面向21世纪课程教材

面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学(I)

王凯捷　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Advanced Mathematics (I)

ISBN 7-04-010634-5

9 787040 106343 >

定价 17.10 元

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等数学(I)

王凯捷 主编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材.本书在处理一元微积分的经曲内容时强调介绍数学思想，注重内容的实际背景与几何意义的阐述，并且增加了许多应用的实例；对于解题方法，着重介绍基础方法，淡化各种繁琐的技巧；同时，注意与计算机的结合，介绍了相关的数学实验.本书主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，定积分，定积分的应用，微分方程等.

本书可作为高等院校农林类、水产类各专业教材，也可供其他院校非数学类专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.Ⅰ/王凯捷主编.—北京：高等教育出版社，2002.8(2003重印)
面向21世纪课程教材
ISBN 7-04-010634-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.王...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第049553号

高等数学(Ⅰ)
王凯捷　主编

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京中科印刷有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2002年8月第1版
印　　张	16	印　　次	2003年4月第3次印刷
字　　数	290 000	定　　价	17.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

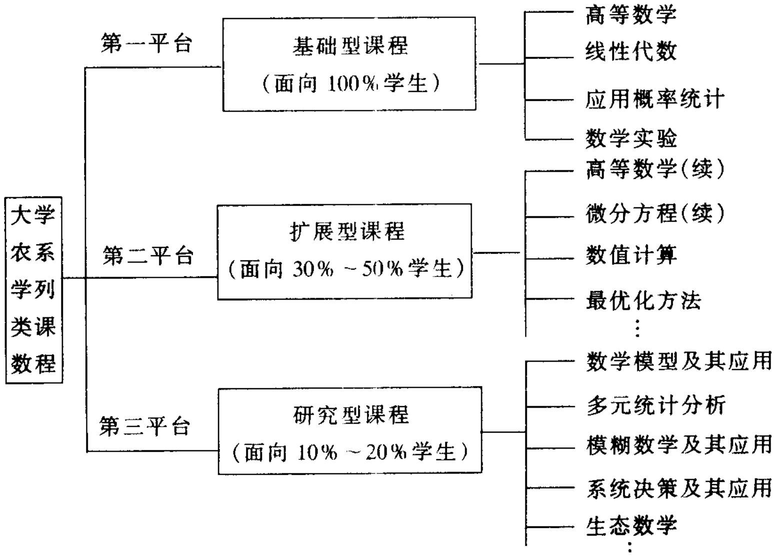
版权所有　侵权必究

总　　序

本系列教材是在原华东地区高等农林水院校数学系列课程教材《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》试用后的基础上，按照教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”中有关项目的要求重新编写的，是项目04－6的研究成果．该系列教材各册如下：《高等数学(Ⅰ)》、《高等数学(Ⅱ)》、《线性代数》、《应用概率统计(上、下册)》、《数学模型及其应用》和《数学实验》，适用于高等农林水院校本科各专业．本系列教材编委会由杨崇瑞、王凯捷、吴坚、杨琪瑜、任明荣教授组成．

由南京农业大学牵头，东北林业大学、华中农业大学、西北农业大学合作主持、安徽农业大学、浙江农业大学、中国农业大学、河北农业大学、东北农业大学、黑龙江八一农垦大学、北京农学院、解放军农牧大学共14所院校参加的教育部教改项目“高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”，在各有关院校的重视和项目组成员的共同努力下，已通过验收，并获得了专家组的好评．这套系列教材就是该项目研究成果的一部分．此外，它也是在经过几次会议和有关专家讨论后，在高等教育出版社的大力支持下确定出版的．

该系列教材的选题主要遵从如下的课程体系设置：



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

该系列教材的出版,首先要感谢参与编写的有关人员,感谢农业部数学课程教学指导委员会的关心和支持,特别是这套系列教材的总设计、该项目组的总负责人杨崇瑞教授,他未能看到这套教材的出版就溘然长逝.现在,该系列教材的顺利出版,是对杨崇瑞先生的莫大慰藉.

编委会十分感谢中科院院士、复旦大学教授李大潜先生担任本系列教材的主审.

由于该系列教材还是一个教改尝试,不免存在一些问题和不足之处,诚恳期望本系列教材的使用者提出意见和建议,以利今后的进一步修改和完善.

