孤立子

——物理学家用的数学方法

G. 艾仑伯格 著

科 学 出 版 社

孤 立 子

——物理学家用的数学方法

G. 艾仑伯格 著

刘之景 译

朱栋培 王子修 校

科 学 出 版 社

1989

内 容 简 介

本书是为非数学家写的学习孤立子的入门书，重点介绍了一维孤立子系统中的反散射方法．前三章讨论了 KdV 方程；第五、六章讨论了 sine-Gordon 方程和孤立子系统热力学；第七章叙述了 Toda 晶格．

本书可供物理、工程技术等有关领域的人员以及大专院校师生参考．

G. Eilenberger

SOLITONS

Mathematical Methods for Physicists

Springer Verlag, 1981

孤 立 子

——物理学家用的数学方法

G. 艾仑伯格 著

刘之景 译

朱栋培　王子修 校

责任编辑　张邦固

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989 年 2 月第一版	开本：787×1092 1/32
1989 年 2 月第一次印刷	印张：7 1/4
印数：0001—4,420	字数：161,000

ISBN 7-03-000787-5/O·204

定价：6.80 元

序

本书是作为科隆大学理论物理研究生的一门课程而编写的. 需要的数学基础与理论物理课程通常所要求的一样，即函数论、微分方程和希耳伯特空间算子的基本知识.

本书相当详细地介绍了应用到一维孤立子系统上的反散射理论，以及在这方面发展起来的新的数学思想与方法. 这些都是以适合物理学家的方式和语言来论述的. 因此，不是所有的论题都经过数学上的严格处理，否则，过多的非本质细节会掩盖那些重要而有趣的新思想.

有些人想要研究这里所处理的系统的应用，本书的目的主要是为他们提供一本自成体系的导论，省得他们再去对原始文献作冗长乏味的查寻.

这样，书中所介绍的材料——物理学中新的数学方法——本质上是形式的. 几乎每一个物理学部门及其相关领域都有它的实际应用，从等离子体物理、固体物理到基本粒子理论，从通讯技术到气象学等等. 要通俗易懂地介绍所有这些内容就会大大超出一本通常书的篇幅，而且也不可能写得紧凑连贯. 实际上，本书只介绍了一维孤立子理论中经过选择的一部分形式数学内容. 譬如，书中根本没有提到孤立子的量子力学处理，尽管它是当前极为令人关注的一个研究领域. 最初，曾计划有一章专门介绍多维空间中的拓扑孤立子，因为过去仅在量子场论中对这些问题一度很起作用，而现在

它对解释固体中的现象变得日趋重要．可是，这样一来，此书的内容和准备时间都会成倍增加，因此，我只好忍痛放弃了这种想法。

本书内容如下：

第一章通过一些简单例子给出关于本书主题的绪论，还介绍了一些可能的应用．接着，在第二章和第三章中研究了Korteweg-deVries(KdV)方程，它是具有孤立子解的方程的一个最简单例子．第三章里详细地论述了反散射变换和它的应用．那里发展的一些技巧在第四章中被推广到其它孤立子系统，而在第七章中又被用到一个离散(差分方程的)系统——Toda 晶格．第五章专门讨论 sine-Gordon 方程和它的解，因为这是物理学家最感兴趣的(第四章中出现的诸例中)一个特例．最后，在第六章里以 sine-Gordon 方程为例，介绍孤立子系统的热力学． 该章所提出的问题只有一部分得到了解答，它们涉及当前引起兴趣的研究课题。

书中给出的那些结果和方法有多种来源，有时从现有的文献中还不容易得到，某些方面还是相当新的．由于作者想提供一本自成体系的导论而不是一篇评述文章，因此正文中略去了大部分明显可见的引文，而在附录中给出了带有注释的文献目录以供进一步研究。

总之，我希望本书不仅给予新的知识，而且也给予读者一种美的享受，就像我，一名作者，在从文献中“发现”和总结了这种引人入胜的理论体系和方法时曾有过的那种美的享受。

我特别感谢那位将德文原著译成英文的 E. Borie, Karlsruhe 博士，她的考证和总是寻求恰当表述的诚心使得原文大为增色．我也感谢许多同事有益的批评以及提请我注意到了原始译稿中一些公式的打印错误和不清楚的阐述．最后，我

衷心感谢 Ch. Arnaud 小姐始终耐心地打印了大量的译稿和校对了正文和公式，衷心感谢她和 Hahn 太太共同整理成了最后的稿子。

G. 艾仑伯格

1980 年 12 月

目　　录

第一章 绪　论

§1.1 为什么要研究孤立子?

