概　率　论　教　程

缪柏其　编著

中国科学技术大学出版社
1998·合肥

概率论教程

缪柏其　编著

*

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,邮政编码:230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

开本:850×1168/32　印张:10.25　字数:260千

1998年9月第1版　1998年9月第1次印刷

印数:1—2000册

ISBN 7-312-01050-4/O·214　定价:12.00元

前　言

本书是在中国科技大学概率统计教研室诸同事多年给研究生教学的基础上编写的。以往诸同事从讲授这门课程中感受到应加强以测度论为基础的概率论以及极限理论方面的基础知识，以后的实践证明了这一意见是正确的。因此在我校概率统计专业，概率论课程分为概率论基础和极限理论两部分，不论是主修概率论方向还是主修数理统计方向的学生，都必须学习这两门课程。

本书是概率论基础部分。前三章以适合于概率论需要的形式讲述了测度论的知识。有限与无限，可数与不可数，其间的关系在数学思想上有重要意义。第一章集合族的构造问题便是从这一思路来介绍集合代数和集合 σ 代数的。概率论及测度论难点之一就是人们如何来认识无限，如何来处理无限。函数形式(集合形式)单调类定理生动地体现了人们如何从有限到无限的认识过程。同时该思想也贯串于全书。只要理解了这一思路，概率论的学习就有了正确的指引。第二章介绍了随机变量积分，Lebesgue 分解和 Radon-Nikodym 定理，并由此得到分布函数的 Lebesgue 分解。本章还论述了一个重要事实，即若随机变量 Y 关于由随机变量 X 生成的 σ 代数可测，则 Y 必是 X 的 Borel 可测函数。本章最后介绍了本质上(下)确界，L_p 收敛定理和一些常用的概率论不等式。第三章论述乘积空间，其中包含了测度论的基础性定理，即 Fubini 定理以及乘积概率存在性定理。在这个基础上，从第四章开始转向概率论各方面的内容。关于概率论基本特征的问题，我们同意 M. Loéve 的观点，即测度论是研究定义于一个可测空间而取值于另一个可测空间的可测函数族，而概率论的重点在于研究函数族

在这种变换下的不变量，即其联合分布。因此可以说，概率论的对象，就是对分布的研究。第四章主要介绍条件期望和条件分布。由此导出测度论的另一个基础性定理即 Kolmogorov 相容性定理。由于条件期望的一般定义高度抽象，对它的理解和运用有一定的难度。本书在所给定的 σ 代数是由随机变量(向量)生成的情况下，介绍了如何来求条件期望，以及条件独立性的概念及其判别准则，这一讲述方式更接近于条件概率的直观概念。本章最后介绍了鞅列和停时，这是进一步学习随机过程和极限理论的基本工具。为了不与极限理论课程发生过多的重叠，在这儿仅介绍一些基本概念和基本不等式，并力图使读者对鞅差与零均值独立随机变量和不相关随机变量之间的区别，获得一种直观的理解。为加深对鞅差和停时等概念的重要意义的理解，我们在第六章的证明中将多次使用这些工具，以显示其威力。第五章着重讨论随机变量分布函数和特征函数的相互关系。特征函数是研究经典极限理论和现代随机过程(如半鞅)的基本工具，故此处较仔细地介绍了特征函数的性质及其判别法。第六章的内容是大数定律和中心极限定理。我们努力使所用的方法适合于处理较此处所论更为一般的情况，以便为进一步学习这个重要题目打下基础，同时在这儿也介绍了用经典 Lebesgue-Stieltjes 变换和最近发展起来的 Stein-Chen 方法来处理正态逼近的速度问题。本章最后介绍了独立同分布情况下的重对数律。

本课程的后续课程是极限理论。在那里，第六章的内容可以用最一般的形式给出。但为了在学习上获得由浅入深的效果，并便于那些只对极限理论的基本内容感兴趣的读者，我们在题材的选择上采取了这种既不过于专门化，但又比一般初等教科书较进一步的作法。希望这种方式能对读者有所裨益。

