面上的分佈…………………… 23
代數學 II（羣、環和格）……………………………… 37
§1. 總論…………………………………………………… 37
§2. 羣的直接積…………………………………………… 42
§3. 自由羣和羣的自由積………………………………… 46
§4. 阿培爾羣……………………………………………… 49
§5. 週期羣、無限可解羣和特殊羣……………………… 53
§6. 有限羣論……………………………………………… 58
§7. 羣論中的其他問題…………………………………… 64
§8. 具一種運算的代數系統的一般理論………………… 68
§9. 環論和代數論………………………………………… 72
§10. 格論………………………………………………… 79
拓撲代數與李氏羣 ……………………………………… 83
§1. 拓撲羣………………………………………………… 84
§2. 拓撲域和拓撲環……………………………………… 100
§3. 李氏羣………………………………………………… 102
§4. 李氏代數……………………………………………… 110
§5. 李氏代數的子代數…………………………………… 116
參考文獻 ……………………………………………… 121

代數學 I (多項式和域的代數學)

Н. Г. 切伯塔廖夫

十五年前我曾寫過一篇類似這樣的介紹文字[1]，其範圍在當時曾包括整個代數學的全部。在現時，由於代數學在蘇聯已有巨大的進展，以至產生了將代數學的全部材料分作兩篇文章來論述的必要。"代數學 II" 一文，主要論述由於 E. 諾特 (E. Noether) 學派的功績而獲得巨大發展，而在我國則在離散無限羣論這一方向 [O. Ю. 施密特 (Шмидт) 及 A. Г. 庫羅什 (Курош)] 特別發達的羣論和環論；而本文則包括代數學中產生較早的幾個部門：卽葛羅瓦理論、代數數論以及方程的根在複變數平面上分佈的理論這三方面結果的說明。這些部門中的後二者，按其實質來說，只是部分地屬於代數學的領域。代數數論在一方面和葛羅瓦理論有密切的關係，因而可以看作代數學的一個部門；而在另一方面，則它包括初等數論中的定律對代數數的推廣，由於這一點，把它歸在數論的領域之內也是非常自然的。與此相同，一百年前曾是代數學核心的根的分佈的理論，在現時由於其結果和方法都逐漸被推廣於超越函數，也

---

1) Н. Г. 切伯塔廖夫：代數學，論文集"蘇聯科學十五年""數學"，М.—Л. ГТТИ (1932), 5 — 36. 爲簡略計下文中記作 AI.

正在向解析函數論轉移。這裏不但顯示出了當數學本身增長和對其課題的理解有所改變時，所必然發生的數理科學的重新分類的一般過程，而且也顯示了代數學在一系列的其他科目中所起的作用。如果我們對數學的發展過程進行一番探索，即可看出，代數學乃是數學中產生新觀念和新概念的搖籃，這些新觀念在後來被推廣了、滲透到其他部門中去了，而代數學的面貌也相當迅速地隨着時代而改變着。因此，要想給代數學找到一個令人滿意的定義，實在是一件非常困難的事情。由此可以理解，在“代數學 II”中所討論的幾個比較近代的代數部門具有更多的“代數學的性質”。然而在這裏我們也可以看到諸如理想子環和格這一類的概念在其他數學部門中的運用。

在蘇聯，Д. А. 格拉維（Граве）學派在“代數學 I”這一方向保持着主導作用。這一方向發展的速度雖不及“代數學 II”這個方向，但在下文中我們可以看到，在我國在這一方向也解決了若干屬於近代數學之列的基本問題。這些問題的解決，有時能推動這一或那一理論的進一步發展。

本文介紹蘇維埃政權成立以來的三十年中“代數學 I”這個方向在蘇聯的發展。但在 AI 中已經詳細介紹過的結果，在這裏只略略提及而已。

我們介紹的範圍不包括線性代數這個部門在內，因爲這個部門在近時已幾乎完全成了一門幾何學的科目（線性向量一函數）；而在另一方面，則矩陣論已成爲某些較專門的科目（線性微分方程、機率、羣論等）的不可或缺的工具。在介紹這些科目時對之應有所討論。

§1. 葛羅瓦理論

1. 首先我們考察關於為葛羅瓦理論奠立基礎的工作。在 AI 中曾詳細地描述過 C. O. 沙東諾夫斯基（Шатуновский）的論文 [1]，在這篇論文中葛羅瓦理論被藉所謂函數模之助導出。在這裏我們將考察 Б. Н. 提龍湼（Делоне）和 Д. К. 法提耶夫（Фаддеев）應用幾何學的方法以解決葛羅瓦理論中某些最困難問題的一系列工作。