自麦克斯韦完成电磁理论到现在，物理学的这一百年有一定理由可以称之为**线性**物理学的时代. 线性方程（麦克斯韦方程和薛定谔方程）、线性数学对象(矢量空间,特别是希耳伯特空间)和线性方法(富里叶变换、微扰理论、线性响应理论)几乎无例外地一直支配着理论物理的研究方法.

当然，从纳威-斯托克斯方程到引力理论以及固体、原子核和量子场中粒子相互作用，非线性的重要性已为人们所认识. 但是,除了把它们处理成线性化理论基本解的微扰之外，人们几乎无法处置这些非线性效应.

近十年来，我们在"场物理"的很多领域内已经更广泛地认识到：非线性可以产生本质上全新的一些现象，而这些现象不可能由线性化方程出发的微扰理论得到. 我们说"场物理"，指的是理论物理的所有那样一些领域，其物理现象的描述使得人们研究单分量或多分量"场"量 $\varphi(t, x, y, \cdots)$（或与此类似的量分形式)的场方程或偏微分方程:

$$\varphi_t \text{ 或 } \varphi_{tt} = F(\varphi, \varphi_x, \cdots). \tag{1.1.1}$$

它们既包括一些经典领域,例如流体动力学或磁流体动力学，从而还有气象学、海洋学、等离子体物理学的内容，也包括诸如固体物理学、非线性光学和基本粒子物理学等一些较新的领域.

非线性能产生十分重要的新现象，这一点长期以来就为

人们所了解，只要想想空气动力学中的激波或气象学中的气旋这些例子就清楚了. 在金兹堡-朗道（Ginzburg-Landau）的超导理论中可以找到一个更新的具有特色的例子. 这是一个超流凝聚态的矢势和波函数的非线性耦合的微分方程组. 其解的一个简单整体条件即波函数位相的唯一性，导致通量为 $hc/(2e)$ 的磁“通量管”的存在. 在这个表示式中，要注意的是矢势和电流之间耦合常数 $g=e/c$ 出现在分母中；这一结果决不可能从微扰理论即按耦合常数展开的幂级数中得到. 这些超导通量管是“拓扑”孤立子的一个典型例子，所以这样命名，是因为它们的稳定性由拓扑约束保证，这约束即为离通量管中心任意远处的波函数的位相改变 2π 时所具有的不变性.

一个标量场 $\varphi(x,t)$ 的 Fitzhugn-Nagumo 方程

$$\varphi_t=\frac{1}{2}\varphi_{xx}+(a-\varphi)(\varphi^2-1),-1<a<0 \quad (1.1.2)$$

提供了一个极为不同但有启发性的例子. 有人曾建议作为神经脉冲传播的一个简单模型. 虽然这个方程的微分部分类似于扩散方程，但它有一个作为特解的孤立波，即“神经脉冲”

$$\varphi=\tanh(x-at). \quad (1.1.3)$$

方程(1.1.2)的这个解可用一个力学模型——摩擦（即 φ_t）力所支配的一个弹性(即 φ_{xx})弦的运动来解释. 此弦离开 $\varphi=-1$ 处的势阱，平行于 x 轴越过 $\varphi=a$ 处的位势极大值，进入 $\varphi=+1$ 处的一个较深的势阱底中. 显然，按照描述 $\varphi=\pm1$ 附近小振动的两个线性化方程的微扰不可能得出这个解.

这些孤立波的一种特性是它们的波形和速度不随时间而变. 它们表示一些不扩散的波包(或有时为能量包)，其色散效应由非线性效应补偿. 借助于假设

$$\varphi(x,t)=\varphi(kx-\omega t), \quad (1.1.4)$$

我们可以构造这样的孤立波(在较广泛意义下,可将它们看作孤立子.),作为许多偏微分方程的解,上式中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,φ 可以有几个分量.