编委会

2000 年 10 月 10 日

前　言

高等数学是大学数学教育中一门重要的基础课，对于培养面向21世纪人才起着重要的作用．本书是编者在多年教学实践和改革探索的基础上，为适应高等农林院校的教学要求而编写的．

作为教育部“面向21世纪高等农林院校本科数学（含生物统计）系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践课题”（项目编号04－6）的系列教材之一，本教材在项目研究成果的基础上，依据新的教学大纲，首先编写了过渡性教材，经过多年的教学实践，不断改进，最终编写出这本教材．

本教材在处理一元微积分的经典内容时强调介绍数学思想，注重内容的实际背景与几何意义的阐述，而不苛求证明的完整性和严密性．对于解题方法，着重介绍基础方法，淡化各种繁琐的技巧，从而降低了难度．在数学应用方面增加了许多应用的实例，培养了学生用数学解决实际问题的能力，同时，还注意与计算机的结合，给出了许多可用计算机求解问题的数学方法并介绍了相关的数学实验．

本书由王凯捷任主编，张长勤任副主编，参加编写工作的有上海水产大学的张丽蕊（第一章），南京林业大学的蒋华松（第二、三章），南京农业大学的朱震球（第四、五章）及安徽农业大学的张长勤（第六章），南京农业大学的王凯捷负责全书的统稿，并改写了第一章、第三章的部分内容，增写了应用部分，编写了第六章的习题与解答及附录部分．

编委会荣幸邀请到复旦大学李大潜院士作为本书的主审，在此表示诚挚的谢意．同时我们衷心感谢杨崇瑞教授对本书编写的关心和鼓励．

由于水平有限，不妥与谬误之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正．

主编

2001年2月18日于南京

责任编辑　李　蕊
封面设计　张　楠
责任绘图　郝　林
版式设计　史新薇
责任校对　陈　荣
责任印制　宋克学

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，而极限方法则是高等数学的重要工具，导数、微分、积分等概念都建立在极限概念的基础上．理解函数和极限概念．熟练掌握求极限的方法，对学习高等数学有着重要的作用．

本章将先介绍变量、函数等概念以及它们的简单性质；再给出极限的概念、极限的运算方法以及判断极限存在的两个准则；在此基础上，讨论函数的连续性．

1.1　函数的概念

初等数学中已经对函数的有关概念与性质做了初步的介绍．这里我们再扼要地作些讨论．

1.1.1　函数的定义

定义 1　设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的非空数集，如果对于数集 D 中的每一个数 x，变量 y 按照某种规则总有确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数．数集 D 称为这个函数的定义域，x 称为自变量，y 称为固变量．

y 是 x 的函数，可表示为 $y=f(x)$ 或 $y=y(x)$ 等．

例 1　在初速度为 0 的自由落体运动中，下落的路程 s 与下落的时间 t 是两个变量，它们之间存在着函数关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，是常量．假定物体着地的时间为 T，那么当 t 取 $[0,T]$ 上某一个值时，由上式就可以确定 s 的值．s 可看成是 t 的函数，$D=[0,T]$ 为定义域．

例 2　边长为 a 的正三角形，取每边的中点，以三个中点为顶点可得一个小的正三角形．对这个小三角形再取三边中点又可得一个更小的正三角形．依此类推，当第 n 次取中点时，得到的正三角形面积为

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

当 n 取定值时($n=1,2,3,\cdots$)，由上式可确定 S 的值.这里 S 是 n 的函数. n 的定义域为

$$D=\{n\mid n>0,且\ n\in K\}.$$

在同一个问题里，如果遇到两个或两个以上的函数时，要用不同的函数记号，如 $f(x),F(x),g(x),\cdots$，表示，以示区别.

当 x 取某一数 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作

$$f(x_0)\ 或\ y\mid_{x=x_0}$$

而当 x 取遍 D 的各个数值，对应的函数值全体组成的数集 Z，称为函数的**值域**.

函数是由定义域和对应法则所确定的，因此研究函数时必须注意它的定义域.在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义所确定的.

对某些函数，当只给出函数的表达式，而没有特别说明函数的实际意义时，函数的定义域就是使表达式有意义的自变量所能取的一切实数.

例 3　求函数 $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解　要使所给定的函数表达式有意义，必须

$$1-x>0\ 且\ x+2\geqslant 0$$

即

$$x<1\quad 且\quad x\geqslant -2$$

因此该函数的定义域为 $[-2,1)$.

如果自变量在定义域内任取一数值时，对应的函数值都只有一个，这种函数叫**单值函数**.如果对应的函数值多于一个，则这种函数称为**多值函数**.

例如　$y=\mathrm{Arcsin}x$　是多值函数，而对 $y=\arcsin x$　规定 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时就变成了单值函数.

下面我们引入邻域这一概念，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**.点 a 称为此**邻域的中心**，δ 称为此**邻域的半径**.

有时用到邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的**去心的 δ 邻域**.

点 a 的 δ 邻域也可表示为 $|x-a|<\delta$，

点 a 的去心的 δ 邻域也可表示为 $0<|x-a|c\delta$.