阅读本书所需的预备知识是初等概率论和一定的实变函数论知识。为了便于进一步地掌握所学内容，每章后面有一定数量的

习题，这些习题中，有些是对本章内容的加深，有些则是正文内容的扩充。独立完成相当一部分习题，对切实掌握本课程的内容有着重要的意义。

本书的写作在1988年就开始筹备。在写作过程中参考了国内外一些同类性质的教本和专著，再结合我们多年的教学实践，最后写成了现在的样子。在写作中，陈希孺院士，赵林城、方兆本、苏淳和韦来生等教授给作者提出了许多宝贵建议，胡太忠副教授、刘东海、谭智平和魏国省等仔细审阅了本稿，胡海燕小姐打出了手稿，在此表示深切的谢意。虽然作者和教研室同仁讲授概率论基础的课程有了十余年的经历，但形成一本教材，不妥以至谬误之处，仍在所难免。请同行和广大读者不吝赐教。

缪柏其

1997.10 于合肥

内 容 简 介

本书以测度论为背景介绍了集合代数构造，概率扩张，随机变量的期望，收敛性，Lebesgue 分解，条件期望和鞅列，分布函数和特征函数，极限理论等概率论中的基本知识。其特点是抽象与直观相结合，经典方法与现代方法相结合。全书论述严谨，内容丰富，每章后均附有一定数量的习题以加深理解和拓广本章的知识点。

读者对象是学过实变函数和初等概率论的统计系和数学系的高年级本科生、研究生以及其他如金融工程、管理科学等方面的教师和研究工作者。

本书中的一些常用符号

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$	概率空间
$\sigma(\mathscr{C})$	由集合族 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数
$\sigma(X_i, i\in I)$	由随机变量 X_i, $i\in I$,生成的 σ 代数
$\lambda(\mathscr{C})$	由集合族 $\mathscr{C}$ 生成的 λ 系
r.v.	随机变量
s.r.v.	阶梯随机变量
$X\in \mathscr{A}_1/\mathscr{A}_2$	指 $X^{-1}(\mathscr{A}_2)\subset\mathscr{A}_1$
I_A	集合 A 的示性函数
$f\circ X$	f 与 X 的复合映射
esssup	本质上确界
essinf	本质下确界
$X\vee Y$	$\max(X, Y)$
$X\wedge Y$	$\min(X, Y)$
$\rightarrow$,a.s.	a.s.收敛
$\xrightarrow{p}$	以概率收敛
d.f.	分布函数
c.f.	特征函数
$C(F)$	d.f.F 连续点的全体
Var$F$	d.f.F 的全变差
$F_n \xrightarrow{w} F$	弱收敛
$F_n \xrightarrow{c} F$	完全收敛
$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$	r.v. X_n 的 d.f.弱收敛于 r.v.X 的 d.f.
$\xrightarrow{L_p}$	L_p 收敛
Ω_T	$\prod_{t\in T}\Omega_t$

ω_S	$\{\omega_t: t \in S\}$
π_t	投映映射
$E(X \mid \mathscr{L})$	条件期望
$P(A \mid \mathscr{L})$	条件概率
$P^{\mathscr{L}}$	概率 P 局限于子 σ 代数 $\mathscr{L}$ 上生成的概率
$F_1 * F_2$	d.f. F_1 和 F_2 的卷积
$F^{*(n)}$	d.f. F 的 n 重卷积
$I_m(z)$	复数 z 的虚部
$R_e(z)$	复数 z 的实部
X^S	r.v. X 的对称化
X^C	r.v. X 在 C 处截尾所得到的 r.v.
μ_q	r.v. 的 q 分位点
i.o.	infinitely often
uan	uniformly asymptotically negligible
$\triangleq$	定义为
$\varphi \ll \mu$	φ 关于 μ 绝对连续