这个方面是场物理中日益重要的孤立子概念的两个基础之一,我们将要更深入地考察它.另一个基础是拓扑方面,这里我们不作介绍.如果场方程有(1.1.4)形式的特解,把它们看成元激发或"准粒子",并尽可能由这些解去构造方程(1.1.1)的初值问题(柯西问题)的完全解,这是颇吸引人的.这样,人们一开始就能考虑非线性了.因为迭加原理对非线性方程不适用,所以这个方案的实用性当然取决于是否能考虑孤立波之间的相互作用.

正如所料,这并不总是可能的.然而,数学物理方面过去十年的惊人发现之一就是,存在着相当多的特殊的非线性演化方程(NLE),它们大部分是一维空间的,有可能在上述方案的框架内完全解析地处理这些方程.我们可用下列性质来鉴别它们:

a) 它们具有"类粒子"解(孤立波).

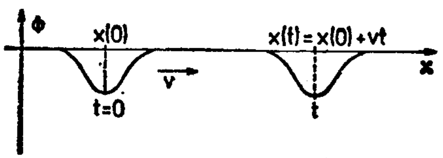

图 1. 孤立波的运动

b) 尽管这些孤立波有非线性相互作用,但它们可以互相贯穿而彼此没有破坏,正如下图表明的那样,即使任意多个这样的"孤立子"重迭后也是如此.

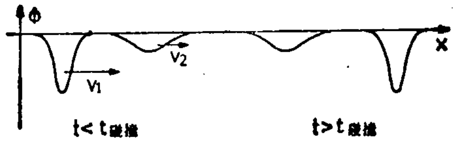

图 2. 不同速度的孤立子的互相贯穿

c）与线性方程情况下的傅里叶分析类似，这种初值问题可以通过孤立子和连续“辐射”的展开而解析求解。

d）如果方程组表达为拉格朗日场论形式，那末，除了能量、动量外，它还有无穷多个运动常数。这与初值问题的完全可解性相联系。

e）如果将这些方程的解 $\varphi(x, t)$ 作为某个适合的线性本征值方程

$$D\phi + M[\varphi(x,t)]\phi = \lambda\phi \tag{1.1.5}$$

中的位势，式中 D 是 x 的微分算子，把时间 t 看做一个固定参量，那末，λ 与时间 t 无关。在三、四、六章中的解析求解方法都基于这个事实。

对于(1.1.5)式中的每一个算子，都有可能找到在 a)—e) 意义下具有孤立子的非线性演化方程的一个可数集。该集中的高阶方程是极其复杂的；在每个系列中，只有少数的简单的系统在物理上才是有意义的。最著名的例子是：

Korteweg-de Vries (KdV) 方程 $\varphi_t = 6\varphi\varphi_x - \varphi_{xxx}$,

sine-Gordon 方程 (sGE) $\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - \sin\varphi$,

非线性薛定谔方程 $i\varphi_t = -\varphi_{xx} \pm |\varphi|^2\varphi$.

在某种意义下，具有上述性质的方程在数学上无疑是奇异的，虽然目前无法确定一个给定的非线性演化方程是否属于这一范畴，但是，人们仍有理由认为，在凝聚态物理中遇到

的大多数场方程不是精确地属于这种范畴.

尽管如此,这些奇异方程还是具有重大的物理意义,这是因为,很多非线性方程组可以用这些具有孤立子解的非线性演化方程来逼近. 正如前面所指出的,在很多情况下,这些方程提供一个比线性化的方程更好的起点或者说更好的零级近似. 接着必须按孤立子自由度的微扰方法去处理真实系统对这些特殊方程的偏离,不论这种偏离是由于摩擦力和方程系数随空间变化,还是由于方程中其它的齐次或非齐次项引起的. 天体力学给出一种有用的类比. 天体的开普勒轨道是对应于位势(它没有非扰动形式)与 r^{-1} 成正比的牛顿运动方程的解. 从一开始计算行星轨道包括它们所有的相互作用就没有考虑对开普勒轨道的偏离,而是估计到未扰动开普勒轨道的参数有一缓慢的时间依赖关系时,才考虑这种偏离. 按这个类比,用线性化的演化方程代替那些具有孤立子解的方程,就会与用直线上的自由运动(而不用开普勒轨道)作为最低阶近似相对应.