1.1.2　函数的表示法

不同的函数关系常用不同的函数表示方法，最常用的函数表示方法是解析

法、表格法和图像法.下面先举例说明.

例 4 某工厂每日最多生产 A 产品 1 000 件,固定成本为 150 元,单位变动成本 8 元,则每日产量 x 与每日总成本 y 建立的对应关系可构成如下函数

$$y = f(x) = 150 + 8x,\ D = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,000,\text{且 } x \in \mathbf{N}\}$$

例 5 某水文站统计了某河流 40 年内平均月流量 V 如下表:

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 $V/10^8\,m^2$	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

上表表示,在平均月流量 V 与月份 t 之间建立了明确的对应关系,当月份 t 每取一个值时,由表即可得平均月流量 V 的惟一的一个对应值,因而也确定了函数关系,其定义域为

$$D = \{t \mid 1 \leqslant t \leqslant 12, t \in \mathbf{N}\}.$$

例 6 某气象站用自动记录仪记下某日从 0 时到 24 时的温度变化曲线,如图 1－1,它形象地表示了温度 T 随时间 t 的变化规律.

根据温度变化曲线所表示的规律,对于任何 $t_0 \in [0,24]$ 都有温度 T_0 与之相对应.

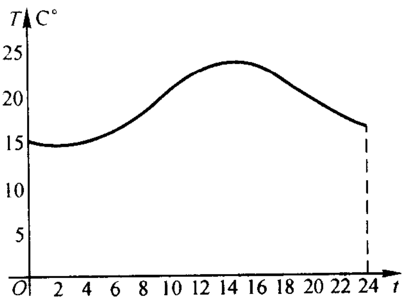


图 1－1

以上三个例子正好是三种常用的函数表示法的应用.例 4 用的是解析法,也叫公式法;例 5 用的是表格法;而例 6 用的是图像法.一般地我们有

1. 用数学式子表示自变量和因变量之间对应关系的方法叫**解析法**,也叫**公式法**.

2. 将自变量值与对应的函数值列成表以表示函数的方法叫做**表格法**.

3. 用图像来表示自变量值与对应函数值的关系的方法叫做**图像法**.

最后我们来介绍一下分段函数,如下例

例 7 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0; \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

表示当 x 取不同区间内的数值时,函数用不同的式子来表示.如 $x = -1 < 0$ 时,由 $f(x) = x^2$ 计算得到 $f(-1) = (-1)^2 = 1$;而在 $x = 2 > 0$,由 $f(x) = x + 1$ 计算得到 $f(2) = 2 + 1 = 3$.

1.1.3　函数的性质

1.1.3.1　单调性

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对任意两点 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**；而当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少的**．今后我们统称这两类函数为**单调函数**．

在几何上，单调增加函数的图形是随着 x 的增加而上升的曲线（如图 1－2a），单调减少函数的图形是随着 x 的增加而下降的曲线（如图 1－2b）

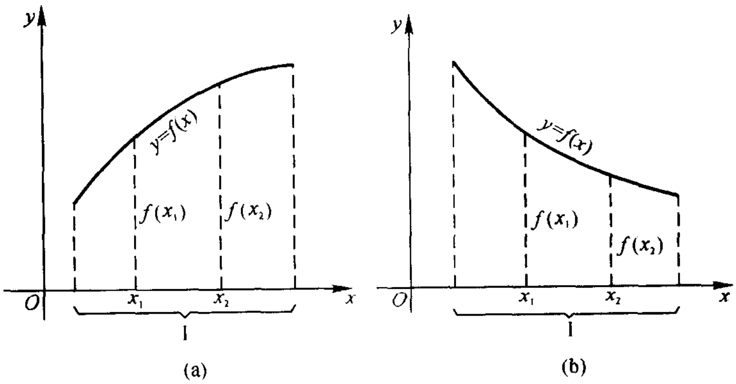


图 1－2

例 8　函数 $y=f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的．

若 $f(x)$ 在区间 I 内单调，则称区间 I 是函数 $f(x)$ 的**单调区间**．

1.1.3.2　有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**有界函数**；否则就称为**无界函数**．

例 9　函数 $y=\sin x$ 对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它是有界函数．

例 10　函数 $y=x^2$，若 I 为 $(1,2)$，则是有界函数；若 I 为 $(1,+\infty)$，则是无界函数．

例 11　证明函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为有界函数．

证 因为

$$\left|\frac{x^2}{1+x^2}\right|=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}<1,$$

因而 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

从几何上看,函数 $y=f(x)$有界:$|f(x)|\leqslant M$,其函数图像介于 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

1.1.3.3 奇偶性

定义 4 设有函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,那么

(1)若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**.

(2)若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**.