目　　录

第一章　概率空间

概率论的基本概念源于测度论。但和其他数学分支一样,概率论也有它自己的一套术语和工具。在这一章,我们将引入一些概率论中的术语和一些基本概念。这儿我们假定读者已经具备了测度论和实变函数的基本知识,并对概率论有了初步的了解。众所周知,事件、试验和概率是概率论中最基本的概念。公理化地看,事件是一些能够用逻辑运算“非”、“和”及“或”组合起来的数学化了的实体,而概率则是在事件类上的一种赋值。我们这儿所说的试验是指一次随机试验的一个结果。考虑到我们所研究的事件和试验的自然条件,每次试验的结果是确定的,即我们所考虑的事件不是实现就是尚未实现,这使我们引入试验空间 Ω 的概念。它由所考虑的全部可能的试验结果组成,并可在每个事件和实现该事件的所有试验点集所组成的子集之间建立一一对应关系。于是概率就可以看作一个集合函数,它类似于定义在欧氏空间某一个子集上的体积,这就是测度论的观点。

关于概率,我们首先在集合代数上定义,然后开拓到 σ - 代数上,由此提出概率空间的概念。这样的处理有如下两个优点:其一是阐述了测度论中十分重要的延拓定理;其二是在构造欧氏空间或乘积空间上的概率时,可以很自然地先在集合代数或集合半代数上定义,然后延拓,这在应用中是比较容易做到的。

1.1 事件和试验

1.1.1 事件和事件的运算

人类对自然界的认识中最基本的概念是关于事件的概念。下面我们只从它们是否发生这一角度来考察事件，而不涉及事件本身的性质。习惯上常用 $A,B,C\cdots$ 来表示事件，而不可能事件和必然事件分别用 ϕ 和 Ω 来表示。以 A^c 表示 A 不发生这一事件；$A\cup B$ 表示两个事件 A 和 B 中至少发生一个的事件；$A\cap B$ 表示事件 A 和 B 同时发生的事件。运算"$\cup$"和"$\cap$"分别称为事件的并和交。为方便起见，事件 $A\cap B$ 也可记为 AB。上述并、交运算可以推广到非空事件族上去。对每个有限或无限的非空事件族 $\{A_i,\ i\in I\}$，事件 $\bigcup_{i\in I}A_i \triangleq \sup_{i\in I}A_i$ 为 $A_i,\ i\in I$，中至少有一个事件发生的事件；事件 $\bigcap_{i\in I}A_i \triangleq \inf_{i\in I}A_i$ 为 $A_i,\ i\in I$，中每个事件都发生的事件。用事件发生和不发生的概念可以验证下列诸式成立：

$$A\cup A = A,\quad A\cap A = A,\quad A\cup\phi = A,\quad A\cap\phi = \phi$$

$$A\cup\Omega = \Omega,\quad A\cap\Omega = A,\quad A\cup A^c = \Omega,\quad A\cap A^c = \phi$$

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}A_i^c,\quad \left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I}A_i^c$$

$$B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right) = \bigcup_{i\in I}BA_i,\quad B\cup\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$$

下面几个概念也是经常用到的。

不相容 使 $AB=\phi$ 的两个事件 A 和 B 称为不相容或不相交的。这时 $A\cup B$ 可以改写为 $A+B$。若 $\{A_i,\ i\in I\}$ 为一族两两不交的有限或可列非空事件族，则 $\bigcup_{i\in I}A_i$ 也可改记为 $\sum_{i\in I}A_i$。本书中记号 $\sum_{i\in I}A_i$ 蕴含事件族 $\{A_i,\ i\in I\}$ 是两两不相容的。

事件差 事件 A 发生而 B 不发生称为事件 A 和 B 的差，记

为 $A-B$。由定义，$A-B=AB^c$。

对称差 事件 A 与 B 的对称差是指事件 A 与 B 中有且仅有一个发生，记为 $A\Delta B$。由定义，$A\Delta B=(A-B)+(B-A)$。

包含 若事件 A 的发生蕴含事件 B 的发生，则称 A 包含于 B，我们用 $A\subset B$(或 $B\supset A$)。这时称事件 A 是事件 B 的子事件。若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$，我们称事件族 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 是单调下降的，记为 $A_n\downarrow$，若 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，则称事件族 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 是单调上升的，记为 $A_n\uparrow$。

相等 事件 A 与 B 称为相等，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$。今后对相等事件不加区别。