Б. Н. 提龍湼很早以前就將多維柵（решётка）使用於代數數論的研究。對每一個 n 次代數數 α，他使 n 維空間中一個點與相對照：如果 α 是實數，就將 α 的第 ν 個共軛數作為這個點的第 ν 個坐標；而如果 α 是複數，則把與 α 共軛的共軛（在實域上）複數偶的實部分和虛部分當作這個點的兩個坐標。Б. Н. 提龍湼最初研究了與代數整數相當的點。因為代數整數的和與差也是代數整數，所以這些點構成一個格。除此之外，他還引進了點的乘積的概念，並把它理解成為這樣一個點，其坐標為各個因子的坐標的乘積。這個觀念給了他和他的學生以研究代數域中的單位和理想數的可能（見下文）。在後來 Б. Н. 提龍湼轉而研究一般的代數數。由適當定義的格出發，他創立了一種新的幾何理論，這種幾何理論乃是葛羅瓦理論到代數域的直接和（依代數論的意義）上的推廣。葛羅瓦理論中所有普通命題的證明都能按幾何學的方式作出。和已知域的子域相當的，是被已知代數所“充滿”（заполнить）的“中分”（биссектрисное）子空間；而和葛羅瓦羣中的自同構相當的，

則是正常代數系卽與正常域相當的代數的“軸重合”（осесовмещения），餘此類推。

以上所述的葛羅瓦理論的幾何學有多方面的應用，其中有許多在 Б. Н. 撻龍湼和 Д. К. 法撻耶夫合著的論文 [2] 中已有所說明。這些應用中最簡單的一種，是具有旣定號徵（сигнатура）（卽共軛根中的共軛複數偶的個數）的 n 次代數域的存在之自然證明。當然，用早先已爲人所熟知的方法來證明這個事實並沒有重大的困難，但在現有的代數數論的巨著中還沒一本書曾作過這一證明。

在這篇論文（以及在較早的論文）中曾導出一個重要的漸近公式。試設想在 n 維空間中已經標出與號徵爲 σ 的 n 次代數整數相當的點。位於一個以原點爲中心、r 爲半徑的超球面內部的這一類點的個數可由漸近公式

$$\nu_{n,\sigma}\cdot\gamma^{\frac{n(n+1)}{2}}+O\left(\gamma^{\frac{n(n+1)}{2}-1}\right)$$

表出，其中 $\nu_{n,\sigma}$ 爲給定每一組 n, σ 的值後極易求出的常數（卽閔可斯基（Minkowski）所計算的體積），而 $O(\cdots)$ 則是著名的藍道（Landau）記號。

如果我們在空間中標出的是與以某一已知羣的子羣作爲其葛羅瓦羣的代數整數相當的點，那末要想導出類似的漸近公式就相當困難了。關於求這樣的漸近公式的觀念並不新鮮：早在 1916 年作者和撻龍湼就討論過藉這些公式之助解決葛羅瓦理論的反問題（卽找出具旣定的葛羅瓦羣的代數域）的可能性。最初的計劃是要計算出可能與係數不大於某一旣定界限的方程

相當的點。這樣的計算是非常粗笨的。其後范德瓦爾登 (van der Waerden) 曾獨立地進行了這一計算並且指出，甚至在最簡單的情形之下，這樣的計算也不能導致所需要的結果：在某些情形下，對一個羣和它的子羣得出的漸近公式完全相同。在這一方面 Б. Н. 提龍湼的觀念是一個很大的進步：那就是尋求與上述漸近公式相似的漸近公式，但對一定的羣來求。Б. Н. 提龍湼對四個可能的三次羣進行了這一工作，而 Д. К. 法捷耶夫 [6] 則對十個可能的四次羣進行了這一工作，對這些羣他得出如下的漸近公式：

對稱羣：$c_1\ r^{10} + O(r^9)$；

八階羣：$c_2\ r^6 \log r + O(r^6)$；

四階羣：$c_4\ r^6 + O(r^5)$；

四階巡迴羣：$c_5\ r^4 \log r + O(r^4)$；

四元羣 (Viergruppe)：$c_6\ r^4 \log^3 r + O(r^4 \log^2 r)$

三階羣：$c_7\ r^4 \log r + O(r^4)$

(包含一個對換的) 二階羣：$c_8\ r^5 + O(r^4)$；

(包含一個雙對換的) 二階羣：$c_9\ r^4 \log r + O(r^4)$；

單位羣：$c_{10}\ r^4 + O(r^3)$

然而對交代羣他沒有能求出漸近公式。

在這裏分析的 Б. Н. 提龍湼和 Д. К. 法捷耶夫的論文，其第二部分討論了葛羅瓦理論的反問題。提出了下面的問題：已知一個葛羅瓦羣爲 F 的域 k 和一個以 $\mathfrak{N}$ 爲正常因子而其商羣 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ 與 F 同構的羣 $\mathfrak{G}$，茲要求將域 k 擴張成爲域 K，使其葛羅瓦羣與 $\mathfrak{G}$ 同構。這個問題稱爲添層 (погружение)