在几何上,偶函数 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称,奇函数 $y=f(x)$的图形关于原点中心对称.

例 12 函数 $y=\cos x$ 是偶函数,因为 $\cos(-x)=\cos x$(图 1-3).

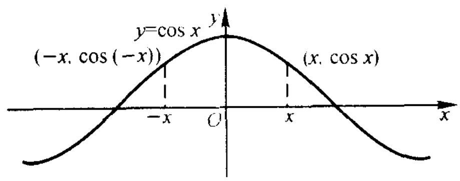


图 1-3

例 13 函数 $y=\sin x$ 是奇函数,因为 $\sin(-x)=-\sin x$(图 1-4).

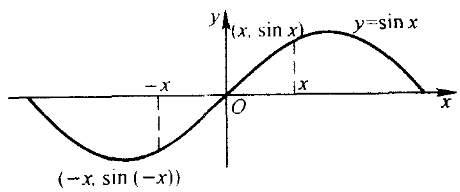


图 1-4

例 14 函数 $y=\sin x+\cos x$ 和 $y=x^2+x$ 均既不是偶函数,又不是奇函数.

1.1.3.4 周期性

定义 5 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的常数 L,使

得一切 $x\in D$，$x+L\in D$，都有

$$f(x+L)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，L 为这个函数的**周期**.

通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题　1.1

1. 将集合 $A=\{x\,|\,|x-2|\leqslant 3\}$ 和 $B=x\{x\,|\,|x-1|<2\}$ 用区间记号表示出来.

2. 将点 2 的 $\frac{1}{3}$ 邻域用集合表示出来.

3. 求邻域的半径 δ，使 $x\in(1-\delta,1+\delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$；又若 ε 分别为 0.1，0.01 时，上述 δ 各等于多少？

4. 求出下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(4) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；

(5) $y=\ln(1+x)$；　　(6) $y=\arcsin(x-3)$.

5. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值.

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

6. 下列各题中 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，　　$\varphi(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，　　$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，　　$\varphi(x)=\sin x$；

(4) $f(x)=1-\cos^2 x$，　　$\varphi(x)=\sin^2 x$.

7. 作出下列函数的图形，并指出其定义域.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ x+3, & 1<x<3. \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0; \\ 2, & x\leqslant 0. \end{cases}$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x>0; \\ 1, & x=0; \\ x^2, & x<0. \end{cases}$　求 $f(0)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(\frac{1}{2})$.

9. 设函数 $H(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1, & x\geqslant 0. \end{cases}$　求 $H(x-1)$，$H(x)-H(x-1)$.

10. 设函数 $f(x+1)=x^2+3x+5$, 求 $f(x),f(x-1)$.

11. 设函数 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

12. 下列函数中有哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$;　(2) $y=x+\sin x$;

(3) $y=x^2-\cos x$;　(4) $y=2^x$;

(5) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　(6) $y=x(x-1)(x+1)$;

13. 设函数 $f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$;并指出 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?

14. 证明　函数 $f(x)=kx+b$ 当 $k>0$ 时单调上升,当 $k<0$ 时单调下降.

15. 若函数

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{当 } -\infty<x\leqslant 0;\\ 2^x, & \text{当 } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

求 $f(-2),f(0),f(5)$.

1.2 初 等 函 数

1.2.1 复合函数

先举一个例子,设 $y=\sin u$,而 $u=e^x$,把 $u=e^x$ 代入第一个式子得 $y=\sin e^x$,我们说函数 $y=\sin e^x$ 是 $y=\sin u$ 及 $u=e^x$ 复合而成的复合函数.一般地,我们有

定义 1　如果函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,而 $u=\varphi(x)$在 D_2 上有定义,其值域为 W_2,且 $W_2\subset D_1$.那么对于任意的 $x_2\in D_2$,由 $u=\varphi(x)$取得的 u 值,使函数 $y=f(u)$有意义.于是变量 y 通过 u 构成变量 x 的函数,这个函数叫做**复合函数**,记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 u 叫做**中间变量**.

例 1　$y=\sqrt{u}$,$u=x-2$ 构成复合函数 $y=\sqrt{x-2}$.$y=\sqrt{u}$的定义域$[0,+\infty)$,而 $u=x-2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.因此,$y=\sqrt{x-2}$应看成是由 $y=\sqrt{u}$及 $u=x-2$ 复合而成的复合函数,其定义域$[2,+\infty]$.

例 2　讨论由 $y=\arccos u$,$u=2+x^2$ 复合构成的函数.

解　$y=\arccos(2+x^2)$是没有意义的.因为对于 $x\in D_2$,$u\in W_2$,此时 $W_2\cap D_1=\varnothing$,因此,该复合函数没有定义域.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com