包含关系是事件集合上的一种有序关系，即

$$A\subset A$$

$$A\subset B,\quad B\subset A\Rightarrow A=B$$

$$A\subset B,\quad B\subset C\Rightarrow A\subset C$$

显然，在包含关系下，我们有

$$A\subset C,\quad B\subset C\Rightarrow A\cup B\subset C$$

$$A\supset C,\quad B\supset C\Rightarrow A\cap B\supset C$$

$$A\subset B\Rightarrow B^c\subset A^c$$

为了今后运算的方便，当指标集 I 为空集时我们定义

$$\bigcup\nolimits_{i\in I}A_i=\phi,\quad \sum\nolimits_{i\in I}A_i=\phi,\quad \bigcap\nolimits_{i\in I}A_i=\Omega$$

引理 1.1 设 $\{A_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ 为一有限事件族，则

$$\bigcup\nolimits_{i=1}^{n}A_i=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(A_i-\bigcup\nolimits_{j=1}^{i-1}A_j\right)$$

此引理可以用归纳法证明。

1.1.2 试验(trials)

本书我们把一次试验理解为一次有偶然性介入的试验。更确切地说，看成是这种随机试验的一个结果。因此，在所考虑的模型

中每个试验必然意味着事先给定的每个事件是否实现。下面我们将建立试验和事件的对应关系。

首先考虑给定模型下的试验结果。试验结果的全体称为试验空间。一般,试验空间 Ω 是一个任意的非空集合,通常把它作为进一步讨论和研究的出发点。它的元素(即试验结果)看作是该空间中的一个点,今后用 ω 来表示。故 $\Omega=\{\omega:\omega$ 为试验结果$\}$。

例 1 从 n 件产品中随机抽取 m 件进行检验。由排列组合知识得不同的抽取方法有 $\binom{n}{m}$ 种,这 $\binom{n}{m}$ 个试验结果的全体就是我们的试验空间 Ω。给定的模型即为"从 n 件产品中随机抽取 m 件"。若以 ω 表示一个具体的抽取结果,则 $\Omega=\{\omega:\omega$ 为任一抽取结果$\}$。

例 2 若例 1 中的抽取要考虑到先后次序,则不同的抽取方法有 $P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 种。这 P_n^m 个试验结果的全体即为试验空间,这时给定的模型与例 1 有区别。

例 3 观察日光灯管的寿命。这时每一时刻都是试验的一个可能结果。若以 ω 表示每一具体试验的寿命,则试验空间 $\Omega=\{\omega:\omega>0\}$。

下面我们进一步讨论试验与事件之间的关系。我们可以把每个事件 A 与试验空间 Ω' 中实现事件 A 的试验所组成的试验空间的那个子集 A' 联系起来,而且很自然地试图把 A 与 A' 等同起来。例如在例 1 的从 n 件产品中随机抽取 m 件这一试验中,设事件 A 是被抽到的 m 件产品中恰有 k 件次品这一事件,而 A' 表示在试验空间 Ω' $\left(\text{它由} \binom{n}{m} \text{个试验结果组成}\right)$ 中这样的一个子集:$A'=\{\omega$:取出的 m 件产品中有 k 件次品,其余 $m-k$ 件是正品$\}$,则自然把 A 和 A' 等同起来。先假定对应 $A\to A'$ 是一一的,即试验空间 Ω' 足够大,使对给定的两个不同事件,至少存在一个试验,它实

现其中之一而排除另一个。但如果试验空间不够大，则 A 与 A' 不一定能一一对应。

例 4 某工厂的产品分为一等品，二等品，三等品及次品，前三个等级为合格品。如果试验仅仅检验其是否为合格品。以 A_i，$i=1,2,3$，分别记产品为 i 等品这三个事件，则在此试验空间(由合格品和次品组成)中，A_1、A_2 和 A_3 是不可区别的。