問題[1]。在我們介紹的這篇文章裏證明了：只要 $\mathfrak{N}$ 是一個阿培爾羣且擴張是半直接的，即 $\mathfrak{G}$ 包含這樣一個與 F 同構的子羣 F', $F'\cdot\mathfrak{N}=\mathfrak{G}$, 那末這個問題對任何域 k 都有肯定的解答。Б. Н. 捷龍涅分析過 $\mathfrak{N}$ 爲素數階巡迴羣的情形，而Д. К. 法捷耶夫則研究了一般的情形。有了這個結果就能對遠比敍爾兹早先所從事者爲廣的一類可解羣解決葛羅瓦理論的反問題。

其次，論文中還包括有 Д. К. 法捷耶夫的關於對已知的 k 和 $\mathfrak{G}$ 進行添層的可能性的一般條件。這些條件是作爲必要條件提出來的，但是如果假定葛羅瓦理論反問題的解答存在（或循別的途徑證明這個假定成立），則這些條件同樣也成了充分條件。

添層可能性的條件用三種不同的方法表出，其中前二者對任意的 k 和 $\mathfrak{G}$ 成立，而第三者則在 $\mathfrak{N}$ 爲阿培爾羣的條件下成立。爲了表述這些條件，必須引進所謂交叉積 $\mathfrak{G}\times k$ 的概念，即對羣 $\mathfrak{G}$ 中的元素 σ, 取代數 $\sum_{\sigma} x_\sigma u_\sigma$ 中之元素 u_σ 與之相對應，這裏

$$u_{\sigma_1}\cdot u_{\sigma_2}=u_{\sigma_1\sigma_2}\qquad xu_\sigma=u_\sigma\cdot x^\sigma,$$

其中 x^σ 是域 k 中元素 x 受自同構 σ 作用後的元素。這樣得出來的是一個半單純代數。

若域 k 能被添層成爲一個以 $\mathfrak{G}$ 爲葛羅瓦羣的域，則下述

1) 問題的提出還要早一些，例如在 Н. Г. 切伯塔廖夫 [17] 的論文中就提到了這個問題。

兩個條件中之一必須成立:

1). 交叉積 $\mathfrak{G}\times k$ 有一個係數在有理數域中的 g 次矩陣表示(g 爲羣 $\mathfrak{G}$ 的階),並且在這個表示下與環 $\mathfrak{N}\cdot k$ 相當的矩陣構成這個環的一個與其正則表示等價的表示。

2) 在羣環 $\mathfrak{N}\cdot k$ 中有 g 個元素 l_σ(其中 $\sigma\subset\mathfrak{G}$)存在,這些元素適合條件 $l_{\sigma_1}^{\sigma_2}\cdot l_{\sigma_2}=l_{\sigma_1\sigma_2}$; $l\gamma=\gamma^{-1}$, 如果 $\gamma\subset\mathfrak{N}$.

如果同時 $\mathfrak{N}$ 是一個阿培爾羣,則這些條件可以更換爲下述條件:

3) 代數 $\mathfrak{G}\times k$ 是其中核上的一個全矩陣環。

在最後還證明:如果 $\mathfrak{N}$ 是一個 p^t 階巡迴羣,則條件 3) 同樣也是充分的。

2. 在 A 1(10—12 頁)中已經描述過 H. Г. 切伯塔廖夫的一篇論文,這篇論文將葛羅瓦理論的反問題化成多變數函數的呂洛特(Lürothe)問題或某一戴阿芳(Diophontine)問題,即找出在一個已知其含有有理點的超曲面上的整數點的問題。H. A. 列德惹夫(Леднёв)[2] 從構成一個具有已知界點(критическая точка)的黎曼曲面出發,將葛羅瓦理論的反問題化成尋找一個曲面上的有理點的問題,或者,在更一般的情況下,尋找曲面上坐標屬於已知域 k 之點的問題,這裏域 k 對構成黎曼曲面時所需之方程起着有理數域的作用。