前面叙述的具有孤立子解的三个非线性演化方程在物理应用方面是特别重要的(参见[1.1]和[1.2]). 如果我们在一级近似下研究一个由线性波动方程

$$\varphi_{tt} - \Delta\varphi = 0 \qquad (1.1.6)$$

(Δ是拉普拉斯算符)描述的物理系统,那末,在二级近似下就存在着特别适合于考虑色散效应和波包间相互作用的两种极限情况.

在小振幅和较长波长情况下,以致于色散(或更准确地说,对线性色散 $\omega = \pm k$ 的偏离)和非线性相对于(1.1.6)那些主项来讲只在长时间间隔上才变得重要,因此我们用"流体力学"极限进行研究. 于是,象下一章将要证明的那样,在非常一般的假设下,就可能导出关于振幅的 KdV 方程. 这个

方程对于浅水波的早期理论（Korteweg 和 deVries，1895年：见[1.3]）以及对于等离子体离子波、弹性介质波和其它波的描述都是正确的。

在短波长极限下，人们希望讨论一个近于单色的波列，其包络随时空缓慢变化（与波长和周期比较），而其非线性也是缓慢变化的，因而这波的非线性只与包络耦合。这种情况在非线性光学中经常出现，而且在非常一般的条件下，它可以由非线性薛定谔方程来描述。

sine-Gordon 方程在凝聚态理论中几乎到处出现，因为它是周期介质中最简单的波动方程。很多固体物理学家都熟悉它，就像熟悉描述磁通量子在迭层型的超导隧道结中传播的约瑟夫森方程一样。它也用于作铁磁体和铁磁介质中的畴壁模型，一维金属中电荷密度波传播的模型，晶体中位错运动的模型或表面上吸附分子模型。sine-Gordon 方程在其它领域中也是熟悉的，它在类脂薄膜内的波传播理论中、对于激光物理中自诱导透明性的描述以及作为基本粒子的一种模型都起着作用。最后的这一个应用是特别有趣的，这是因为，已证实了它的量子化形式（将 φ 视为玻色场）等价于 Thirring-Luttinger 模型，后者是一个一维空间中具有相互作用的费米子模型[1.4]。

能够处理这些方程的好处是明显的。完全列举所有已知有意义的方程或可能的应用就会太冗长了。另外，随着本书描述的方法较深入地为人们所了解，具有孤立子解方程的发现和应用将会日益吸引各个研究领域中物理学家的注意。我们正在进入非线性物理学的时代。

§1.2 由简单例子说明的基本概念

我们所研究的对象——非线性演化方程是形式为(1.1.1)

的方程:

$$\varphi_t \text{ 或 } \varphi_{tt} = F(\varphi, \varphi_x, \cdots), \tag{1.2.1}$$

这里 φ 有一个或若干个分量，它们是时间 t 和空间变量 x_1、x_2、$\cdots$的实函数或复函数. 相应于目前的研究状况，大部分情况下我们只讨论含有一个空间变量 x 的函数. 这些方程所以称做演化方程是因为人们对函数 φ 的时间发展过程感兴趣，在给定的 t_0 时刻函数 φ 的**初始条件**为

$$\varphi(t_0, x)\text{，如必要，还给定 } \varphi_t(t_0, x). \tag{1.2.2}$$

一般我们还要求 φ 满足**边界条件**

$$\varphi(t, \pm\infty) = 0 \text{ 或 } \varphi_t(t, \pm\infty) = 0. \tag{1.2.3}$$

至于谈到在这些条件下上述问题数学上是否有了明确的定义，我们是不关心的.对于物理学家来说，一般显然关心的是，一个充分光滑的、且随着$|x|$的增加足够迅速地趋于边界值的初始条件允许有一个遵循（1.2.1）的单值的时间发展关系，至少在一个短时间间隔上是这样. 当然，了解什么情况下 φ 在有限时间之后发生了奇异性，或者对所有时间而言它什么时候还保持着光滑和单值性，这可能是有意义的. 但出人意外的是，这仍然是偏微分方程的数学理论中一个没有解决的大问题[1,5].