在试验空间 Ω' 足够大的假定下，事件 A 和实现 A 的全部试验结果 A' 可以一一对应。若把由所有试验结果组成的集合 Ω' 和必然事件 Ω 对应，不含试验结果的集合 ϕ' 和不可能事件 ϕ 对应(注意这儿 Ω' 是试验空间，而 ϕ' 是 Ω' 中的空集)。显然，若 A' 对应于 A，B' 对应于 B，则 $(A')^c$ 对应于 A^c；$A'\cup B'$ 对应于 $A\cup B$；$A'\cap B'$ 对应于 $A\cap B$。简言之，若用“^{c}”、“$\cup$”和“$\cap$”分别表示在 Ω' 上按照集合论意义下所定义的余、并和交运算，则上述结果可以记为

$$(A^c)' = (A')^c,\ (A\cup B)' = A'\cup B',\ (A\cap B)' = A'\cap B'$$

于是，在对应 $A\to A'$ 下，第一节中的事件运算转化成了集合论中集合的运算，因此我们可以把事件 A 和实现它的所有试验结果的集合 A' 等同起来。以后我们将去掉记号“$'$”。这样对第一节中关于事件的各种概念都可有集合论中的经典概念与之对应。

1.2 集合代数

由事件 A 和试验空间中子集 A' 的一一对应，我们理应进一步讨论如何给定试验空间 Ω 以及如何给定 Ω 中事件类的结构。关于试验空间 Ω，由定义它应该充分大，使得能够找到一个试验把两个不同的事件区分开来。至于究竟多大合适，要根据实际情况或理论上的需要而定，这儿不准备进一步深入讨论。下面我们讨论如何给定 Ω 中事件类的结构。我们知道，Ω 的任一子集类都

是 Ω 中所有子集所构成的集合 $\mathscr{P}(\Omega)$的一个子集。其中一个重要的子集类是在一种或几种集合运算下封闭的类。所谓类 $\mathscr{C}$ 在一种指定运算下封闭是指对 $\mathscr{C}$ 中元素经过这种指定运算后所得到的元素仍在 $\mathscr{C}$ 中。集合代数(又称布尔代数)是在余、有限并及有限交下封闭的子集类。确切地,我们有如下的

定义 1.1 Ω 的子集类称为 Ω 中的集合代数或集合域,若它满足

Ⅰ. $\Omega\in\mathscr{C}$

Ⅱ. 若 $A,B\in\mathscr{C}$,则 $A\cup B\in\mathscr{C}$

Ⅲ. 若 $A\in\mathscr{C}$,则 $A^c\in\mathscr{C}$

以下为简明起见,我们简称集合代数为代数(域)。

很容易证明上述定义与下列定义等价:

Ⅰ′. $\phi\in\mathscr{C}$

Ⅱ′. 若 $A,B\in\mathscr{C}$,则 $A\cap B\in\mathscr{C}$

Ⅲ. 若 $A\in\mathscr{C}$,则 $A^c\in\mathscr{C}$

不难由归纳法推知代数对有限交和有限并运算封闭。

给定 Ω 的一个子集类 $\mathscr{C}$,必然存在包含 $\mathscr{C}$ 且由 Ω 的子集构成的最小代数 $\mathscr{A}$。为证明这一点,只要把 $\mathscr{A}$ 定义为属于所有包含 $\mathscr{C}$ 的代数的集合所组成的类。(容易验证,若 $\mathscr{A}_i$, $i\in I$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的代数,则 $\bigcap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ 也是包含 $\mathscr{C}$ 的代数。而包含 $\mathscr{C}$ 的代数总是存在的,例如 $\mathscr{P}(\Omega)$就是)这样规定的代数 $\mathscr{A}$ 称为是由 $\mathscr{C}$ 生成的。需要这种代数的理由是在我们考虑到集合类 $\mathscr{C}$ 的有限交、有限并和余的运算中,需要一个包含且在所考虑的运算下封闭的最小子集类。

例 5 设 $\Omega=[0,1)$,令 $\mathscr{A}=\{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i),\ 0\leqslant a_i\leqslant b_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n$ 为任一自然数$\}$,则 $\mathscr{A}$ 是$[0,1)$上的一个代数。

例 6 设 $\Omega=[0,1]$,令 $\mathscr{A}=\{\phi,\Omega,\{x_1,\cdots,x_n\},\{x_1,\cdots,x_n\}^c,\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ n$ 为任意自然数$\}$,则 $\mathscr{A}$ 是$[0,1]$上的一个代数。