3. H. B. 伏爾尼娜 [1] 解決了在一個無理域中將一個多項式分解成爲不可約因子之積的問題。當然,早先用葛羅瓦理論的方法來解決這個問題也是可能的,但 H. B. 伏爾尼娜方

法的價值在於它並不利用葛羅瓦理論，而是根據藍玆貝爾格(Landsberg)[1] 關於兩個多項式（將其中之一的一個根添加於有理數域之後）分解成爲次數成比例的不可約因子之積的定理。包哀爾(Bauer)[2] 曾不藉葛羅瓦理論之助證明了藍玆貝爾格的定理。伏爾尼娜指出：在包哀爾的觀念中包含着解決這裏所提出的問題的一種方便的計算方法。她的結果有重要的方法上的意義，尤其當它被應用於爲葛羅瓦理論奠立基礎的美爾登斯—沙東諾夫斯基方法時是如此。如所熟知，在這一方法中，從一開始起就要樹立一組在某些無理域中爲不可約的基礎模。

4．同樣也可以提一提 H. Г. 切伯塔廖夫 [21, 22] 和 A. B. 多羅德諾夫(Дороднов)[1] 關於可方月形的研究工作。可方月形的問題還在古遠的時代就已經提出來了。克勞森(Klausen)[3] 曾臆測說可方月形(即藉圓規和直尺之助可作出其圖，而其面積亦可藉圓規直尺作出的月形）總共存在有限多類。如果將圍成月形的圓弧的角度之比表成不可化簡的分數 $\frac{m}{n}$，則根據克勞森的證明，下列幾種類型的月形是可方的：

$$\left.\begin{matrix} m=2 \\ n=1 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} m=3 \\ n=1 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} m=3 \\ n=2 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} m=5 \\ n=1 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} m=5 \\ n=3 \end{matrix}\right\}.$$

藍道[4] 將這個比值的可度性作爲補充假定而證明：如果 m 是一個素數的話，它一定是一個高斯數。恰卡洛夫(Tschakaloff)[5] 指出，當 $m=17$ 時月形不能是可方的，同時還證明了若

1) Journ. reine und angew. Math., 132.
2) Journ. reine und angew. Math., 163.
3) Journ. reine und angew. Math., 21 (1840).
4) Sitzber. Berl. Math. Ges, 2 (1903).
5) Math. Z., 30 (1929).

干一般的命題。他把這個問題導歸於這樣一個問題：m,n 取哪一些互素整值時，方程

$$\left(\frac{y^m-1}{y-1}\right)^2-\frac{m}{n}\cdot y^{m-n}\cdot\left(\frac{y^n-1}{y-1}\right)^2=0 \qquad (1)$$

有有理因子，且這些因子的葛羅瓦羣取 2^σ 的型式。

H. Γ. 切伯塔廖夫 [22] 在解決這個問題時用的方法，是將方程式 (1) 的根展爲 p- 進級數，同時考慮這樣一個事實：如果 m 和 n 給出一個可方月形，則在這些展式中作爲 p 的冪的指數的分數，其分母中只能包含 2 的冪。他用這個辦法證明：在 m 和 n 都是奇數這樣一個補充假定下，克勞森的的臆測，除 $m=9$, $n=1$ 這一種情形之外，是正確的；當 $m=9, n=1$ 時，方程 (1) 有一個因子的葛羅瓦羣具有我們所要求的形式，但得出的月形是虛的。

A. B. 多羅德諾夫在上面引述的工作中繼續了 H. Γ. 切伯塔廖夫的研究，分析了 m 和 n 二數中有一個是偶數的情形。他的研究基本上是用同一方法來進行的，但他沒有徹底解決這個問題。他所討論的情形比 H. Γ. 切伯塔廖夫所討論的情形要困難得不知何許；餘下未經研究的情形只有極其特別的一類：即 m 是 2 的冪，而 n 則爲高斯素數。在最近 A. B. 多羅德諾夫把這一問題也徹底解決了。