我们提醒读者回想一下由熟知的方程说明的某些基本术语.

物理学中最重要的**线性**方程无疑是波动方程

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = 0. \tag{1.2.4}$$

它同每个线性方程的情况一样，迭加原理是适用的，而且可以利用傅里叶变换求解. 于是得到熟悉的色散律

$$\omega = \pm k \tag{1.2.5}$$

和

$$\begin{aligned} &\text{相速度 } v_{ph} = \omega/k = \pm 1, \\ &\text{群速度 } v_{gr} = \partial\omega/\partial k = \pm 1. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

(1.2.6)的右边为常数时称为无色散；只要波包不扩展，便可以利用初始条件简单地给出(1.2.4)最一般的解：

$$\varphi(x,t)=\varphi^{+}(x+t)+\varphi^{-}(x-t),$$
$$\varphi_x^{\pm}(x)=\frac{1}{2}[\varphi_x(x,0)\pm\varphi_t(x,0)]. \tag{1.2.7}$$

这是两个波包无畸变地互相贯穿的一个平凡例子。

我们也常常碰到扩散方程

$$\varphi_t=\varphi_{xx}, \tag{1.2.8}$$

但它具有非常不同的性质。这里，我们由富里叶变换得到色散律

$$\omega=-ik^2,$$

从而得到波包的迅速扩散。方程的解由下式给出：

$$\varphi(x,t)=\int\frac{dk}{2\pi}\varphi_k(t=0)e^{ikx-k^2t}. \tag{1.2.9}$$

若反转时间方向并考虑 $\varphi_t=-\varphi_{xx}$，便得到解在有限时间之内能产生奇异性的演化方程的一个简单例子。

同所有其它常系数线性方程一样，(1.2.8)有无穷多个**定域运动常数**。它们定义如下。

对含有宗量 φ、φ_x、…的 N 和 I 这两个函数(也可能显含 x 和 t)，如果下列关系式成立：

$$\frac{d}{dt}N(\varphi,\varphi_x,\varphi_t,\cdots)+\frac{d}{dx}I(\varphi,\varphi_x,\varphi_t,\cdots)=0, \tag{1.2.10}$$

那末由此得到

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}Ndx=0. \tag{1.2.11}$$

这就是说，Q 是关于定域密度 N 和相应的定域流 I 的一个运动常数。显然，(1.2.8)已经包含在(1.2.10)的形式之中了，因而

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi dx = 0, \tag{1.2.12}$$

所以$\int\varphi dx$ 是一个运动常数，φ 的每个富里叶分量是

$$e^{k^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\varphi dx = \varphi_k(t = 0). \tag{1.2.13}$$

这就是依据(1.2.9)而得到完全可解性的理由.

最后，我们考虑一个有启发性的非线性的例子，即所谓的"Burger 方程"：

$$\varphi_t = 2\varphi\varphi_x + \varphi_{xx}, \tag{1.2.14}$$

它是一种带有非线性项的扩散方程. 可以把它改写成定域守恒律的形式：

$$\varphi_t - [\varphi^2 + \varphi_x]_x = 0. \tag{1.2.15}$$

这种一维空间的非线性演化方程允许有 7 个自由参量的变换：

$$t \to (t - t_0)/\tau, x \to (x - x_0)/\xi,$$

$$\varphi \to (\varphi - \varphi_0)/A,$$

$$(1.2.15) \to (1.2.15)/B.$$

因此，不失普遍性，我们可以方便地选择一些常数. 今后我们要经常利用这一事实而不再说明. 我们注意到，与线性方程的情形相比，常数 A 和 B 具有不同的作用.

如果分别考虑(1.2.14)右边两项，便发现：

$$\varphi_t = \varphi_{xx}$$

产生了熟知的波包扩展，而

$$\varphi_t = 2\varphi\varphi_x$$

具有形式解(与 $\varphi_t = v\varphi_x$ 比较)

$$\varphi = f(x + 2\varphi t), \tag{1.2.16}$$

此解可以图示如图 3：

我们看到，非线性项本身导致了波的"破碎"，因而，对于适当