A. B. 多羅德諾夫還從事過一個更一般的問題，即找出 m 和 n 的那樣一些值，對之方程式 (1) 有一個因子，其葛羅瓦羣的階爲 2 的冪與 3 的冪之積（這個問題和用繪製圓錐曲線的工具來作月形的圖的問題相當）。就這個問題 A. B. 多

羅德諾夫也徹底完成了對絕大部分情形的研究。對其中某些情形他證明，m 和 n 的可取值只有有限多組，但他沒有指出來這究竟是怎樣一些值。

5. 在 AI 中曾經指出過，克萊因 (Klein) 提出的豫解式問題被 Н. Г. 切伯塔廖夫[14]化成用一個在維數儘可能低的空間中表示出的李氏羣來遮蓋 (одевать) 一個有限羣的問題。在這時顯示出來，對一般形式的可變係數的方程，其克萊因問題很可能有一個非常不能令人滿意的解答；根據這個解答，出現在豫解式中的參變數的最小數目僅比方程式的次數小 3. 在後來 Н. Г. 切伯塔廖夫 [19] 在比較完善的形式下陳述了自己的研究結果。在這篇論文中，剛才談到的猜測被基於 *E.* 嘉當 (Cartan) 論文 (1894) 中的臆測，根據 *E.* 嘉當的臆測一個李氏羣中所有最大次的子羣都是正則的，就是說，可以用定義李羣的向量很簡單地地把它們造出來。Н. Г. 切伯塔廖夫 [33] 在 1938 年證明了這個臆測，因而證明要想大大減少克萊因型豫解式中參變數的個數是不可能的，同時也指出了在克萊因意義下和希爾伯特 (Hilbert) 意義下的豫解式問題之間的深刻差別。

6. 在 1943 年 Н. Г. 切伯塔廖夫 [45] 提出了豫解式問題的一個新的表述方式，其內容如下：假定已知兩個次數同為 n 的方程：

$$f(x)=0, \qquad g(x)=0,$$

其中每一方程的係數假定依賴於某一數目的參變數。我們稱這兩個方程中之一為另一方程的豫解式，如果在兩個方程的參變

數之間可以建立這樣一個函數關係，當其值作各種可能的變化時，兩個方程的根在相互協同的關係下變化。後面這句話的意思是說，可以使一個方程的每一個根與另一方程一個一定的根相對應（比如說，用同樣的標號來標誌相應的根），如果參變數在複數空間中描畫一個閉徑，則在這個情況下兩個方程式的根受到同一置換。豫解式問題在於根據已經給定的第一個方程找出第二個方程（卽豫解式）來，使出現於其係數中的參變數之個數爲儘可能的少。

原來，豫解式問題的這一表述方式包含希爾伯特的豫解式問題作爲其特例。除此之外，兩個互爲豫解式的方程的界點流型（Критические многообразия）有相同的結構。關於這一點，應按下述的意思來理解：假設方程 $f(x)=0$ 包含 m 個參變數。我們可以把他們的值看作複數而使 $2m$ 維空間中的點與他們相對應。每一個這樣的點對應於方程 $f(x)=0$ 的 n 個根。空間中所有那些至少與我們的方程的一個重根相對應的點的集合，我們稱作界點流型。如果命方程的判別式的虛實兩部分同時等於零，卽可得出界點流型的方程。界點流型的維數是 $(2m-2)$。

界點流型本身又可以包含“高級”的界點流型，在這些流型的點上有更多的根是重根；而這些流型又包含更高級的界點流型，餘此類推。這樣得出來的是一些一個包一個的界點流型鏈，且每個界點流型的維數較前一流型的維數小 2.

在某些補充假定下，豫解式的界點流型鏈中環節的數目是相同的。由此不難作出結論：如果至少有一個由 s 個環節組成

的界點流型鏈與方程 $f(x)=0$ 相應，那麼這方程的豫解式不可能包含少於 s 個的參數。可惜的是，直到目前爲止還沒有能證明這個定理的反面。可能除界點流型鏈中環節的個數之外，還得考慮其他的不變量。

求界點流型有其特有的技巧。爲了這個目的，我們把方程 $f(x)=0$ 的根表作 $x_1, x_2, \cdots x_n$，並且構成型

$$\Phi_S(t_1, t_2, \cdots, t_n)=\Pi\left(x_{\alpha_1} t_1+x_{\alpha_2} t_2+\cdots+x_{\alpha_n} t_n\right),$$

其中 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 爲新的參數，而置換

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & n \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{pmatrix}$$

則遍歷方程的葛羅瓦羣。爲了判定一個已知點是否在由關係式

$$x_1=x_2=\cdots=x_{k_1},\ x_{k_1+1}=\cdots=x_{k_2}, \cdots,$$

所決定的界點流形上起見，必須在型的表達式中命

$$t_1+t_2+\cdots+t_{k_1}=0,\ t_{k_1+1}+\cdots+t_{k_2}=0, \cdots$$

在這時所得出的型 Φ_s 應等於零。

把這個結果應用於 n 次變係數方程（把 $\sqrt{D}$——D 是方程的判別式——添加於有理數域後，可使其葛羅瓦羣變成交代羣）時，得到豫解式中參變數的最小個數是

$$s=\left[\frac{n-1}{2}\right].$$